2

ETUDES

Les lecteurs trouveront dans ce Bulletin deux notices élaborées par la Commission du Dictionnaire. A propos de l'une d'elles, **Associativité**, *J. Chastenet de Géry, Président de cette Commission, a rédigé l'article suivant.*

Somme de scalaires et de vecteurs dans un espace vectoriel quelconque

par Jérôme CHASTENET *de* GERY (C.N.A.M.)

Les axiomes des espaces vectoriels ressemblent formellement à ceux des anneaux, et l'on y voit, en particulier, une associativité et une distributivité généralisées en ce sens que les éléments qui interviennent dans les formules correspondantes ne sont pas tous de même "espèce" : certains sont des scalaires et d'autres des vecteurs.

Nous allons montrer que cette distinction peut s'estomper et l'apparence devenir réalité, puisque l'on peut prolonger et unifier les additions et les multiplications partout sur l'ensemble des scalaires et des vecteurs réunis, qui forment alors un anneau dont les propriétés sont présentées. Ceci se fera non pas seulement dans le cas de l'espace euclidien usuel, comme avec les quaternions, mais avec un espace vectoriel (ou un module) quelconque, et fort simplement d'ailleurs. Une méthode voisine sera utilisée, dans un autre article, pour la construction de certaines algèbres généralisant les quaternions.

1. Espace vectoriel sur un corps commutatif

Soit E un espace vectoriel sur un corps K que nous supposerons, pour commencer, commutatif (en revanche, la plus grande partie de ce paragraphe sera valable, mutatis mutandis, pour un module sur un anneau commutatif).

L'ensemble $K \times E$, comme produit de groupes abéliens additifs, est muni canoniquement de l'addition :

$$(s,v) + (s',v') = (s + s', v + v') ,$$

qui en fait un groupe abélien additif, somme directe de $K \times \{0_E\}$ et $\{0_K\} \times E$. Munissons-le en outre de la multiplication interne définie par :

$$(s,v)(s',v') = (ss', sv' + s'v) .$$

Il est facile de vérifier que $K \times E$ est alors un anneau commutatif unitaire où $(1,0)$ est l'élément unité, et $(0,0)$ l'élément nul.

Nous appellerons respectivement *part scalaire* et *part vectorielle* les projections canoniques de $K \times E$ sur K et sur E respectivement, et nous poserons pour tout $z \in K \times E$:

$$z = (\mathcal{S}(z), \vartheta(z)).$$

Il est clair que l'ensemble $K \times \{0\}$ des *scalaires purs* et l'ensemble $\{0\} \times E$ des *vecteurs purs* sont des sous-anneaux de $K \times E$; le premier est isomorphe à K, et le second, de carré nul, est même un idéal.

D'ailleurs on vérifie que E' est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $\{0\} \times E'$ est un idéal de $K \times E$ (ou si et seulement si $K \times E'$ en est un sous-anneau), et même que tous les idéaux de $K \times E$ sont de cette forme (tout au moins quand K est un corps).

On voit aussi que si K' est une partie de K qui est un groupe pour la multiplication de K, alors $K' \times E$ est aussi un groupe multiplicatif. Ainsi $\{1\} \times E$ est un groupe abélien multiplicatif, isomorphe au groupe additif E.

L'anneau $K \times E$ ainsi construit n'est pas intègre (sauf si $E = \{0\}$) et les diviseurs de zéro non nuls sont les vecteurs purs non nuls (tout au moins quand l'anneau K est intègre).

L'anneau $K \times E$ est aussi de fait (sans opération supplémentaire) un espace vectoriel (donc aussi une algèbre associative) sur son sous-anneau $K \times \{0\}$, et sa dimension est supérieure d'une unité à celle de E.

Si les ensembles K et E sont disjoints, nous pourrons identifier K avec $K \times \{0_E\}$ et E avec $\{0_K\} \times E$ et cela sans risque de confusion (sauf pour les zéros de K, E et $K \times E$, mais cela n'est pas gênant en général). De la sorte nous écrirons $s+v$ au lieu de $(s,v) = (s,0) + (0,v)$. On fait alors l'addition des scalaires et des vecteurs comme dans un groupe abélien additif quelconque. Quant à la multiplication, elle se fait comme dans tout anneau commutatif, mais avec la règle supplémentaire :

$$\text{pour tous } z \text{ et } z' \text{ de } K \times E \ : \ \vartheta(z)\vartheta(z') = 0 .$$

Donc, si s et s' sont des scalaires, v et v' des vecteurs, on a :

$$(s + v)(s' + v') = ss' + sv' + s'v .$$

L'identification précédente nous permet aussi d'écrire $K \dotplus E$ au lieu de $K \times E$.

S'il peut y avoir des confusions gênantes (par exemple quand E est un sur-anneau de K) on peut se contenter d'identifier seulement $K \times \{0\}$ avec K, puis poser $(0,v) = \epsilon(v)$ où ϵ est l'injection canonique de E dans $K \times E$; on remplace alors (s,v) par $s + \epsilon(v)$ mais on reconnaît toujours immédiatement la part scalaire et la part vectorielle. On peut écrire alors $K \dotplus \epsilon E$ au lieu de $K \times E$. On a :

$$[s + \epsilon(v)] + [s' + \epsilon(v')] = s + s' + \epsilon(v + v'),$$
$$[s + \epsilon(v)]\,[s' + \epsilon(v')] = ss' + \epsilon(sv' + s'v) .$$

En fait, il suffit de savoir que :

$$\epsilon(v + v') = \epsilon(v) + \epsilon(v'),$$
$$\epsilon(sv) = s\,\epsilon(v),$$
$$\epsilon(v)\,\epsilon(v') = 0 .$$

On peut d'ailleurs pratiquement considérer ϵ comme un symbole qui se comporterait comme un scalaire, sauf que $\epsilon^2 = 0$; on a ainsi une généralisation des nombres duaux.

N.B. Si l'on considère le corps K comme espace vectoriel sur lui-même, l'anneau $K \times K$ tel qu'il est formé ici est en général distinct de l'anneau K lui-même, comme d'ailleurs de l'anneau-produit habituel $K \times K$ (où $(x,y)\,(x',y') = (xx',yy')$).

Signalons quelques identités de notre calcul :

$$[s + \epsilon(v)]^2 = s^2 + \epsilon(2sv) ,$$
$$[s + \epsilon(v)]^n = s^n + \epsilon(ns^{n-1}v) ,$$
$$[s + \epsilon(v)]\,[s - \epsilon(v)] = s^2 \in K .$$

Si s^2 est inversible dans K, $s + \epsilon(v)$ est inversible dans $K \times E$ et l'on a :

$$[s + \epsilon(v)]^{-1} = s^{-1} - \epsilon(s^{-2}v) .$$

On remarquera que l'on a ici des formules analogues à celles de développements limités au premier ordre, c'est-à-dire du genre * :

$$f(s + \epsilon(v)) = f(s) + f'(s)\,(\epsilon v)\,.$$

En posant ${}^{+}z = \mathcal{S}\,(z) - \epsilon(\vartheta(z))$, on a de plus :

${}^{++}z = z\,,$

$z + {}^{+}z = 2\,\mathcal{S}\,(z) \in K\,,$

$z - {}^{+}z = 2\epsilon(\vartheta(z)) \in \{0\} \times E\,,$

${}^{+}z \cdot z = [\,\mathcal{S}\,(z)]^2 \in K\,.$

2. Prolongements d'applications

Indiquons deux cas intéressants de prolongement à $K \dotplus E$ d'applications définies sur E ou sur K.

2.1. Soit f une application linéaire de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F, tous deux sur K disjoint de E. On peut montrer qu'il existe un, et si $f \neq 0$, un seul (tout au moins quand K est bien un corps et disjoint de F) prolongement de f en une application de $K \dotplus E$ dans $K \dotplus F$, qui soit un homomorphisme d'anneaux. Le prolongement est tel que, pour tout $s \in K$ et tout $v \in E$, on ait :

$$f(s+v) = s + f(v)\ .$$

Il est d'ailleurs aussi linéaire sur $K \dotplus E$. On peut dire encore qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application f soit linéaire sur E est que son prolongement à $K \dotplus E$, tel que $f(s + v) = s + f(v)$, soit un homomorphisme d'anneaux. Remarquons que si f applique linéairement E dans F et si g applique linéairement F dans G, le composé du prolongement de f de $K \dotplus E$ dans $K \dotplus F$ et du prolongement de g de $K \dotplus F$ dans $K \dotplus G$ est le prolongement de $g \circ f$ de $K \dotplus E$ dans $K \dotplus G$. Notons aussi que f et son prolongement de $K \dotplus E$ dans $K \dotplus F$ sont injectifs, surjectifs, bijectifs en même temps.

---

* Ce qui généralise d'une certaine façon le procédé de linéarisation au premier ordre décrit dans "Une méthode générale de linéarisation des problèmes physiques" par J.-M. SOURIAU et J. CHASTENET de GERY.
Actes du Colloque International de Mécanique, Poitiers, 1950.
(Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air, n° 261).

Il faut prendre garde, néanmoins, que ce type de prolongement ne conserve pas toutes les propriétés fonctionnelles ; ainsi le prolongement de la somme de deux applications n'est pas, ici, la somme de leurs prolongements.

Soit $\hat{t}$ l'homothétie sur E de rapport $t \in K$; elle se prolonge ainsi à $K \dot{+} E$ de telle sorte que l'on ait pour tous $s \in K$ et $v \in E$:

$$\hat{t}(s+v) = s + \hat{t}(v) = s + tv \ .$$

Ce prolongement est bien linéaire, mais n'est pas une homothétie sur $K \dot{+} E$.

Cependant, le groupe abélien multiplicatif $\{1\} \times E$ est alors muni d'une structure d'espace vectoriel isomorphe à E, mais notée multiplicativement, quand on prend pour composé du scalaire t et du vecteur $1+v$ le vecteur $\hat{t}(1+v) = 1 + tv$. En notation multiplicative, ce dernier sera noté exponentiellement : $(1+v)^t$. Ceci est d'ailleurs compatible avec (et prolonge) les identités vues au paragraphe 1.

2.2. Soit f une application définie sur K. On peut, dès qu'elle est différentiable ou du moins qu'il existe une dérivation convenable, la prolonger à $K \dot{+} E$ en posant, pour tous $s \in K$ et $v \in E$:

$$f(s+v) = f(s) + f'(s)(v) \ .$$

Exemple :

$$e^{s+v} = e^s + e^s v = e^s(1+v) \ .$$

On constate alors que les relations fonctionnelles sont en général conservées.

Exemple : Pour tous z et z' dans $K \dot{+} E$ et p dans Z, on a :

$$e^z e^{z'} = e^{z+z'} \ , \quad [e^z]^p = e^{pz} \ .$$

L'application $\exp = [z \mapsto e^z]$ est un homomorphisme du groupe additif $K \dot{+} E$ dans $K \dot{+} E$ muni de la multiplication.

Si $K = R$, on pourra considérer exp comme un isomorphisme du groupe additif $R \dot{+} E$ sur le groupe multiplicatif $R^*_+ \times E$, où R^*_+ désigne l'ensemble des réels strictement positifs. L'isomorphisme inverse est le prolongement du logarithme népérien ; pour tous $x \in R^*_+$ et $w \in E$, on a :

$$\mathrm{Log}(r+w) = \mathrm{Log}\, r + \frac{1}{r} w \ .$$

Ce prolongement vérifie pour tous z et z' dans $\mathbf{R}_*^+ \times \mathbf{E}$ et pour tout $p \in \mathbf{Z}$,

$$\mathrm{Log}(zz') = \mathrm{Log}\, z + \mathrm{Log}\, z' \ , \ \text{et} \quad \mathrm{Log}(z^p) = p \log z \ .$$

Pour tout $r \in \mathbf{R}_*^+$ et tout $v \in \mathbf{E}$, on a aussi :

$$r + v = r(1 + \frac{v}{r}) = r\, e^{\frac{v}{r}} \ .$$

Si l'on veut bien appeler respectivement r et $\frac{v}{r}$ *module* et *argument* de $r + v$, on a, pour la multiplication, des règles analogues à celles des nombres complexes (attention cependant, ce module n'est pas une norme puisqu'il peut être nul sans que $r + v$ soit nul).

Pour tout $r \in \mathbf{R}_*^+$ et tout $v \in \mathbf{E}$, on peut définir les puissances d'exposant $t \in \mathbf{R}$ en posant :

$$(r + v)^t = r^t + t\, r^{t-1} v = r^t \, (1 + \frac{v}{r})^t \ ,$$

ce qui est compatible avec toutes (et prolonge en un certain sens) les formules précédentes.

Le groupe multiplicatif $\mathbf{R}_*^+ \times \mathbf{E}$ est alors muni d'une structure d'espace vectoriel réel, notée multiplicativement, où le composé du scalaire t et du vecteur $r + v$ est $(r + v)^t$.

3. Le corps (resp. l'anneau) des scalaires n'est plus commutatif

Une partie de ce qui a été fait précédemment peut être étendue au cas où $\mathbf{E}$ est un espace vectoriel (resp. un module) sur un corps (resp. un anneau) $\mathbf{K}$ non nécessairement commutatif, à condition (ce qui est le cas le plus intéressant et en particulier celui de $\mathbf{K}^n$) que $\mathbf{E}$ soit muni d'un produit par un scalaire à droite et d'un produit par un scalaire à gauche, et qu'ils soient compatibles. C'est-à-dire que l'on ait :

$$\text{pour tous } s \in \mathbf{K},\ v \in \mathbf{E},\ t \in \mathbf{K},\ [sv]t = s[vt] \ .$$

Il suffit alors, pour munir le groupe abélien additif $\mathbf{K} \times \mathbf{E}$ d'une structure d'anneau (unitaire si $\mathbf{K}$ l'est) qui prolonge les opérations sur $\mathbf{K}$ et sur $\mathbf{E}$, de poser :

$$(s,v)\,(s',v') = (ss', sv' + vs') \ .$$

La vérification s'en fait sans difficultés.