

Sur les pseudo-cubes

par P. GAGNAIRE

I.R.E.M. de LYON

Le problème est *intéressant*, mais certainement plus compliqué que MANZONI le présente.

S'il n'y a qu'une seule sorte de pseudo-carrés (ceux de côtés a_n et a_{n+1}) en revanche, il existe deux sortes de pseudo-cubes:

- les pseudo-cubes allongés, de côtés $a_n, a_n, a_n + 1$
- les pseudo-cubes aplatis, de côtés $a_n, a_n + 1, a_n + 1$.*

On pourrait aussi considérer des pseudo-cubes moins symétriques, de côtés $a_n - 1, a_n, a_n + 1$.

Pour les hyper-pseudo-cubes**, la variété s'accroît. MANZONI parle seulement des hyper-pseudo-cubes allongés mais, dans le cas de $\mathbb{R}^4$ il faut déjà distinguer trois sortes d'hyper-pseudo-cubes:

$$(a_n, a_n, a_n, a_n + 1) \quad ; \quad (a_n, a_n, a_n + 1, a_n + 1) \quad ; \\ (a_n, a_n + 1, a_n + 1, a_n + 1) \quad ,$$

de moins en moins allongés (ou de plus en plus aplatis, si on préfère). Quant au pseudo-hyper-cube $(a_n, a_n + 1, a_n, a_n + 1)$, il se ramène au deuxième moyennant une symétrie convenable dans $\mathbb{R}^4$.

En définitive, il s'agit non pas de trouver les naturels a_n et d_n tels que

$$(m - 1) a_n^2 + (a_n + 1)^2 = d_n^2$$

mais les naturels a_n et d_n tels que

$$(m - p) a_n^2 + p (a_n + 1)^2 = d_n^2$$

où p désigne un naturel de l'intervalle $[0, m]$.

* Tout pseudo-carré est à la fois allongé et aplati !

** Lorsque la dimension est supérieure à 3.

On pourrait se cantonner à $p \in [1, m-1]$ mais, en prenant l'intervalle $[0, m]$, on inclut dans le problème le cas des *vrais* hyper-cubes.

Par exemple, pour $m = 4$, on a un (*vrai*-) hyper-cube à diagonale entière: celui dont la diagonale est 2 et dont les côtés sont 1, 1, 1 et 1. En effet,

$$1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 2^2.$$

Or (coïncidence ou raison profonde ? je ne sais pas ...), MANZONI signale qu'il n'a pas trouvé de pseudo-hyper-cube non trivial pour $m = 4$.

En remarquant que 4 est un *carré*, on est naturellement amené à se poser la question suivante:

"Est-il vrai que $\mathbb{R}^n$ contient des pseudo-hyper-cubes (de $m-1$ sortes: allongés, aplatis, etc...) si et seulement si m n'est pas un carré ?"

Si m est un carré, $\mathbb{R}^m$ contient évidemment le *vrai*-hyper-cube $(1, 1, 1, \dots, 1)$ dont la diagonale est le *naturel* $\sqrt{m}$. La question peut alors se reformuler ainsi:

"Tout espace $\mathbb{R}^m$ contient soit des vrais-hyper-cubes (à côté et diagonale entiers) soit des pseudo-hyper-cubes mais pas les deux à la fois; est-ce vrai ?"

Ce qui précède n'est pas une réponse mais simplement *une* voie de recherche. Il y en a certainement d'autres parmi lesquelles une qui fait sûrement appel à l'équation de Pell-Fermat.

$$x^2 - Ay^2 = 1$$

où A est un naturel *non carré* (contrairement à 4 pour lequel le calculateur programmable de MANZONI n'a rien trouvé !).

ERRATUM

Dans l'article de J. de BIASI, "Echiquiers en tous genres", Bulletin numéro 310, page 660, les deux figures $n = 20$ et $n = 14$ ont été interverties et celle qui correspond à $n = 14$ est à l'envers.