2

PROBLÈMES DU COURS MOYEN A L'UNIVERSITÉ

Une étude de problèmes au Cours Moyen

Hazebrouck, 30 septembre 1976

par F. BOULE, E.N. et IREM de Lille

I. TEXTES PROPOSES

[PARC] : Un parc automobile de 120 véhicules (rouges et bleus) est composé uniquement de modèles R12 et R16. On compte 35 voitures rouges dont 15 R12. Le nombre des R12 bleues est double de celui des R12 rouges. Donne le nombre de véhicules de chaque catégorie à l'aide d'un tableau.

[FRANCOIS] : François pense un nombre. Il ajoute 75 puis 85 à ce nombre et trouve 420. Quel est le nombre pensé par François ?

[ECOLE] : Un directeur d'école dispose de 17 paquets de 50 cahiers pour ses 210 élèves. Il distribue équitablement le plus possible de cahiers par élève. Essaie de tirer toutes les conclusions possibles.

[POPULATION] : Au début de l'année une commune comptait 1684 habitants. On note au cours de l'année 18 décès, 30 naissances, 12 départs et 5 arrivées. Quelle est la nouvelle population du village à la fin de l'année ?

[CHAISE] : Une table vaut 358 F. Huit chaises et la même table valent 870 F. Quel est le prix d'une chaise ?

[REFLET] : L'arbre et la maison se reflètent dans l'eau. Complète le dessin :

[CHEVRE] : Une chèvre attachée peut se déplacer le long d'un câble tendu entre deux poteaux. Elle peut se déplacer en tous sens. Dessine les limites du terrain qu'elle peut atteindre. Que peux-tu en dire ?

(A, B : poteaux)

[BROUETTE] : Dans une brouette, on peut mettre 4 pots de fleurs. Combien faudrat-il faire de voyages pour transporter 26 pots de fleurs au fond du jardin ?

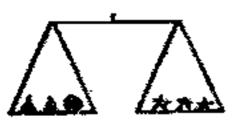
[FLEURS] : Dans un magasin de fleuriste, il y a 120 fleurs (elles sont rouges ou blanches). Il y a des roses et des oeillets. Parmi les 35 fleurs rouges, il y a 15 roses. Il y a deux fois plus de roses blanches que de roses rouges. Combien y a-t-il de fleurs de chaque sorte ?

[PRODUIT] : Voici une opération : 5 208 × 34 . Un élève hésite entre les résultats suivants :

17 709 177 075 177 072 17 707 321

Encadre celui qui est juste (*sans poser* l'opération).

[ROND] : Un ★ pèse 4 g. Un ▲ pèse 5 g. Combien doit peser ● pour que la balance soit en équilibre ?



N.B. : Sur la présentation : les textes étaient proposés sur trois pages et séparés par des espaces destinés à recevoir la solution proposée par l'enfant. Les dessins ci-dessus ont été reproduits à l'échelle 1/2 environ, et les titres ont été ajoutés, pour la commodité du compte rendu.

II. CONDITIONS DE L'EPREUVE

L'épreuve a porté sur deux classes entières d'une école, et une troisième classe d'une autre école (69 enfants en tout). La passation était INDIVIDUELLE, et simultanée pour tous les enfants d'une même classe. L'enfant, pour chaque texte, était invité à lire l'énoncé, et à écrire la solution sous la forme qu'il jugeait préférable. Aucune indication supplémentaire n'était donnée, sauf éventuellement la lecture à haute voix du texte.

Dans une seconde phase, le stagiaire pouvait dialoguer avec l'enfant pour éclairer certain terme du texte, ou demander à l'enfant des explications sur sa démarche ; le dialogue était alors consigné par écrit, avec les observations effectuées par le stagiaire.

Il était demandé de ne fournir aucun jugement sur la production de l'enfant.

III. RESULTATS

L'analyse des productions est organisée selon les directions suivantes :

A. *analyse par item :* l'éventail des résultats et les pourcentages relatifs à ces résultats. Etude en fonction de l'âge des enfants.

B. *Conclusions générales :* sur le mode et les difficultés de lecture, la schématisation, la représentation spatiale, les mécanismes de calcul..

C. *Analyse par enfant :* Il faut alors établir des échelles pour chaque exercice permettant de hiérarchiser les différents types de réponse, d'une façon plus fine que : Vrai/faux. On peut alors confronter les résultats obtenus par un même enfant.

D. *Corrélation :* Ces échelles permettant de construire un tableau où figurent : en ligne, les enfants ; en colonne 0, l'âge de chaque enfant, puis les résultats aux différents exercices. On peut alors chercher des relations entre les performances dues à des exercices différents, et une relation entre la réussite dans un domaine donné, et l'âge des enfants.

A_1 : PARC & FLEURS :

La comparaison numérique des résultats n'est sans doute pas significative : beaucoup d'enfants ont abandonné le 1er exercice après une première lecture, y revenant ou non ensuite. L'impératif horaire n'a pas toujours permis d'aborder la 3ème feuille où figurait le 2ème exercice.

Les résultats sont les suivants :

21 enfants réussissent "PARC" ; leur moyenne d'âge est 11,0
17 enfants réussissent "FLEURS" ; leur moyenne d'âge est 10,9

La relation entre les deux exercices n'a été énoncée que par 6 enfants (moyenne d'âge ; 11,3) soit : 8,6 % de l'ensemble ; 16 % de ceux qui ont fait au moins un des deux exercices ; 40 % de ceux qui ont réussi les deux.

Parmi la population totale :

20,2 % ont réussi les deux exercices ;

36,2 % ont réussi au moins l'un d'eux.

LECTURE : Les mots-obstacles sont les suivants : DONT, PARMI, CATEGORIE, SORTE, DOUBLE. On peut noter quelques confusions entre "12" en tant que prédicat (R 12) et le nombre 12. Confusions entre le nombre de sortes (il y avait 4 sortes) et le nombre de chaque sorte. Enfin "ROSE" qui figure comme substantif (fleur) a quelquefois été considéré comme adjectif (couleur).

TABLEAU : La disposition en tableau requise pour "PARC" est souvent inconnue, ce qui conduit soit au refus d'en établir un, soit à un quadrillage vide de forme variable. 24 enfants seulement (34 %) fournissent un tableau. Parmi eux 17 tableaux carrés (diagramme de Caroll) et six tableaux à 4 colonnes (ou à 4 lignes). Parmi ces 24 enfants, 7 seulement réutilisent une disposition analogue pour résoudre le second exercice.

SCHEMA : 12 enfants (17 %) ont utilisé une représentation ensembliste. Mais dans tous les cas, sauf un, cette schématisation est très incomplète ou erronée.

A_2 : **FRANCOIS :**

Pas de réponse : 3 % ; incomplet : 4,3 % ; erreur de calcul : 13 % ; JUSTE : 79,7 %. La procédure : 420—75—85 a été très rarement employée. Dans la plupart des cas, on résout par : 420 —(75+85). Deux schémas seulement (ensemblistes) ont été proposés : ils sont faux, alors que ces deux enfants ont produit la réponse exacte. Plus de la moitié des réponses exactes donnent lieu à une phrase rédigée.

A_3 : **ECOLE :**

Rien, ou pas compris : 21,5 % ; erreur dans le choix de l'opération : 5,8 % ; erreur de calcul sur la multiplication : 14,4 % ; erreur de calcul sur la division : 27,5 %

CONCLUSION : erronée ou absente : 40,5 %
incomplète avec un calcul juste : 13 %
exacte : 24,6 %

On voit que 37,6 % paraissent avoir compris le problème et produit des calculs justes ; 27,5 % n'ont pas compris le problème ou fait des calculs privés de sens.

Erreur fréquente sur la division (surtout à cause du reste, pris pour 1 au lieu de 10).

LECTURE : le mot "équitablement" a dû être expliqué à au moins un enfant sur 4.

La phrase "quelle conclusion..." a dû être expliquée une fois sur 10.

A_4 : POPULATION

Erreur de calcul ou omission : 24,6 % ; réponse rédigée : 39,1 % ; réponse juste : 69,5 %.

20,2 % des enfants ont procédé par regroupements (décès + départs, etc..) ; parmi eux 72 % ont abouti au résultat juste.

72,4 % ont procédé dans l'ordre des nombres proposés par le texte. Parmi eux 74 % ont abouti au résultat juste. On voit que la méthode choisie n'a pas eu d'incidence sur le pourcentage de succès.

Il n'y a pas eu de réponse aberrante (sauf une qui a ajouté tous les résultats partiels).

LECTURE : fréquemment des explications ont été nécessaires pour "décès" ("faut-il alors les compter ?"), et aussi pour "départ," quelquefois même pour "population".

A_5 : CHAISE :

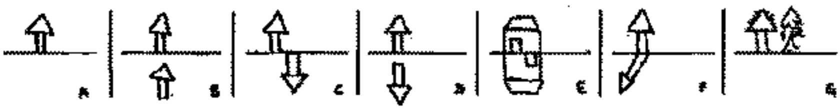
Rien ou pas compris : 23,2 % ; erreur dans le choix de l'opération : 13 % ;
Erreur de calcul : 21,7 % ; calcul juste, réponse non rédigée : 13 % ; réponse juste rédigée : 43,4 %.

On voit qu'un peu plus de la moitié ont abouti à un résultat juste, mais que plus d'un tiers des enfants n'ont rien fait, ou un calcul privé de sens : exemples 8×870 , $870-8$, 512×8, etc...

A_6 : REFLET

L'intérêt de ce problème, comme du suivant, est qu'il propose une situation problématique à laquelle les enfants n'ont pas été habitués. On peut donc s'attendre à un éventail de réponses beaucoup plus grand (rendant plus difficile également l'évaluation), et dont on peut penser qu'il rend compte au plus près des compétences de l'enfant, c'est-à-dire de sa capacité à réinvestir des connaissances acquises.

Voici une liste des types de réponses recueillies :



On doit ajouter bien sûr : (H) la réponse correcte.

Il peut arriver, bien entendu, que la réponse combine plusieurs types de telles réponses : exemple B & C : translation verticale, et translation horizontale.

On a tenu compte aussi du souci de précision dans la réponse : usage de la règle et essai de mesures. Réussite globale : 56,5 % (parmi lesquels 48,7 % avec la règle). La règle est très rarement employée en dehors du type (H). Si on ajoute à ces réponses les types (D), on arrive à 68 % de réponses satisfaisantes.

Enoncé mal compris (type G) : 7,2 % ; décalage horizontal, ou inversion (C ou E) 8,6 % . Le type F est réalisé 3 fois, et le type B 5 fois.

A_7 : CHEVRE

Ce problème a donné lieu à des démarches très diverses, dues d'une part à la forme de l'énoncé, d'autre part à l'attitude (analytique ou synthétique) de l'enfant.

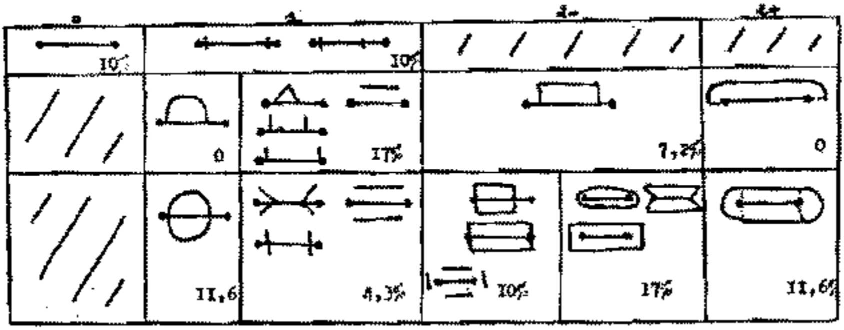
La question "que peut-on en dire ?" a reçu peu de réponses ; les unes sont liées à la forme obtenue ("c'est un ovale"...), les autres à un jugement sur la situation ("elle n'a pas beaucoup de place" ou "cela qu'ils ont fait sa sont des méchants").

On peut classer les dessins obtenus selon deux critères :

1 : il est réduit au segment AB ; ou au demi-plan supérieur ; ou il utilise tout le plan.

2 : le déplacement de la chèvre est soumis à des contraintes : une contrainte est aperçue (limite horizontale, ou limites verticales);

deux contraintes sont aperçues mais mal coordonnées (figure carrée, rectangle, ou trapèze, ou ovale) ; les deux contraintes sont bien coordonnées (figure exacte).



La figure pouvait induire deux types d'erreurs : 12 % environ n'ont pas compris que l'anneau pouvait glisser le long du câble (ce terme-ci était d'ailleurs souvent inconnu). D'autre part, la représentation de la chèvre a pu faire penser que le dessin était dans son ensemble une vue frontale ; c'est pourquoi près d'un quart des enfants ont limité leur réponse au demi-plan supérieur. On peut penser que ce problème, plus que les autres, par l'anticipation et la coordination de mouvements qu'elle met en jeu, peut révéler la capacité de l'enfant à représenter dans l'espace.

A_8 : **BROUETTE**

Rien : 2,8 % ; multiplication ou addition : 10,1 %

Erreur dans la division : 1,4 % ; autre erreur : 10,1 % (6 voyages et demi, 22 voyages ...).

DIVISION JUSTE : 76,7 % dont : "6 voyages" 27,5 %, "7 voyages" 49,2 %.

On voit donc que moins d'un enfant sur deux donne une réponse correcte (parmi lesquelles on peut admettre : "6 voyages, et deux pots à la main..").

On voit également que plus de 20 % des enfants ne produisent rien, ou une réponse aberrante.

A_9 : **PRODUIT**

Bonne réponse : 59,4 % . Mais les justifications sont variables: 2 enfants raisonnent sur la parité. Une très grande majorité s'est fondée sur le chiffre des unités de $8 \times 4 = 32$.

Bon nombre d'enfants ont essayé de calculer mentalement, ce qui les a souvent conduits à une estimation de l'ordre de grandeur.

A_{10} : ROND

Le problème a généralement semblé facile : 69,5 % de bonnes réponses.

La méthode généralement adoptée a été de compter ce qui est connu dans chaque plateau et de résoudre : $10 + () = 12$. Il y a eu très peu de réponses fausses, mais le problème n'a pas toujours eu le temps d'être abordé.

On peut constater une assez forte corrélation entre ces résultats et ceux de l'exercice précédent, celui-là ayant généralement été trouvé plus facile.

B : SYNTHESE

Sous réserve des conclusions que permettront de donner l'établissement d'échelles* et l'établissement de corrélations, il n'apparaît pas de façon évidente de corrélation entre le niveau des résultats et l'âge des enfants, bien que l'écart entre le plus jeune et le plus vieux soit de 40 mois. En particulier, on pouvait attendre une telle corrélation dans les exercices CHEVRE, et à un moindre degré dans REFLET et ROND. On peut donc en déduire que le cursus scolaire a un effet régulateur sur les différences imputables au développement individuel de l'enfant. Mais non pas un effet homogénéisant puisqu'il subsiste (en particulier dans les deux premiers exercices cités, auxquels on pourrait ajouter PARC, ECOLE, CHAISE) une très grande diversité quantitative et qualitative de résultats.

On se bornera ici à des remarques de trois ordres :

B_1 : lecture et compréhension du texte.
B_2 : schématisation
B_3 : maîtrise du calcul.

B_1 : Comme dans des études analogues et antérieures, on peut constater que la lecture est d'abord soumise à *l'obstacle* du vocabulaire : des mots comme DONT, PARMI, DOUBLE (à plus forte raison EQUITABLEMENT) ne sont pas immédiatement saisis par tous les enfants. Dans l'épreuve proposée, aucun texte incomplet ou ambigu ne permettait d'observer le procédé de "majoration" du texte qui consiste à rendre possible une solution et une seule.

* N.D.L.R. : Les lecteurs intéressés peuvent les demander à l'auteur.

Dans la plupart des cas on a observé l'importance des points de repères habituels : les nombres et les "stimulateurs d'opération". Les nombres sont saisis de préférence dans l'ordre de la lecture (et quelquefois au mépris des grandeurs associées...). C'est pourquoi PARC a semblé généralement si difficile. C'est pourquoi aussi les enfants ont généralement utilisé deux démarches différentes dans FRANCOIS et POPULATION pour des opérations itérées :

"Il ajoute 75 puis 85" a incité à calculer 420−(75+85) plutôt que 420−75−85, alors que dans POPULATION, c'est cette seconde démarche qui est largement majoritaire (pourtant bien plus compliquée).

D'autre part le repérage des opérations à faire (le problème est souvent considéré en ces termes : "qu'est-ce que je peux calculer ?") est souvent interrompu dès qu'une opération est entreprise : c'est ainsi que 7 enfants au moins devant ECOLE ont donné une conclusion dès la première opération ; c'est ainsi également que la dernière réponse de PARC n'a pas toujours été recherchée.

Dans sept problèmes sur onze, le résultat était associé à une grandeur (prix, voyages, cahiers...). Mais les textes n'ont pas été conçus de façon à vérifier la capacité de l'enfant à interpréter son calcul, en terme de grandeur associée. Dans le cas de POPULATION CHAISE, BROUETTE l'auteur d'une réponse numérique correcte a généralement indiqué qu'il s'agissait d'habitants, de francs, de voyages. Pour une forte majorité, les réponses ont été formulées sur le mode d'une phrase rédigée, permettant ainsi de s'assurer si l'interprétation du calcul a été faite.

B_2 : Il est manifeste que la schématisation "spontanée" qui est de loin la plus fréquente, sinon la seule, est la représentation ensembliste (schéma de réunion). Elle n'était ici particulièrement adaptée à aucun problème, et l'on peut constater que, généralement manipulée incorrectement et comme un stéréotype, elle n'aide ni n'entrave la résolution ; il y a plusieurs cas de solution exacte, coexistant avec un schéma faux. La disposition en tableau, moins connue, moins bien maîtrisée, a cependant conduit ses usagers (un tiers des enfants environ) à trouver plus souvent le 4ème nombre que ceux qui se sont contentés d'une liste. Mais, non explicitement demandée pour FLEUR, elle n'a été retenue que par un enfant sur dix.

Il est probable cependant que c'est une perception globale du problème, et non une lecture méthodique, qui conduit l'enfant à trouver, puis à compléter le schéma en question. Cette hypothèse toutefois mériterait d'être examinée.

B_3 : Les exercices avaient été construits plutôt pour révéler la compréhension du sens des opérations que pour juger des performances de calcul. Hors les erreurs sur les choix de l'opération (ou son "sens"..) les erreurs systématiques observées sur les calculs sont principalement dues à l'inversion de la multiplication, ou à l'intervention du zéro dans la division :

$$\begin{array}{r} 50 \\ \times\ 17 \\ \hline 50 \\ 350 \\ \hline 400 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 85\cancel{0} & 21\cancel{0} \\ \cline{2-2} 1 & 4 \text{ (reste : 1)} \end{array}$$

Le but de cette étude était d'examiner les réactions des enfants vis-à-vis d'une situation de problème, les modalités de résolution qui s'ensuivaient, et les conséquences qu'il faut en tirer.

On peut voir que la difficulté d'un problème est souvent antérieure, ou extérieure, à la situation mathématique ou calculatoire proposée : difficulté de lecture, soumission à des habitudes scolaires stéréotypées de calcul ou de schématisation, etc... La mise en lumière de ces difficultés doit avoir deux ordres de conséquences :

A : Dans la présentation des situations que l'on proposera : attention à porter au vocabulaire et plus généralement à la rédaction des textes ; on recherchera les rédactions non stéréotypées, les questions ouvertes, éventuellement les présentations non verbales.

B : Dans l'évaluation du résultat : la confrontation de la réponse de l'enfant avec un résultat attendu laisse échapper des possibilités de discussion de la part de l'enfant, ou de réponses justifiées imprévues.

On peut difficilement apprécier, en proposant une batterie d'exercices, quels sont les paramètres qu'ils vont faire intervenir. L'examen attentif des résultats et des corrélations permet d'établir des barèmes et une pondération qui spécifieront les paramètres auxquels on aura choisi de s'intéresser.