associatif, adj.
associativité, n. f.

Peu usité dans la langue courante, le mot *associatif* a en alg. le sens que sa formation laisse prévoir : compatible avec l'association (des "facteurs" d'une opération interne). Le mot *associativité*, forgé par les mathématiciens, désigne cette propriété de certaines opérations.

1.1. On sait qu'une loi interne dans un ensemble E, notée par exemple $*$, à tout couple (a,b) d'éléments de E fait correspondre un élément de E, appelé composé de a et b (dans cet ordre), et noté $a*b$; mais cela ne définit pas le composé de trois éléments a, b, c ou plus. Cependant $(a*b)*c$ et $a*(b*c)$ sont définis, mais ne sont pas nécessairement égaux, comme on le constate par exemple avec la soustraction dans Z, la division dans Q_*, l'exponentiation définie par $a*b=a^b$ dans R^+_*, la loi qui en géométrie à deux points associe leur milieu, le produit vectoriel dans R^3, etc.

Définition. Dire qu'une loi interne dans E, notée $*$, est *associative* signifie que, pour tous éléments a, b, c de E,

$$(a*b)*c = a*(b*c)\,.$$

Exemple : La composition des applications d'un ensemble dans lui-même est associative.

En conséquence, pour une loi $*$ associative, l'écriture $a*b*c$ cesse d'être ambiguë : non seulement l'allègement est sensible, mais surtout, de proche en proche, on peut définir le composé d'une suite finie d'éléments. Cela suffit à expliquer l'importance théorique de l'associativité, qui est exigée dans la définition des monoïdes (par exemple $(\mathrm{N},+)$, $(\mathrm{D},\times)$, etc.) [MONOÏDE], donc des groupes, anneaux et corps.

Remarque. La suppression de certaines parenthèses est également possible pour des lois non associatives, mais elle résulte alors de conventions particulières (qu'on omet trop souvent d'expliciter) : ainsi, $a-b-c$ signifie sans ambiguïté $(a-b)-c$.

1.2. Si une opération interne dans un ensemble E n'est définie que pour certains couples d'éléments de E, on peut encore dire qu'elle est associative pourvu que, pour tous les triplets (a,b,c) tels que les composés $(a * b) * c$ et $a * (b * c)$ sont définis, ceux-ci soient égaux ; dans ces conditions la notation $a * b * c$ est encore justifiée.

C'est le cas de la multiplication dans l'ensemble de *toutes* les matrices à composantes dans un même anneau, et aussi de l'opération barycentre dans l'ensemble des points affectés de coefficients.

Remarque : On pourrait, pour une opération interne non partout définie $*$, distinguer une associativité *faible*, définie ci-dessus, et une associativité *forte*, caractérisée par le fait que, chaque fois que l'un des composés $(a * b) * c$ et $a * (b * c)$ est défini, l'autre l'est aussi, et qu'ils sont égaux.

1.3. Le même schéma opératoire se retrouve dans d'autres situations importantes où il ne s'agit plus d'opérations internes. On peut citer :

a) la composition des applications en général : chaque fois que cela a un sens, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;

b) la composition des graphes ;

c) l'addition et la multiplication des cardinaux.

Dans les trois cas ci-dessus tout le monde s'accorde à parler encore d'associativité. Les cas suivants peuvent cependant être rattachés au même processus bien qu'il ne s'agisse plus d'une seule opération :

a) dans les espaces vectoriels $(\lambda \mu)x = \lambda(\mu x)$;

b) $f(g(x)) = (f \circ g)(x)$.