Inversion algébrique

par Jean de BIASI, Université Paul Sabatier, Toulouse.

La forme élémentaire du problème de l'inversion algébrique est basée sur le résultat suivant dit

Théorème d'inversion. *Si* $\Phi_n = \{\varphi^{(0)}(x), \varphi^{(1)}(x), ..., \varphi^{(n)}(x)\}$ *et* $\Psi_n = \{\psi^{(0)}(x), \psi^{(1)}(x), ..., \psi^{(n)}(x)\}$ *sont deux familles de* $n+1$ *polynomes sur* $\mathbb{C}$ *telles que pour tout* $m \in [0, n]$, $d^0\, \varphi^{(m)}(x) = d^0\, \psi^{(m)}(x) = m$ *alors :*

· *Il existe une matrice carrée inversible* $A = (a_l^m)_{0 \leqslant l,m \leqslant n}$ *telle que*

$$\begin{pmatrix} \varphi^{(0)}(x) \\ \varphi^{(1)}(x) \\ \vdots \\ \varphi^{(n)}(x) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \psi^{(0)}(x) \\ \psi^{(1)}(x) \\ \vdots \\ \psi^{(n)}(x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \psi^{(0)}(x) \\ \psi^{(1)}(x) \\ \vdots \\ \psi^{(n)}(x) \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \varphi^{(0)}(x) \\ \varphi^{(1)}(x) \\ \vdots \\ \varphi^{(n)}(x) \end{pmatrix}$$

· *Pour les deux familles de nombres* $\{a^{(0)}, a^{(1)}, ..., a^{(n)}\}$, $\{b^{(0)}, b^{(1)}, ..., b^{(n)}\}$ *les deux relations suivantes sont équivalentes*

$$\begin{pmatrix} a^{(0)} \\ a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(n)} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} b^{(0)} \\ b^{(1)} \\ \vdots \\ b^{(n)} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} b^{(0)} \\ b^{(1)} \\ \vdots \\ b^{(n)} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} a^{(0)} \\ a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(n)} \end{pmatrix}$$

La première partie résulte du fait que pour $\mathcal{P}_n$, espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des polynomes de degré inférieur ou égal à n, toute famille de $n+1$ polynomes $\{e^{(0)}(x), e^{(1)}(x), ..., e^{(n)}(x)\}$ telle que pour tout $m \in [0, n]$, $d^0(e^{(m)}(x)) = m$ en constitue une base. La deuxième partie en découle aussitôt.

Un exemple classique est celui des

Nombres de STIRLING

● *Les nombres de Stirling de première espèce* $s_{(m)}^{(n)}$ sont définis par l'égalité

$$[x]^{(n)} = x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1) = \sum_{m=0}^{n} s_{(m)}^{(n)}\, x^m$$

[N.B. Par rapport à la notation habituelle les indices ont été inversés (donc $s_{(m)}^{(n)}$ ici représente s_n^m de la littérature classique) pour que dans l'écriture matricielle l'indice inférieur soit indice de colonne et l'indice supérieur, indice de ligne].

La valeur explicite de $s_{(m)}^{(n)}$ en fonction des naturels m et n n'est pas connue mais les valeurs évidentes $s_{(0)}^{(n)} = 0$, $s_{(n)}^{(n)} = 1$ (pour tout $n \geqslant 0$), $s_{(m)}^{(n)} = 0$ pour tout $m > n$ et la relation $s_{(m)}^{(n+1)} = s_{(m-1)}^{(n)} - n\, s_{(m)}^{(n)}$ qui découle de

$$\sum_{m=n}^{n+1} s_{(m)}^{(n+1)} x^m = [x]^{(n+1)} = [x]^n (x-n) = (x-n) \sum_{m=0}^{n} s_{(m)}^{(n)} x^m$$

$$= \sum_{m=0}^{n+1} \left(s_{(m-1)}^{(n)} - n\, s_{(m)}^{(n)} \right) x^m$$

permettent d'en construire le tableau de proche en proche.

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	- 1	1	0	0	0	0	0	0	0
3	2	- 3	1	0	0	0	0	0	0
4	- 6	11	- 6	1	0	0	0	0	0
5	24	-50	35	-10	1	0	0	0	0
6	-120	274	-225	85	-15	1	0	0	0
7	720	-1764	1624	-735	175	-21	1	0	0
8	-5040	13068	-13132	6769	-1960	322	-28	1	0
9	40320	-109584	118124	-67284	22449	-4536	546	-36	1

(*Procédé de construction*

Chaque nombre est égal à celui qui est au-dessus à gauche diminué du produit par son indice de ligne de celui qui est au-dessus.)

Les familles de polynomes $\left([x]^{(0)}=1, [x]^{(1)}=x, \ldots, [x]^{(n)}\right)$ et $\left(x^0 = 1, x^1 = x, \ldots, x^n\right)$ vérifient les hypothèses du théorème d'inversion, par suite la matrice précédente (qui peut s'écrire à un ordre n quelconque), dite *première matrice de Stirling* et notée s, est inversible, son inverse permettant d'exprimer les polynomes $x^0, x^1, \ldots, x^n$ en fonction des polynomes

$[x]^{(0)}, [x]^{(1)}, \dots, [x]^{(n)}$. La détermination de s^{-1} va nous conduire à un rappel sur

● *Les nombres de Stirling de deuxième espèce.* Ces nombres notés généralement S_n^m mais que nous écrirons $S\{^n_m\}$ (toujours en vue de l'écriture matricielle) sont définis pour $m \leqslant n$ par l'égalité: $S\{^n_m\}$ = nombre de partitions d'un ensemble de n éléments en m parties et pour $m > n$ par $S\{^n_m\} = 0$.

Ces nombres sont étudiés dans de nombreux articles (voir en particulier [2]). $S\{^n_m\}$ est en particulier lié au nombre $\sigma\{^n_m\}$ (attention encore à l'interversion des indices) des applications surjectives d'un n-ensemble sur un m-ensemble par la relation $\sigma\{^n_m\} = m!\, S\{^n_m\}$.

De l'égalité :

$$\sigma\{^n_0\} + C_m^1\ \sigma\{^n_1\} + C_m^2\ \sigma\{^n_2\} + \dots + C_m^m\ \sigma\{^n_m\} = m^n$$

on déduit :

$$\sum_{p=0}^{m} p!C_m^p\ S\{^n_p\} = m^n \quad \text{soit} \quad m^n = \sum_{p=0}^{m} S\{^n_p\}\,[m]^{(p)}$$

La dernière relation ayant lieu pour

$$m = 0,\ m = 1,\ \dots,\ m = n$$

implique l'égalité suivante vraie pour tout x :

$$x^n = \sum_{m=0}^{n} S\{^n_m\}\,[x]^{(m)}$$

Par suite $s^{-1} = S = (S\{^n_m\})$ où *S est la deuxième matrice de Stirling* (celle des nombres de Stirling de deuxième espèce).

Théorème. *Les première et deuxième matrices de Stirling (limitées à un ordre n quelconque) sont inverses l'une de l'autre.*

Ainsi par exemple pour l'ordre 5 il vient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 11 & -6 & 1 & 0 \\ 24 & -50 & 35 & -10 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 15 & 25 & 10 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Applications. En général le problème se présente ainsi : on connaît les nombres $a^{(0)}, a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$ et la matrice inversible A ; on cherche la valeur des nombres $b^{(0)}, b^{(1)}, \ldots, b^{(n)}$. Il s'agit donc de déterminer A^{-1} inverse de A.

En voici trois exemples faisant tous appel à la matrice π de Pascal, déjà rencontrée dans [2], cette matrice étant celle des C_n^p qui seront désormais notés $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ (conformément à un certain classicisme d'ailleurs) encore une fois pour respecter les conventions d'écriture matricielle.

La considération des polynomes $\varphi^{(m)}(x) = (1+x)^m$ et $\psi^{(m)}(x) = x^m$ d'où

$$\varphi^{(m)}(x) = \sum_{i=0}^{m} \begin{pmatrix} m \\ i \end{pmatrix} \psi^{(i)}(x) \text{ et } \psi^{(m)}(x) = (x+1-1)^m = \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \begin{pmatrix} m \\ i \end{pmatrix} \varphi^{(i)}(x)$$

montre que pour

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \binom{2}{1} & 1 & 0 & \ldots & \\ 1 & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{alors} \quad \pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & \binom{3}{1} & -\binom{3}{2} & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \\ (-1)^n & (-1)^{n-1}\binom{n}{1} & (-1)^{n-2}\binom{n}{2} & \ldots & & 1 \end{pmatrix}$$

et que par suite

> *Si des nombres $a^{(0)}, a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}$ et $b^{(0)}, b^{(1)}, \ldots, b^{(n)}$ sont tels que*
>
> *pour tout* $m \in [0,n] : a^{(m)} = \sum_{i=0}^{m} \begin{pmatrix} m \\ i \end{pmatrix} b^{(i)}$
>
> *alors pour tout* $m \in [0,n] : b^{(m)} = \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \begin{pmatrix} m \\ i \end{pmatrix} a^{(i)}$

. *Applications surjectives.*

Le nombre $\sigma_{(m)}^{(n)}$, des applications surjectives d'un n-ensemble dans un m-ensemble (voir [2]) est tel que $\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \sigma_{(i)}^{(n)} = m^n$. On en déduit donc le résultat déjà connu suivant :

$$\boxed{\sigma_{(m)}^{(n)} = \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \binom{m}{i} i^n}$$

. *Nombre $d^{(n)}$ des dérangements de $[1,n]$.*

Un dérangement de l'intervalle de naturels $[1,n]$ est une permutation de cet intervalle telle que pour tout $x \in [1,n]$ on ait $\varphi(x) \neq x$. Si l'on note $d_{(i)}^{(m)}$ le nombre de permutations de $[1,m]$ ayant exactement i points fixes, une étude élémentaire montre que, quel que soit $m \in \mathbf{N}$:

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} d_{(i)}^{(m)} = m\,!$$

Il en découle aussitôt :

$$\boxed{d^{(n)} = d_{(0)}^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i\,! = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i} \binom{n}{i} (n-i)\,! = n\,! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}}$$

(N.B. Ce problème, très classique, se rencontre en probabilités sous le nom de "problème des chapeaux" — Noter que $\dfrac{d^{(n)}}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{e}$)

. *Nombre $r^{(n)}$ des recouvrements d'un n-ensemble.*

E_n étant un n-ensemble (card (E) = $n \geqslant 1$), un recouvrement de E_n est une famille (nécessairement non vide) de parties *non vides* de E_n dont la réunion est E_n. Plus généralement, A étant une partie de E_n, un recouvrement de A est une famille de parties non vides de A dont la réunion est A.

Parmi les familles non vides de parties non vides de E_n il en existe $r^{(n)}$ qui recouvrent E_n, $\binom{n}{n-1} r^{(n-1)}$ qui recouvrent les parties de E_n à $n-1$ éléments ... $\binom{n}{n-i} r^{(n-i)}$ qui recouvrent les parties de E_n à $n-i$ éléments, etc...

Or, une famille non vide de parties non vides de E_n est un élément de $\mathcal{P}'(\mathcal{P}'(E_n))$ (où d'une façon générale $\mathcal{P}'(E)$ représente l'ensemble des parties non vides de E) dont le cardinal est $2^{(2^n-1)}-1$. On en déduit l'égalité :

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} r^{(i)} = 2^{(2^n-1)} - 1$$

qui par inversion donne :

$$\boxed{r^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} 2^{(2^i-1)} - 1 .}$$

(N.B. Pour les recouvrements d'un ensemble fini, voir surtout [4]).

Bibliographie

[1] BERGE, Principes de Combinatoire, Dunod.
[2] de BIASI, Applications Surjectives, Bulletin A.P.M. 304.
[3] BOURBAKI, Livre I, Théorie des Ensembles, Hermann.
[4] COMTET, Analyse Combinatoire, PUF, Publications CR.
[5] FRASNAY, Thèse (Problèmes combinatoires), Bulletin A.P.M. 271.
[6] GLAYMANN, Un aspect de la combinatoire, Bulletin A.P.M. 277.
[7] RIORDAN, Combinatorial identities, Wiley.
[8] RYSER, Mathématiques Combinatoires, Dunod.