

Un problème d'arithmétique

par Paul LABERENNE

Professeur Honnoraire

Lycée Chaptal — PARIS

Déterminez si l'égalité:

$$(1) \quad n(n+1) = 2p(p+1)$$

où n et p sont deux naturels, admet d'autres solutions que la solution évidente:

$$n = 3 \quad ; \quad p = 2 \quad (3 \times 4 = 2 \times 2 \times 3 = 12)$$

Les triangles rectangles pseudo-isocèles de côtés a , $a+1$, c (étudié par Maurice GLAYMANN dans le Numéro 310 du Bulletin de l'A.P.M.E.P., page 631 et suivantes) satisfont à l'égalité:

$$(2) \quad a^2 + (a+1)^2 = c^2 \quad \text{ou} \quad 2a^2 + 2a + 1 = c^2$$

d'où il suit que c est impair.

On peut encore écrire:

$$2a(a+1) = c^2 - 1 \quad a(a+1) = \frac{(c-1)(c+1)}{2}$$

$$\text{Posons} \quad a = n \quad , \quad p = \frac{c-1}{2}$$

$$\text{d'où:} \quad p+1 = \frac{c+1}{2}$$

$$\text{Il vient:} \quad n(n+1) = 2p(p+1)$$

Toutes les solutions de (1), en nombre infini, pourront être déduites de celles de (2), qui sont données, en particulier, par la méthode indiquée par Maurice CAUSSE

$$n = 3 \quad c = 5 \quad p = 2 \quad 3 \times 4 = 2 \times 2 \times 3 = 12$$

$$n = 20 \quad c = 29 \quad p = 14 \quad 20 \times 21 = 2 \times 14 \times 15 = 420$$

$$n = 119 \quad c = 169 \quad p = 84 \quad 119 \times 120 = 2 \times 84 \times 85 = 14\,280$$

$$n = 696 \quad c = 985 \quad p = 492 \quad 696 \times 697 = 2 \times 492 \times 493 = 485\,112$$

etc.....

Quelques jours après avoir adressé cette note au Directeur du Bulletin de l'A.P.M., Paul LABERENNE lui envoyait le mot que voici:

“Comme je craignais que ce problème ne fût bien connu, j’ai consulté, après vous avoir écrit, quelques documents. D’après Catalan (*Mélanges*, tome Z, p. 279), Euler dans son *Algèbre*, puis Philippe Breton dans *la Nouvelle Correspondance mathématique* ont étudié un problème analogue (que Catalan traite à nouveau à fond):

Trouver la loi de formation des nombres à la fois triangulaires et carrés.

D’où l’équation entre les naturels p et n

$$p^2 = \frac{1}{2} n (n + 1) \quad \text{ou} \quad (2n + 1)^2 - 2 (2p)^2 = 1$$

ce qui conduit à une équation de Pell qui diffère de celle de notre article par le signe du second membre et n’a pas ainsi de rapport direct avec les triangles pseudo-isocèles (mais qu’on peut traiter par les mêmes méthodes).

Il n’est donc pas question du problème dont je m’occupe et dont l’énoncé, il y a un ou deux siècles aurait été: *trouver les couples de nombres triangulaires, tels que le plus grand soit le double du plus petit.*”

ERRATA

Rémi DUVERT signale que dans l’article “*Une petite situation pour une grande pédagogie*” pages 647 et 648, il faut remplacer “page 8” par “page 638”.

Toujours page 648, ligne 12, il faut lire : “*il faut et il suffit qu’il existe deux nombres...*”.

Ne croyez-vous pas que nous avons à enseigner une foule de choses auxquelles nous ne croyons pas nous-mêmes ?

Henrik IBSEN