Bulletin de l'APMEP n°310 - Septembre 1977

5

MATÉRIAUX POUR UN DICTIONNAIRE

Les respectueuses

par J. CHEVALLIER

Non, je ne me prends pas pour Jean-Paul Sartre ; et ceci n'est pas non plus de la "pub" clandestine pour un film de la catégorie "int. — 18 ans" (on appréciera au passage cette utilisation du signe "moins"). Plus simplement l'occasion s'offre, à propos de l'étude dans le Dictionnaire A.P.M.E.P. des propriétés des opérations, de les intégrer dans un cadre plus large : à savoir comment certaines relations en *respectent* d'autres dans des conditions données.

0. Avant d'aborder le sujet, je voudrais, sans allonger indûment cet article, préciser quelques points de vocabulaire. En effet, l'expérience montre qu'on ne peut se fier à tout ce qui se prétend "relation" ; or il convient que nos respectueuses soient avant tout respectables.

0.1. Du point de vue formel, on s'accorde à distinguer (outre les *termes*) des symboles *fonctionnels* comme $\times$ ou $\cap$, et des symboles *relationnels* comme $\in$, $=$, $<$, etc. ; à chacun d'eux est attribué un nombre déterminé de "places" destinées à être occupées par des termes (les symboles donnés en exemple sont tous "à 2 places" dans la grammaire qui nous est familière).

Rien n'empêche d'appeler *fonctions formelles* (resp. *relations formelles*) ces symboles fonctionnels (resp. relationnels) *tant que leurs places restent vides ou incomplètement occupées* : il n'est pas gênant de dire que "$\times$ 2" est une fonction formelle à 1 place ou que "3 $\in$", "$\in$ 2", "5 $=$" sont des relations formelles à 1 place. Il en va tout autrement lorsque toutes les places sont occupées ; personne d'ailleurs n'aurait l'idée d'appeler "5×2" ou "$A \cap B$" des "fonctions", alors que ce sont des termes ; mais, hélas ! , on appelle couramment "relations" des écritures comme "$3 \in Z$" ou "$x + y = z$". Or, si l'on conçoit que le symbole à 2 places "$<$" puisse être, par exemple, transitif, on n'imagine pas comment "$x < y$" pourrait l'être. Disons que ces écritures sont des *énoncés* — ou un autre vocable si l'on préfère — n'importe quoi, sauf des relations !

0.2. Seule importe pour les énoncés la correction grammaticale : avec la grammaire usuelle, "$\pi \in Z$", "$2 = 6$" sont, *en tant qu'énoncés,* irréprochables. Mais il va de soi que, si de plus on classe les énoncés — ou du moins certains d'entre eux, qui seront dits "décidables" — en énoncés dits "vrais" et énoncés dits "faux", tout le formalisme de la logique bivalente devient possible.

0.3. Du point de vue ensembliste, les termes apparaissent comme des *noms* de certains "objets", et le symbole $\in$ acquiert la signification habituelle. De ce point de vue, on appellera *relation n-aire* tout (n+1)-uplet d'ensembles $(E_1, E_2, ..., E_n, G)$ où G est une partie de $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$.

Toutefois, l'existence de l'ensemble vide introduit ici une singularité. Il serait maladroit de rejeter entièrement l'hypothèse que l'un au moins des E_i puisse être ϕ, entraînant que $G = \phi$: car on restreindrait la généralité de certaines formulations (ainsi il peut être commode de dire que (ϕ, F, ϕ) est *l'application* — unique — de ϕ dans F, et de la distinguer ainsi de l'application de ϕ dans F'). Mais l'utilité de telles "relations" s'arrête là, car leur maniement logique se heurte à un obstacle : vu que G est alors égal à son complémentaire, on ne peut pas distinguer la "relation" de ce qu'on appelle habituellement la "relation contraire" !

Ce cas écarté, on peut donner une définition plus condensée : si E est un ensemble distinct de ϕ, on appellera *relation définie sur* E tout couple (E,G) où $G \subset E$. Naturellement, il *peut* être intéressant de préciser que E est le produit cartésien de n ensembles (ou même *une partie* de ce produit), ce qui ramène aux définitions antérieures ; mais ce point est, somme toute, accessoire (*), le

(*) En ce sens toutes les relations sont "unaires" : après tout, un multiplet est un "objet" comme un autre.

point vraiment important étant que la relation (E,G) associe à tout élément x de E l'énoncé "$x \in G$" (lequel sera, bien entendu, "vrai" ou "faux" suivant le choix de x).

0.4. Enfin, bien que cette dernière étape n'ajoute rien quant au fond, on peut souhaiter interpréter les relations comme des applications ... mais dans quoi ? L'obstacle, c'est que les énoncés ne constituent pas un ensemble ; on le tourne aisément en regardant tout énoncé "vrai" (resp. "faux") comme le *nom* d'un nouvel "objet" : le *vrai* (resp. le *faux*) ; cela revient à assimiler les énoncés aux termes : "$\pi \in Z$" est un nom du faux exactement comme "2 + 5" est un nom d'un certain naturel. Dès lors il devient légitime d'associer à chaque relation (E, G) une application de E dans {vrai, faux} , dite *prédicat* ; si l'on note $\mathcal{R}$ ce prédicat (que l'on confond souvent avec la relation elle-même), l'écriture "$\mathcal{R}(x)$" est alors synonyme de "$x \in G$". C'est ce qui sera fait dans la suite de cet article.

0.5. L'importance des relations binaires n'est pas niable ; elle ne justifie pas cependant l'habitude prise de les appeler "relations" tout court, comme si elle étaient l'archétype auquel toutes les autres se ramènent. En fait elles constituent plutôt un cas *à part* : ce sont les seules pour lesquelles la "source" et le "but" sont définis sans ambiguïté, ainsi par conséquent que la relation réciproque, les seules aussi qui soient susceptibles de transitivité (*). Il aurait peut-être mieux valu réserver pour ce cas le mot de *correspondance* , qui tend à tomber en désuétude ; je l'emploierai ici de façon systématique, vu qu'il y aura déjà beaucoup de "relations".

0.6. Rappelons enfin que toute opération (au sens large qu'a le mot dans la notice OPERATION du Dictionnaire) est une fonction d'un ensemble $E_1 \times E_2$ vers un ensemble E_3. C'est donc aussi une relation ternaire définie sur $E_1 \times E_2 \times E_3$, du moins dans la mesure où l'on a défini ce produit cartésien comme le produit de $E_1 \times E_2$ par E_3 ; c'est ce point de vue, d'ailleurs classique, qui sera adopté ici.

1. *Définition.*

Soit A un ensemble, $\mathcal{R}$ une relation définie sur A, $\mathcal{S}$ une correspondance de A vers A. Dire que $\mathcal{S}$ *respecte* $\mathcal{R}$ signifiera :

$$(\forall a)(\forall a') \quad [\mathcal{R}(a) \wedge \mathcal{S}(a,a')] \Rightarrow \mathcal{R}(a').$$

(*) Dans le même ordre d'idées, qu'on essaie donc d'étendre à des relations autres que binaires la notation "$a \mathcal{R} b$" des énoncés, si habituelle dans le cas des relations binaires !

Voici des exemples de cette situation simple, qui sera à la base de tout le reste.

1.1. Soit P une partie de A, $\mathfrak{R}$ la relation "appartenance à P". Dire que la correspondance $\mathcal{S}$ respecte $\mathfrak{R}$ exprime la *stabilité* de P pour la correspondance $\mathcal{S}$.

1.2. Si dans l'exemple précédent on voulait exprimer l'*invariance globale* de P pour $\mathcal{S}$, il faudrait ajouter une condition de surjectivité ; il est aisé de la faire entrer dans un cadre analogue. Plaçons-nous en effet dans $\mathcal{P}$ (A). D'une part la correspondance $\mathcal{S}^{-1}$ de A vers A, réciproque de $\mathcal{S}$, engendre une correspondance $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}$ (A) vers $\mathcal{P}$ (A) ; d'autre part appelons $\mathcal{U}$ la relation sur $\mathcal{P}$ (A) : "... coupe P". Alors, dire que $\mathcal{T}$ respecte $\mathcal{U}$ exprime la condition cherchée.

1.3. Supposons que A soit un ensemble de couples (u,v) et que $\mathcal{S}$ soit la transposition $(u,v) \mapsto (v,u)$: dire que $\mathcal{S}$ respecte une relation $\mathfrak{R}$ définie sur A signifie alors que $\mathfrak{R}$ est une relation *symétrique*.

2. *Première extension.*

Désignons par X soit A lui-même, soit une de ses puissances cartésiennes, A^n ; toute correspondance $\mathcal{S}$ de A vers A engendre une correspondance $\widehat{\mathcal{S}}$ de X vers X définie comme suit : si $x = (a_1, a_2, ..., a_n)$ et $x' = (a'_1, a'_2, ..., a'_n)$, $\widehat{\mathcal{S}}\,(x,x')$ n'est autre que la conjonction $\bigwedge_i \mathcal{S}\,(a_i, a'_i)$, i décrivant le segment $[1,n]$ de N.

Alors, si $\mathfrak{R}$ est une relation définie sur X, on dira que $\mathcal{S}$ respecte $\mathfrak{R}$ pour exprimer que

$$(\forall x)(\forall x') \quad [\mathfrak{R}(x) \wedge \widehat{\mathcal{S}}\,(x,x')] \Rightarrow \mathfrak{R}(x').$$

2.1. On reprendra sans difficulté les exemples 1.1 et 1.2, mais en prenant cette fois pour P une partie de A^n, stable ou globalement invariante pour la correspondance $\widehat{\mathcal{S}}$.

2.2. Lors de la construction de Z on part habituellement de l'ensemble N^2 des couples de naturels, que nous prendrons pour ensemble A, et l'on définit la correspondance $\mathcal{S}$ de A vers A par :

$$\mathcal{S}\,((a,b),(a',b')) \Leftrightarrow a + b' = a' + b.$$

Posant d'autre part $X = A^2$, on peut définir sur X la relation $\mathfrak{R}$ telle que :

$$\mathfrak{R}\,((a,b),(c,d)) \Leftrightarrow a + d \leqslant b + c.$$

On montre aisément que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre, $\mathcal{S}$ une relation d'équivalence, et que $\mathcal{S}$ respecte $\mathcal{R}$: c'est un moyen de définir, sur l'ensemble-quotient $A/\mathcal{S}$, un ordre qui n'est autre que l'ordre usuel de $\mathbb{Z}$.

2.3. Supposons que $X = A^2$ (resp. $X = A^3$), que $\mathcal{R}$ soit une relation d'ordre (resp. une opération interne $*$), et $\mathcal{S}$ une application de A dans A ; alors " $\mathcal{S}$ respecte $\mathcal{R}$" est synonyme de " $\mathcal{S}$ est une application croissante" (resp. " $\mathcal{S}$ est un endomorphisme de $(A,*)$").

2.4. A étant un espace vectoriel euclidien, toute similitude respecte la relation "orthogonalité" définie sur A^2 ; A étant un espace affine, toute transformation affine respecte la relation "alignement" définie sur A^3 ; etc.

3. *Deuxième extension.*

Les notations restant les mêmes, et la correspondance $\hat{\mathcal{S}}$ engendrée par $\mathcal{S}$ restant définie sur $X \times X$, on suppose à présent la relation $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble $Y \times X$ (où Y peut encore comporter le facteur A). Il suffit, pour être ramené au cas précédent, de considérer $\mathcal{R}$ comme la disjonction $\bigvee_{y \in Y} \mathcal{R}_y$ de relations $\mathcal{R}_y$ définies sur X.

Dès lors, dire que $\mathcal{S}$ respecte $\mathcal{R}$ signifiera que $\mathcal{S}$ respecte chacune des $\mathcal{R}_y$.

Cette définition élargie va permettre de rendre compte de diverses *invariances* et de la *transitivité*.

3.1. On reprend l'exemple traité en 1.3, mais $\mathcal{R}$ est à présent une fonction de A dans Y : on obtient ainsi les fonctions symétriques "de deux variables" ; entrent dans ce cadre les opérations commutatives et les fonctions "de plusieurs variables" qui sont symétriques par rapport à deux d'entre elles.

3.2. A étant un espace affine euclidien, prenons pour $\mathcal{S}$ une similitude et supposons $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}^+ \times A^4$ de la façon suivante : pour tout h positif, $\mathcal{R}_h(M,N,P,Q) \Leftrightarrow (\frac{MN}{PQ} = h)$; alors "$\mathcal{S}$ respecte $\mathcal{R}$" est une autre façon de dire que le rapport des longueurs de deux segments quelconques est un invariant de la similitude.

3.3. $\mathcal{R}$ étant une correspondance de A vers A, on suppose que $Y = X = A$. Dans ces conditions, écrire que

$$(\forall\, y)\,(\forall\, x)\,(\forall\, x') \quad [\mathcal{R}_y(x) \wedge \mathcal{R}\,(x,x')] \Rightarrow \mathcal{R}_y(x')$$

signifie qu'une relation transitive est une relation qui se respecte elle-même.

4. *Troisième extension.*

De façon analogue, définissons à présent $\mathcal{S}$ sur $B \times A^2$ (où B peut encore comporter le facteur A) comme étant la disjonction $\bigvee_{b \in B} \mathcal{S}_b$ de correspondances $\mathcal{S}_b$ de A vers A. Dans la plupart des cas usuels, ce sera un ensemble, indexé par B, d'opérateurs opérant dans A ; cela inclut en particulier le cas des opérations externes (éventuellement internes si B = A).

La définition la plus large est alors celle-ci : " $\mathcal{S}$ respecte $\mathcal{R}$" signifie que chacune des $\mathcal{S}_b$ respecte $\mathcal{R}$.

4.1. Si $\mathcal{R}$ est une équivalence, et $\mathcal{S}$ une opération, cela veut dire que l'opération considérée *passe au quotient*.

4.2. Si $\mathcal{R}$ est un ordre, cela veut dire qu'il est *compatible* avec l'opération $\mathcal{S}$.

4.3. $\mathcal{R}$ étant l'appartenance à une partie P de A comme en 1.1, mais $\mathcal{S}$ étant désormais une opération, supposons que $\mathcal{S}$ respecte $\mathcal{R}$:

a) Si $\mathcal{S}$ est une opération externe à opérateurs dans B, le résultat de 1.1 est généralisé : P est une partie *stable* pour $\mathcal{S}$; tel est le cas des sous-espaces vectoriels.

b) Il ne suffit pas de prendre B égal à A pour obtenir le résultat analogue pour une opération interne $\mathcal{S}$: ce qu'on trouve ici, c'est que P est une partie *absorbante* pour $\mathcal{S}$ (sous-entendu : quand c'est le premier facteur de l'opération qui décrit A) ; tel est le cas des idéaux à gauche d'un anneau, pour la seconde loi de l'anneau.

c) Si l'on veut avoir la stabilité de P pour une opération interne dans A, on peut prendre pour $\mathcal{S}$ la relation ternaire que cette opération induit dans $P \times A^2$. Voir aussi ci-dessous 5.2.

4.4. $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont deux opérations, par exemple $\mathcal{R}$ une addition dans A, et $\mathcal{S}$ une multiplication (externe ou interne suivant que B est ou non distinct de A) ; ainsi, x étant le triplet (a,b,c), $\mathcal{R}\,(x)$ signifie $a + b = c$, et $\mathcal{S}_\lambda(a,a')$ signifie $\lambda\, a = a'$. Dire que $\mathcal{S}$ respecte $\mathcal{R}$, c'est dire que $\lambda a + \lambda b = \lambda c$, soit encore $\lambda a + \lambda b = \lambda (a+b)$, et ce pour tous les λ, a, b : on reconnaît la *distributivité* (à droite) de cette multiplication sur cette addition.

4.5. Soit I le segment $[1, n]$ de N, et A l'ensemble des n-uplets dont les composants, *tous distincts*, appartiennent à I ; on suppose que X = A . Soit d'autre part ϑ une suite $(\vartheta_i)_{i \in I}$ et f une fonction "des n variables ϑ_i", à valeurs dans un ensemble Y. Alors $f \circ \vartheta$ définit une relation $\mathcal{R}$ sur $Y \times X$; par ailleurs, l'ensemble des permutations de I permet d'indexer la famille des applications de A dans A : dire que cette famille respecte $\mathcal{R}$ revient à dire que f est une "fonction symétrique de n variables" (généralisation de 3.1).

4.6. On se place dans un module ou un espace vectoriel, et l'on prend pour A le produit $K \times V$ de l'ensemble K des scalaires par l'ensemble V des vecteurs ; α, β désignant des scalaires, et u,v des vecteurs, la loi externe (relation $\mathcal{R}$ sur $V \times A$) n'est autre que la disjonction des applications $\mathcal{R}_u : \alpha \mapsto \alpha.u$; on considère d'autre part la relation $\mathcal{S}$ définie sur $K \times A^2$ comme la disjonction des applications $\mathcal{S}_\beta : (\alpha, v) \mapsto (\beta\alpha, \beta.v)$. Dire que $\mathcal{S}$ respecte $\mathcal{R}$ signifie alors que, si v est l'image de α par $\mathcal{R}_u$, $\beta.v$ est l'image de $\beta\alpha$ par $\mathcal{R}_u$, donc $\beta.(\alpha.u) = (\beta\alpha).u$, et cela pour tous les α, β, u . On reconnaît *l'associativité* (au sens large); pour l'avoir au sens strict il suffit de remplacer V par K.

Formellement, cela s'applique encore par exemple aux groupes d'opérateurs : si $(K,*)$ est un groupe opérant dans V, on exigera en effet que $\beta(\alpha(u)) = (\beta * \alpha)(u)$.

5. *Remarques :*

5.1. On n'a pas eu de difficulté avec l'associativité au sens large dans l'exemple ci-dessus ; au contraire dans 4.4 la distributivité doit être prise au sens strict. Si l'on désirait l'obtenir au sens large (comme dans les espaces vectoriels où

$$(\alpha + \beta).u = (\alpha.u) + (\beta.u)$$

avec une somme de scalaires au premier membre et une somme de vecteurs au second), il faudrait *deux* relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ dans deux ensembles différents et une correspondance $\mathcal{S}$ entre ceux-ci. Le même procédé permettrait aussi de généraliser l'exemple 2.3. Cela ouvre la porte aux morphismes, mais nous fait sortir du cadre présent.

5.2. On a vu qu'en 4.3 le passage d'une opération externe à une opération interne ne se fait pas "naturellement" pour ce qui concerne la stabilité d'une partie. On pourrait avoir un schéma plus satisfaisant pour cette dernière propriété, en étendant la définition initiale dans une autre direction ; on prendrait pour $\mathcal{S}$ une relation sur A^3 et l'on dirait qu'elle respecte $\mathfrak{R}$ lorsque

$$(\forall a)(\forall a')(\forall a'') \quad [\mathfrak{R}(a) \wedge \mathfrak{R}(a') \wedge \mathcal{S}(a,a',a'')] \Rightarrow \mathfrak{R}(a'') .$$

5.3. On notera qu'on a rencontré le "passage au quotient" dans deux circonstances différentes :

. pour l'ordre, quand l'équivalence respecte l'ordre (cf. 2.2) ;
. pour une opération, quand l'opération respecte l'équivalence (cf. 4.1).

5.4. Le mot *compatible*, souvent utilisé, n'indique pas avec précision qui respecte quoi. A priori "être compatible avec" suggère une égalité de statut ; en fait la locution est plutôt prise avec le sens "être respecté par" ; mais ce n'est pas toujours le cas. La notice GROUPE du Dictionnaire n'a pas échappé à l'équivoque. Aux sections 4 et 6 de cette notice (groupes-quotients et groupes ordonnés) on parle d'une relation et d'une loi "compatibles entre elles" ... ce qui ne compromet personne ! En fait, c'est la relation (d'équivalence ou d'ordre) qui est respectée par la loi de groupe, donc — si l'on admet la convention ci-dessus — qui "est compatible avec" la loi de groupe. Mais, à la section 3 (§ 3.3, groupe d'opérateurs), on retrouve une loi externe L "compatible avec la loi du groupe" où le sens est différent. En effet, la notion en cause est celle qui est analysée à la fin de 4.6 : or, si la loi externe L joue bien le rôle dévolu à $\mathfrak{R}$ dans cet exemple, ce n'est pas la loi de groupe qui peut tenir la place de $\mathcal{S}$.

Comme dans toutes les situations de ce genre, ces ambiguïtés ne sont pas gênantes pour "ceux qui savent", mais elles peuvent l'être pour "ceux qui apprennent". Elles ne sauraient sans doute être totalement éliminées par "ceux qui enseignent", car aucun vocabulaire n'est jamais parfait, et l'on ne peut sans cesse remettre en cause celui qui a cours ; du moins est-il bon qu'on ait conscience des difficultés et qu'on dispose des moyens d'en faire l'analyse. J'espère que le schéma très général indiqué ici peut y aider ; je souhaite également qu'il incite des lecteurs à l'étendre dans les directions indiquées ici, ou dans toute autre voie.