

Une génération des "triangles rectangles pseudo-isocèles" : les pseudo-cubes

par René MANZONI

Lycée Jules Siegfroid
LE HAVRE

Dans le Bulletin N° 310 de l'A.P.M.E.P., j'ai pris un vif plaisir à lire le compte-rendu des recherches de Maurice GLAYMANN relatives aux "*triangles rectangles pseudo-isocèles*".

Ainsi, dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, il existe des "*pseudo-carrés*" dont les côtés ont pour mesures les naturels a_n et $a_n + 1$, et dont chaque diagonale a pour mesure le naturel d_n , avec

$$\begin{array}{llllll} a_0 = 0 & a_1 = 3 & a_2 = 20 & a_3 = 119 & a_{n+2} = 6a_{n+1} - a_n + 2 \\ d_0 = 1 & d_1 = 5 & d_2 = 29 & d_3 = 169 & d_{n+2} = 6d_{n+1} - d_n \end{array}$$

et

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ d_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

En poursuivant cette expérience, j'ai pu constater que dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ il existe des "*pseudo-cubes*" dont les arêtes ont pour mesures les naturels a_n , a_n , $a_n + 1$, et dont chaque diagonale a pour mesure le naturel d_n , avec

$$\begin{array}{llllll} a_0 = 0 & a_1 = 6 & a_2 = 88 & a_3 = 1230 & a_{n+2} = 14a_{n+1} - a_n + 4 \\ d_0 = 1 & d_1 = 11 & d_2 = 153 & d_3 = 2131 & d_{n+2} = 14d_{n+1} - d_n \end{array}$$

et

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ d_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Alors, des difficultés ont surgi lorsque j'ai voulu généraliser à $\mathbb{R}^m$, c'est-à-dire trouver les naturels a_n et d_n tels que

$$(m-1)a_n^2 + (a_n + 1)^2 = d_n^2.$$

Pour $m = 4$, le calculateur programmable dont je dispose ne m'a fourni que la solution triviale $a_0 = 0$, $d_0 = 1$, avec une attente dépassant la demi-heure.

Pour $m = 5$, j'ai obtenu

$$\begin{array}{cccccc} a_0 = 0 & a_1 = 2 & a_2 = 15 & a_3 = 104 & a_{n+2} = 7a_{n+1} - a_n + 1 \\ d_0 = 1 & d_1 = 5 & d_2 = 34 & d_3 = 233 & d_{n+2} = 7d_{n+1} - d_n \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ d_n \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Pour $m = 7$, il vient, en abrégant,

$$d_0 = 1 \quad d_1 = 11 \quad d_2 = 175 \quad d_3 = 2789 \quad d_{n+2} = 16d_{n+1} - d_n$$

Pour $m = 8$, on a

$$d_0 = 1 \quad d_1 = 23 \quad d_2 = 781 \quad d_3 = 26531 \quad d_{n+2} = 34d_{n+1} - d_n$$

Dans chacun des cas "favorables", j'observe que

$$d_{n+2} = 2\alpha \cdot d_{n+1} - d_n$$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ m\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ d_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \\ \beta \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 + m\lambda \\ \alpha^2 - m\beta^2 &= 1 \end{aligned}$$

Mes essais sont inachevés et, de plus, l'exactitude de mes calculs n'est pas certaine. Néanmoins, il me semble que la récurrence ci-dessus ne convient pas pour $m = 6$, $m = 10$, $m = 11$, $m = 13$, $m = 17$, alors qu'elle est valable pour $m = 21$, $m = 23$ et $m = 24$.

Tout cela est si mystérieux que je me permets de poser la question, avec l'espoir d'avoir l'explication d'un tel phénomène. Si cette dernière pouvait être donnée, je serais très content de la voir paraître dans un prochain Bulletin....