Une petite situation pour une grande pédagogie

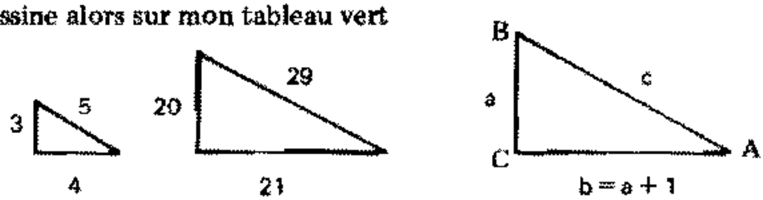
par Maurice GLAYMANN, Directeur de l'I.R.E.M. de LYON

1. Un point de départ

Un jour du printemps 1975, l'ami Pierre GAGNAIRE entre dans mon bureau. Un bonjour et me dit :

— *Connais-tu les triangles rectangles pseudo-isocèles ?*
— *Non ...*

Il dessine alors sur mon tableau vert



et il ajoute

— *Peux-tu trouver tous les couples de naturels (a, c) tels que le triangle ABC soit rectangle en C ?*

Cette question me semble simple, mais venant de Pierre Gagnaire, j'avais tout lieu de me méfier et surtout d'éviter d'y répondre trop vite ! ...

Je griffonne au tableau et finis par lui dire qu'il suffit de savoir résoudre en nombres naturels

$$(1) \qquad 2a^2 - c^2 + 2a + 1 = 0$$

Large sourire de mon ami; il s'en va... mais je sais qu'il reviendra bientôt !

2. Un début de recherche et mon premier espoir

Très vite, je trouve la solution *banale* (0 ; 1). J'ai donc au départ :

a	b = a + 1	c
0	1	1
3	4	5
20	21	29

Comme je dispose à l'IREM d'un calculateur programmable, je me mets à écrire un programme me permettant de *déterminer les naturels* a *tels que* $2a^2 + 2a + 1$ *soit le carré d'un naturel.*

Très rapidement le calculateur me livre les premières solutions:

a	b = a + 1	c
0	1	1
3	4	5
20	21	29
119	120	169
696	697	985

mais les suivantes sont bien longues à venir ... un peu las d'attendre, j'arrête le calculateur; je me penche et médite sur ces premiers résultats. Après un certain nombre d'observations ne débouchant sur rien, l'idée me vint de calculer *la table des quotients* de la colonne c :

		quotient
c_0	1	
		5
c_1	5	
		5,8
c_2	29	
		5,827 586
c_3	169	
		5,828 402
c_4	985	

En faisant alors l'hypothèse que la *suite des quotients* converge, le terme suivant serait approximativement

$$c_5 \simeq 985 \times 5{,}828\,402$$
$$= 5\,740{,}976$$

et comme c_5 est un naturel

$$c_5 \simeq 5\,741$$

Il est maintenant tentant, en désignant par c_n la longueur de l'hypoténuse du nième triangle rectangle pseudo-isocèle, d'émettre l'hypothèse

$$(2) \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \gamma$$

où γ serait un *réel* voisin de 5,8284...
et de commencer par supposer l'existence de deux réels α et β tels que

$$(3) \qquad c_{n+1} = \alpha\, c_n + \beta$$

avec $c_0 = 1$, $c_1 = 5$ et $c_2 = 29$.

Il en découle $\begin{cases} \alpha + \beta = 5 \\ 5\alpha + \beta = 29 \end{cases}$

et $\alpha = 6$ et $\beta = -1$

ou encore $c_{n+1} = 6\, c_n - 1$

On en déduit $c_3 = 6 \times 29 - 1 = 173$

valeur *différente* de celle trouvée par le calcul sur machine :

$$c_3 = 169.$$

Il me faut renoncer à l'hypothèse (3). Pour améliorer les choses je pose alors

$$(4) \qquad c_{n+1} = \alpha\, c_n + \beta\, c_{n-1}$$

avec $c_0 = 1$, $c_1 = 5$, $c_2 = 29$ et $c_3 = 169$

Il en découle $\begin{cases} 5\alpha + \beta = 29 \\ 29\alpha + 5\beta = 169 \end{cases}$

et $\alpha = 6$ et $\beta = -1$ (c'est bizarre !)

ou encore (5) $c_{n+1} - 6\, c_n + c_{n-1} = 0$

J'en déduis $c_4 = 6 \times 169 - 29 = 985$

C'est mon premier résultat réconfortant ; d'autre part

$$c_5 = 6 \times 695 - 169 = 5\,741$$

cette valeur est très voisine de celle trouvée "*expérimentalement*".

Pour calculer γ , j'utilise maintenant l'hypothèse (2) en écrivant

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} - 6 + \frac{c_{n-1}}{c_n} = 0$$

d'où $$\gamma - 6 + \frac{1}{\gamma} = 0$$

et $$\gamma^2 - 6\gamma + 1 = 0$$

La racine positive de cette équation est

$$\gamma = 3 + 2\sqrt{2} \simeq 5{,}828\,427\,124...$$

Mes actions sont en hausse !

Je suis alors tenté de faire un travail analogue avec les valeurs successives de a et avec celles de $b = a + 1$. L'ennui, c'est que cela ne marche pas du tout !

		quotient
a_0	0	∞
a_1	3	6,66
a_2	20	5,95
a_3	119	5,8488
a_4	696	

		quotient
b_0	1	4
b_1	4	5,25
b_2	21	5,7143
b_3	120	5,8083
b_4	697	

Par contre, si j'envisage $t = a + b = 2a + 1$, il vient

t_0	1	7
t_1	7	5,8571
t_2	41	5,8293
t_3	239	5,8284
t_4	1 393	

En posant alors

$$b_n = 1 + a_n \qquad \text{et} \qquad t_n = a_n + b_n = 2\,a_n + 1$$

il semble qu'ici encore

$$\lim_{n \to \infty} \frac{t_{n+1}}{t_n} = \tau$$

où τ est un réel voisin de 5,8284.....

et l'idée de rechercher* deux réels α et β tels que

* L'expérience précédente invite à éviter de chercher dans la direction $t_{n+1} = \alpha\, t_n + \beta$

(4 bis) $$t_{n+1} = \alpha\, t_n + \beta\, t_{n-1}$$

avec $t_0 = 1$, $t_1 = 7$, $t_2 = 41$ et $t_3 = 239$

Il en découle

$$\begin{cases} 7\alpha + \beta = 41 \\ 41\alpha + 7\beta = 239 \end{cases}$$

et $\alpha = 6$ et $\beta = -1$ (bizarre, bizarre !)

ainsi

(6) $$t_{n+1} - 6\,t_n + t_{n-1} = 0$$

C'est *la même équation aux différences finies du second ordre, à coefficients constants et sans second membre que* (5), *cependant avec des conditions initiales différentes.*

En particulier, j'en déduis que

$$\tau = \gamma = 5{,}828\ 427\ 124\ .....$$

D'autre part, elle permet de vérifier que

$$t_4 = 6 \times 239 - 41 = 1\ 393$$

En utilisant (6) et

$$t_n = 2a_n + 1 \quad , \quad b_n = a_n + 1$$

j'en déduis

(7) $$a_{n+1} - 6a_n + a_{n-1} = 2$$

et (8) $$b_{n+1} - 6b_n + b_{n-1} = -2$$

équations aux différences finies du second ordre, à coefficients constants et avec second membre.

A ce stade, *je dois avouer que* je ne suis pas arrivé à établir que a_n, b_n et c_n sont les trois longueurs des côtés du nième triangle pseudo-isocèle.

3. Où cependant le calcul m'apporte quelques satisfactions ...

Faute de mieux dans l'immédiat, j'ai eu envie de rechercher les solutions générales des équations (5) et (6) puis celles de (7) et (8).

La *théorie* des équations aux différences finies du second ordre à coefficients constants conduit à rechercher des solutions de la forme r^n, où r est une *constante.*

En portant dans (5), j'obtiens

$$r^{n+1} - 6r^n + r^{n-1} = 0$$

ou encore $$r^2 - 6r + 1 = 0$$

équation du second degré *(déjà rencontrée)* et qui admet pour racines

$$3 + 2\sqrt{2} \quad \text{et} \quad 3 - 2\sqrt{2}$$

La solution générale de (5) est

$$c_n = A(3 + 2\sqrt{2})^n + B(3 - 2\sqrt{2})^n$$

où A et B sont deux constantes que je détermine à l'aide de

$c_0 = 1$ pour $n = 0$

et $c_1 = 5$ pour $n = 1$

ce qui donne
$$\begin{cases} 1 = A + B \\ 5 = A(3 + 2\sqrt{2}) + B(3 - 2\sqrt{2}) \end{cases}$$

et $$A = \frac{1}{4}(2 + \sqrt{2}) \qquad B = \frac{1}{4}(2 - \sqrt{2})$$

Finalement, (9)

$$c_n = \frac{1}{4}\left[(2 + \sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})^n + (2 - \sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})^n\right]$$

De même, la solution générale de (6) est

$$t_n = A(3 + 2\sqrt{2})^n + B(3 - 2\sqrt{2})^n$$

où A et B sont deux nouvelles constantes que je détermine à l'aide de

$t_0 = 1$ pour $n = 0$

et $t_1 = 7$ pour $n = 1$

ce qui donne
$$\begin{cases} 1 = A + B \\ 7 = A(3 + 2\sqrt{2}) + B(3 - 2\sqrt{2}) \end{cases}$$

et $$A = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2}) \qquad B = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{2})$$

Finalement, (10)

$$t_n = \frac{1}{2}\left[(1 + \sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})^n\right]$$

J'obtiens (11)

$$a_n = \frac{1}{4}\left[(1 + \sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})^n - 2\right]$$

et (12)

$$b_n = \frac{1}{4}\left[(1+\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})^n + 2\right]$$

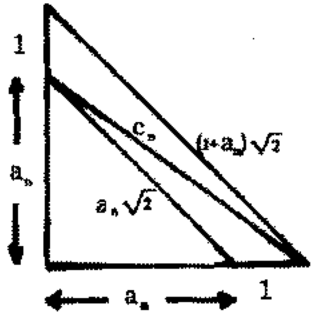
A l'aide du calculateur et de (9), (10), (11) et (12), je tire les valeurs suivantes :

n	a_n	b_n	c_n	t_n
0	0	1	1	1
1	3	4	5	7
2	20	21	29	41
3	119	120	169	239
4	696	697	985	1393
5	4059	4060	5741	8119
6	23660	23661	33461	47321
7	137903	137904	195025	275807
8	803760	803761	1136689	1607521
9	4684659	4684660	6625109	9369319
10	27304196	27304197	38613965	54608393

Là-dessus, pris par d'autres occupations, j'ai un peu laissé de côté ce *petit* problème et j'ai pensé à tout autre chose ... bien que j'eusse la *sensation* et peut-être même la certitude de tenir un bon bout et que je pouvais aller plus loin.

Il me faut dire ici qu'au cours d'un récent passage par Poitiers en avril 1977, mon ami Jacques CHAYE m'a fait remarquer que l'étude des triangles rectangles pseudo-isocèles permet de trouver des *encadrements* de $\sqrt{2}$:

a_n , $1 + a_n$ et c_n désignent les longueurs du nième triangle rectangle pseudo-isocèle. La figure



montre que l'on a la double inégalité

$$a_n \sqrt{2} < c_n < (1 + a_n)\sqrt{2}$$

il en découle alors

$$\frac{c_n}{1 + a_n} < \sqrt{2} < \frac{c_n}{a_n}$$

En reprenant les valeurs numériques précédentes, j'obtiens les résultats suivants:

n	a_n	c_n	$c_n / 1 + a_n$	c_n / a_n
1	3	5	1,25	1,66666667
2	20	29	1,38095238	1,45
3	119	169	1,40833333	1,42016807
4	696	985	1,41319943	1,41522988
5	4059	5741	1,41403941	1,41438778
6	23660	33461	1,41418368	1,41424345
7	137903	195025	1,41420843	1,41421869
8	803760	1136689	1,41421268	1,41421444
9	4684659	6625109	1,41421341	1,41421371
10	27304196	38613965	1,41421354	1,41421359

Ainsi, à la dixième étape, nous avons un encadrement de $\sqrt{2}$ avec 7 décimales exactes*.

4. Un nouveau point de départ

Un jour de printemps 1976, le groupe de l'IREM de LYON, animé par Jean CLERJON, intéressé par l'informatique et l'usage des calculateurs programmables, est à court de sujet de recherche. Il me vient à l'idée de leur proposer le problème des triangles rectangles pseudo-isocèles. Les collègues se mettent au travail, sans autres indications que l'énoncé du problème et la donnée des couples (3 ; 5) et (20 ; 29) ...

Je les abandonne à leur recherche.

---

* Le lecteur pourra essayer de trouver une méthode analogue pour calculer $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ et plus généralement $\sqrt{n}$ (n n'est pas le carré d'un naturel).

Je repasse, par hasard, une heure plus tard ....

Ils avaient à l'aide du calculateur mis au point un programme et avaient calculé les premières valeurs du couple (a_n, c_n).

L'un d'eux, Jean SALANON (Lycée La Plata, TARARE) me dit qu'il *pense avoir trouvé quelque chose:*

$$(13) \qquad \begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 2c_n + 1 \\ c_{n+1} = 4a_n + 3c_n + 2 \end{cases}$$

il a *vérifié* que ces formules *marchent et donnent bien* les premières valeurs de a_n et c_n.

Il est facile de justifier (13): il suffit de déterminer u, v, w et u', v' w' tels que

$$\begin{cases} a_{n+1} = u\,a_n + v\,c_n + w \\ c_{n+1} = u'a_n + v'c_n + w' \end{cases}$$

avec $\quad a_0 = 0 \;,\; a_1 = 3 \;,\; a_2 = 20 \;,\; a_3 = 119$

et $\quad c_0 = 1 \;,\; c_1 = 5 \;,\; c_2 = 29 \;,\; c_3 = 169$

il en résulte les six équations

$$\begin{cases} v + w = 3 \\ v' + w' = 5 \\ 3u + 5v + w = 20 \\ 3u' + 5v' + w' = 29 \\ 20u + 29v + w = 119 \\ 20u' + 29v' + w' = 169 \end{cases}$$

d'où on déduit aisément

$$u = 3 \;,\quad v = 2 \quad w = 1$$
$$u' = 4 \;,\quad v' = 3 \;,\quad w' = 2$$

Nous avons bien (13).

Il faut établir maintenant que si (a_n, c_n) est une solution de (1), alors (a_{n+1}, c_{n+1}), où a_{n+1} et c_{n+1} sont donnés par (13) est aussi solution de (1). D'un point de vue *géométrique*, cela revient à établir que si (x, y) est un point de l'hyperbole (H)

$$(1\text{ bis}) \qquad 2x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0$$

le point

$$(13\text{ bis}) \quad \begin{cases} X = 3x + 2y + 1 \\ Y = 4x + 3y + 2 \end{cases}$$

est un autre point de cette hyperbole.
En d'autres termes, il faut établir que (H) est *invariante* par l'application φ définie par (13 bis). Pour cela, calculons

$$2X^2 - Y^2 + 2X + 1 =$$
$$2(3x + 2y + 1)^2 - (4x + 3y + 2)^2 + 2(3x + 2y + 1) + 1$$

Après des simplifications évidentes, il vient

$$2X^2 - Y^2 + 2X + 1 = 2x^2 - y^2 + 2x + 1$$

Il en résulte que si le point (x, y) est sur (H), alors le point (X, Y) dont les coordonnées sont données par (13 bis) est un autre point de (H).

Il reste à établir maintenant que (13) *fournit toutes les solutions de* (1).

Notons d'abord que comme x et y sont des *naturels*, (13 bis) implique

$$X > x \quad \text{et} \quad Y > y$$

ainsi, si (a_n, c_n) est une solution de (1), (13) fournit un couple (a_{n+1}, c_{n+1}), solution de (1) avec

$$a_{n+1} > a_n \quad \text{et} \quad c_{n+1} > c_n$$

Admettons qu'il existe une solution (u_0, v_0) "*entre*" ces deux solutions:

$$a_n < u_0 < a_{n+1} \quad \text{et} \quad c_n < v_0 < c_{n+1}$$

L'application φ est *régulière* et admet pour réciproque φ^{-1} donnée par:

$$(13\text{ ter}) \quad \begin{cases} x = 3X - 2Y + 1 \\ y = -4X + 3Y - 2 \end{cases}$$

qui laisse elle aussi (H) *invariante*.

Le point (u_1, v_1) image par φ^{-1} de (u_0, v_0) serait un autre point de (H) avec

$$a_{n-1} < u_1 < a_n \quad \text{et} \quad c_{n-1} < v_1 < c_n$$

En itérant ainsi n fois l'application φ^{-1}, nous montrerions l'existence d'une solution (u_n, v_n) telle que

$$0 < u_n < 1 \quad \text{et} \quad 3 < v_n < 5$$

ce qui est impossible.

Ainsi, la donnée, de $a_0 = 0$, $c_0 = 1$ et (13) *donnent l'ensemble des solutions du problème de P. GAGNAIRE*, problème qui revient à déterminer les points à coordonnées *naturelles* de l'hyperbole $2x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0$.

Il est intéressant au passage de montrer que (13) me redonne (5), (6), (7) et (8) :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 3\,a_n + 2\,c_n + 1 \\ &= 3\,a_n + 2\,(4\,a_{n-1} + 3\,c_{n-1} + 2) + 1 \end{aligned}$$

avec $$c_{n-1} = \frac{1}{2}(a_n - 3\,a_{n-1} - 1)$$

d'où après simplification

(7) $$a_{n+1} - 6\,a_n + a_{n-1} = 2$$

A l'aide de $$a_n + 1 = b_n$$

je retrouve

(8) $$b_{n+1} - 6\,b_n + b_{n-1} = -2$$

Par addition membres à membres de (7) et (8), j'obtiens:

$$a_{n+1} + b_{n+1} - 6\,(a_n + b_n) + a_{n-1} + b_{n-1} = 0$$

Comme $t_n = a_n + b_n$, il vient

(6) $$t_{n+1} - 6\,t_n + t_{n-1} = 0$$

Enfin, en utilisant encore (13) :

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= 4\,a_n + 3\,c_n + 2 \\ &= 4\,(3\,a_{n-1} + 2\,c_{n-1} + 1) + 3\,c_n + 2 \end{aligned}$$

comme

$$4\,a_{n-1} = c_n - 3\,c_{n-1} - 2$$

après simplifications, il vient

(5) $$c_{n+1} - 6\,c_n + c_{n-1} = 0$$

5. Un autre point de vue: celui de l'algèbre linéaire

Mis à part le fait important que le système (13) de J. SALANON règle entièrement le problème de P. GAGNAIRE, ce système a le grand mérite de linéariser la situation avec:

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ c_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

le système (13) s'écrit *matriciellement*

$$(14) \qquad X_{n+1} = A X_n + B$$

De même que l'application φ est régulière, la matrice A est *régulière* et il est facile de voir que son déterminant vaut 1, ce qui est notable. L'application φ^{-1} fournit l'inverse de A:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

En partant du vecteur initial $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ il vient de proche en proche

$$X_1 = A X_0 + B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = A X_1 + B = \begin{pmatrix} 20 \\ 29 \end{pmatrix} \qquad \text{etc...}$$

mais en écrivant encore

$$\begin{aligned} X_n &= A X_{n-1} + B \\ &= A (A X_{n-2} + B) + B \\ &= A^2 X_{n-2} + AB + B \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} X_n &= A^2 (A X_{n-3} + B) + AB + B \\ &= A^3 X_{n-3} + A^2 B + AB + B \end{aligned}$$

il est facile de vérifier que

$$X_n = A^n X_0 + (A^{n-1} + A^{n-2} + \dots + A + I) B$$

avec $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (matrice unité d'ordre 2).

Si S désigne la matrice $A^{n-1} + \cdots + A + I$

alors $$A\,S = A^n + \dots + A^2 + A$$

et $$(A - I)\,S = A^n - I$$

avec $$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est régulière car $\det(A - I) = -4$.

L'inverse de cette matrice vaut

$$(A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

il en résulte $$S = (A - I)^{-1}(A^n - I)$$

et $$(15) \quad X_n = A^n X_0 + (A - I)^{-1}(A^n - I)\,B$$

Pour exploiter ce résultat, il suffit de savoir calculer la matrice A^n. Le plus simple et le plus efficace est de diagonaliser la matrice A. Calculons d'abord ses *valeurs propres:*

$$\operatorname{Det}(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ou encore $$\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0$$

(je retrouve ici une équation qui m'a déjà bien servi).

Les valeurs propres de A sont

$$\lambda_1 = 3 + 2\sqrt{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

Déterminons maintenant les *vecteurs propres* de A.

Celui qui est associé à λ_1 est déterminé par

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (3 + 2\sqrt{2})\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

ce qui conduit à

$$3\alpha + 2\beta = (3 + 2\sqrt{2})\,\alpha$$

et $$\beta = \sqrt{2}\,\alpha$$

on peut prendre $\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\beta = 1$.

De même pour λ_2

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (3 - 2\sqrt{2})\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

on peut choisir $\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\beta = -1$.

Ces deux vecteurs propres fournissent la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

qui admet pour inverse

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Dans ces conditions:

$$A = P \begin{pmatrix} 3 + 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3 - 2\sqrt{2} \end{pmatrix} P^{-1}$$

et $$A^n = P \begin{pmatrix} (3 + 2\sqrt{2})^n & 0 \\ 0 & (3 - 2\sqrt{2})^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

Je dispose alors de *tous* les éléments de calcul pour utiliser (15) et retrouver a_n et c_n. En effet, en posant pour simplifier les écritures

$$u = (3 + 2\sqrt{2})^n \quad \text{et} \quad v = (3 - 2\sqrt{2})^n$$

j'obtiens successivement

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u + v & \dfrac{\sqrt{2}}{2}(u - v) \\ \sqrt{2}(u - v) & u + v \end{pmatrix}$$

$$A^n X_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2}(u - v) \\ u + v \end{pmatrix}$$

$$(A - I)^{-1} (A^n - I) B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} u + v - 2 \\ \sqrt{2}(u - v) \end{pmatrix}$$

d'où $$X_n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (1 + \sqrt{2})u + (1 - \sqrt{2})v - 2 \\ (2 + \sqrt{2})u + (2 - \sqrt{2})v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

et finalement, (11)

$$a_n = \frac{1}{4}\left[(1+\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})^n - 2\right]$$

et (9)

$$c_n = \frac{1}{4}\left[(2+\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})^n + (2-\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})^n\right]$$

Ce qui montre, si besoin en était, l'efficacité de *l'outil linéaire*.

6. Où les arithméticiens nous attendaient au passage ! ...

Au cours de cette recherche, comme je trouvais "*beau*" ce problème, je le proposais volontiers autour de moi. Il s'est trouvé que les collègues* qui avaient une culture arithmétique l'ont très rapidement ramené à un problème classique : résoudre une *équation de PELL.* Le lecteur non-arithméticien trouvera dans l'excellent petit livre de Jean ITARD "*Arithmétique et théorie des nombres*" numéro 1093 de la collection "*Que sais-je ?*" une introduction à cette étude au chapitre VI.

Une équation de PELL ou plutôt de FERMAT, comme le fait remarquer Jean ITARD dans son livre,est une équation de la forme

(16) $$x^2 - A y^2 = 1$$

ou de la forme

(16 bis) $$x^2 - A y^2 = -1$$

dans laquelle A est un *naturel non carré.*

On montre que si (x_0, y_0) est la "*plus petite*" solution *naturelle* de (16), alors les autres solutions sont données par

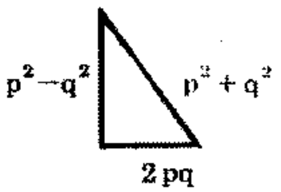
$$\begin{cases} x_{n+1} = x_0 x_n + A y_0 y_n \\ y_{n+1} = y_0 x_n + x_0 y_n \end{cases}$$

ou encore sous forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & A y_0 \\ y_0 & x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

* Gilbert ARSAC, Pierre LEFEBVRE et Maurice CAUSSE.

Revenons alors au problème de Pierre GAGNAIRE:
p et q désignant deux *réels*, les réels $p^2 - q^2$, $2pq$ et $p^2 + q^2$ désignent les longueurs d'un triangle rectangle:



En effet, il est immédiat de vérifier que:

$$(p^2 - q^2)^2 + 4p^2q^2 = (p^2 + q^2)^2$$

Il me faut alors envisager deux cas:

1) $a = 2pq$, $b = p^2 - q^2$ et $c = p^2 + q^2$

avec $b - a = 1$

il vient $p^2 - q^2 - 2pq = 1$

ou encore $(p - q)^2 - 2q^2 = 1$

en posant alors

$$\begin{cases} x = p - q \\ y = q \end{cases}$$

il vient $x^2 - 2y^2 = 1$

C'est une équation de PELL du type (16) avec $A = 2$.

(3 ; 2) est la plus petite solution de cette équation.

J'ai donc

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

Les solutions (x_n , y_n) permettent de calculer (p_n , q_n) puis (a_n , c_n) .

Voici la table que l'on obtient ainsi:

x_n	y_n	a_n	c_n
3	2	20	29
17	12	696	985
99	70	23 660	33 461
577	480	803 760	1 136 689
3 363	2 378	27 304 196	38 613 965

Ces valeurs correspondent à celles du tableau de la page 8 pour les valeurs *paires* de n.

2) $a = p^2 - q^2$, $b = 2pq$ et $c = p^2 + q^2$

avec $b - a = 1$

cette fois $(p-q)^2 - 2q^2 = -1$

et en posant encore

$$\begin{cases} x = p - q \\ y = q \end{cases}$$

il vient $x^2 - 2y^2 = -1$

C'est une équation de PELL du type (16 bis) avec $A = 2$.

(1 ; 1) est la plus petite solution de cette équation.

Je suis alors conduit au tableau suivant:

x_n	y_n	a_n	c_n
1	1	3	5
7	5	119	169
41	29	4 059	5 741
239	169	137 903	195 025
1 393	985	4 684 659	6 625 109

Ces valeurs correspondent à celles du tableau de la page 8 pour les valeurs *impaires* de n.

Pour terminer, voici une autre approche arithmétique du problème :

Désignons par a, $a+1$ et $a+r$ les côtés du triangle rectangle pseudo-isocèle.

Nous avons $$a^2 + (a+1)^2 = (a+r)^2$$

ou encore $$a^2 - 2a(r-1) - (r^2-1) = 0$$

équation du second degré qui admet une solution *positive* :

$$\Delta' = (r-1)^2 + r^2 - 1 = k^2$$

ou encore $$2r(r-1) = k^2$$

pour qu'il en soit ainsi, il existe deux nombres λ et μ tels que

soit $$r = \lambda^2 \quad \text{et} \quad r-1 = 2\mu^2$$

et $$\lambda^2 - 2\mu^2 = 1$$

soit $$r = 2\lambda^2 \quad \text{et} \quad r-1 = \mu^2$$

et $$\mu^2 - 2\lambda^2 = -1$$

nous retrouvons bien les deux équations de PELL.

7. Est-il besoin de conclure ?

Le lecteur qui aura eu la *patience* et peut-être le *plaisir* (qui sait après tout ?) de me suivre jusque là aura sans doute de lui-même tiré des conclusions.

Ce que je peux dire, c'est que Pierre GAGNAIRE est souvent revenu me voir et parfois, je lui faisais état de l'avancement des choses ou des impasses: il n'a jamais été surpris, tout lui semblait naturel, jusqu'au jour où voulant mettre un point final à ce papier je l'ai entendu dire: "*je n'aurais pas pensé qu'on pouvait tirer tant de choses intéressantes de cette "petite situation*".

Pour ma part, ce qui me semble utile sur le plan de la pédagogie et de la didactique mathématique, c'est qu'au départ, nous avons une situation *très simple et ouverte*, permettant dans une première étape une attitude *d'expérimentateur* et petit à petit vient la nécessité de faire des *mathématiques* et cela dans plusieurs directions convergentes.

Trouver et présenter à nos élèves de tels sujets de recherche, fera qu'ils auront de la mathématique une vue saine et seront à même de comprendre que cette science est belle et bien une science qui vit.

Lyon, le 3 juin 1977

Au moment de mettre sous presse, Maurice CAUSSE me signale *que nous sommes tous, et sans doute heureusement, passés à côté de la solution la plus simple :*

$$2a^2 + 2a + 1 - c^2 = 0$$

$$4a^2 + 4a + 1 - 2c^2 = -1$$

ou

$$(2a + 1)^2 - 2c^2 = -1$$

ainsi $(2a + 1)$ et c sont les coefficients de $(1 - \sqrt{2})^{2p+1}$ et il ajoute que *ce procédé de transformation est exactement celui utilisé par Bhaskârâ* (XIIème siècle) *pour traiter l'équation.*

$$4a^2 x^2 + 4ab\,x + 4ac = 0$$

$$(2ax + b)^2 + 4ac - b^2 = 0$$

etc...
