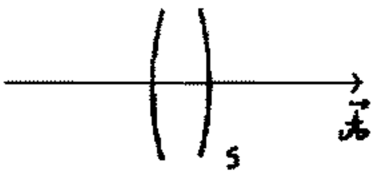
Optique matricielle

par Lucienne et Jean CHIARUTTINI, Nevers

Que devient l'enseignement de l'optique géométrique de nos jours ? Doit-on, pour démontrer les formules des lentilles minces, utiliser les triangles semblables alors que cette notion a disparu de l'enseignement du premier cycle ? Non, bien sûr ; l'algèbre linéaire fournit une réponse élégante à ce problème. Plus généralement, l'algèbre linéaire trouve dans l'optique géométrique un champ d'application tout indiqué et l'optique géométrique y gagne en clarté et simplicité.

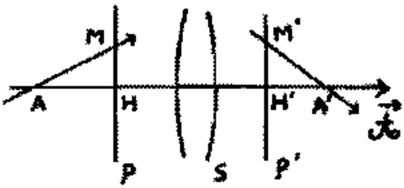
L'exposé suivant, loin d'être complet, insiste sur quelques points importants de l'optique géométrique en relation avec les méthodes d'algèbre linéaire enseignées dans le deuxième cycle.

I Conditions de Gauss



Un système optique centré S possède un axe de révolution $\vec{\mathcal{A}}$.
Chaque rayon lumineux considéré coupe l'axe $\vec{\mathcal{A}}$ et fait un petit angle avec lui.

Deux plans de référence fixes P et P′, distincts ou confondus, permettent de repérer les rayons incidents et sortants.



rayon incident :

$\overline{HM} = y$

$\text{mes}(\vec{\mathcal{A}}, \overrightarrow{AM}) = u \mod \pi \qquad \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix}$

rayon sortant :

$\overline{H'M'} = y'$

$\text{mes}(\vec{\mathcal{A}}, \overrightarrow{A'M'}) = u' \mod \pi \qquad \begin{pmatrix} y' \\ u' \end{pmatrix}$

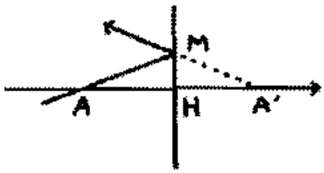
Les conditions d'approximation de Gauss font que l'application $\begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y' \\ u' \end{pmatrix}$ est linéaire, de telle sorte que :

$$\begin{pmatrix} y' \\ u' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

T est la matrice de transfert du système S .

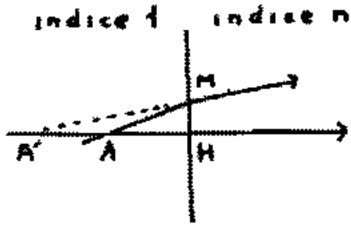
II Quelques exemples

1. *Miroir plan* $P = P'$



$$y = y'$$
$$u = -u'$$
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. *Dioptre plan* $P = P'$



Les conditions d'approximations linéaires sont telles que l'on confond la mesure de l'angle et son sinus.
La loi de la réfraction s'écrit :

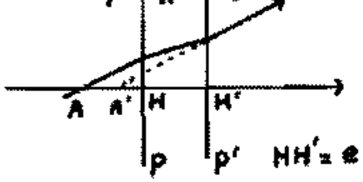
$$u \times 1 = u' \times n$$

D'autre part :

$$y = y'$$

d'où $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$

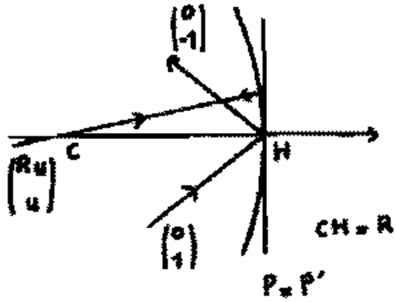
3. *Lame à faces parallèles* $P \neq P'$



$$u' = u$$
$$y' = y + \frac{e}{n}u$$
$$T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{e}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

III Principe et méthode

1. *Exercice*



Trouver la matrice de transfert d'un miroir sphérique.

Pour déterminer une matrice (2,2), il suffit de connaître l'image de deux vecteurs bien choisis, par exemple :

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \overset{T}{\longmapsto} \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}Ru\\u\end{pmatrix} \overset{T}{\longmapsto} \begin{pmatrix}Ru\\u\end{pmatrix}$$

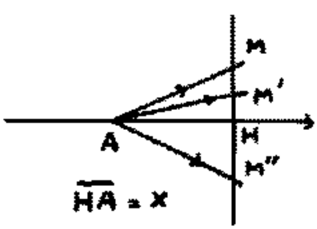
La matrice est donc :

$$T = \begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{2}{R} & -1\end{pmatrix}$$

2. *Remarque*

Un rayon lumineux est un vecteur $\begin{pmatrix}y\\u\end{pmatrix}$. Si u ou y sont trop grands, la méthode linéaire subsiste, seulement elle ne correspond plus à la réalité physique. L'utilisation de la méthode linéaire détermine sa propre limite. Elle correspond à la réalité physique dans le cadre de l'approximation de Gauss.

3. *Image d'un point lumineux*



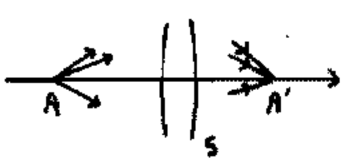
Comment est défini l'ensemble des rayons issus d'un point source A d'abscisse x ?

C'est l'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix}y\\u\end{pmatrix}$ tels que :

$$y = -xu$$

C'est donc une droite vectorielle (cf. point projectif).

Une application linéaire conservant les droites vectorielles, l'image d'un point source A par le système s de matrice T est un point lumineux A'.

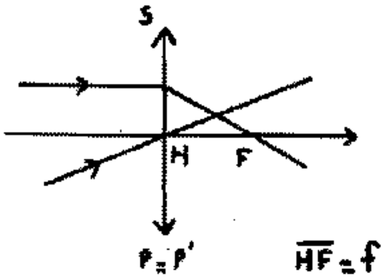


Les points A et A' sont dits *conjugués*.

IV Lentilles minces

1. *Matrice de transfert*

Une lentille mince est un assemblage de deux dioptres généralement sphériques. Pour déterminer la matrice de transfert, on peut déterminer la matrice de transfert de chaque dioptre puis faire le produit matriciel. Il est aussi instructif de procéder expérimentalement.



Un rayon passant par le centre n'est pas dévié :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} \xmapsto{T} \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}$$

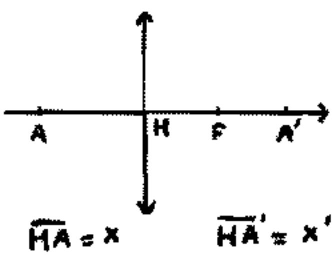
Tout rayon parallèle à l'axe passe par le point F appelé *foyer image* :

$$\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \xmapsto{T} \begin{pmatrix} y \\ -\dfrac{y}{f} \end{pmatrix}$$

D'où la matrice :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

2. *Relation de conjugaison*



Le point lumineux A est le plan vectoriel défini par :

$$y = -ux$$

Son image par S est le point A' tel que :

$$y' = -u'x'$$

D'autre part la matrice T donne :

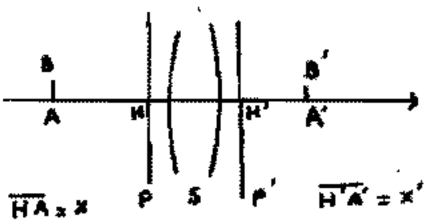
$$y' = y$$
$$u' = u - \frac{y}{f}$$

On déduit la relation de conjugaison :

$$\frac{1}{x'} = \frac{1}{x} + \frac{1}{f}$$

V Aplanétisme

Bien entendu, un système optique ne se contente pas de donner l'image d'un point lumineux situé sur l'axe mais plus généralement d'objets, de petites dimensions, centrés sur l'axe et perpendiculaires à lui. On obtient des images convenables si le système est aplanétique. Pour déterminer ces images, il suffit alors d'appliquer les méthodes linéaires aux points situés en dehors de l'axe.



Le point lumineux B est déduit du point A par la translation de vecteur $\begin{pmatrix}\delta\\0\end{pmatrix}$.

Mathématiquement, le point B est une variété linéaire.

L'image par une application linéaire d'une variété linéaire est une variété linéaire. On peut trouver une translation de vecteur colinéaire à $\begin{pmatrix}\delta\\0\end{pmatrix}$ qui fait passer de $A' = T(A)$ à $B' = T(B)$.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "T"] & B' \\ A \arrow[u, "t"] \arrow[r, "T"] & A' \arrow[u, "t'"'] \end{tikzcd}$$

Si $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, et si A est l'ensemble des rayons $\begin{pmatrix} ux \\ -u \end{pmatrix}$, l'image de B est donnés par :

$$T\begin{pmatrix} ux+\delta \\ -u \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} ux \\ -u \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} \delta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'x' \\ -u' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta a \\ \delta c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u'-\delta c)x' \\ -(u'-\delta c) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (a+cx')\delta \\ 0 \end{pmatrix}$$

On déduit que l'image de l'objet AB par le système S est A'B'. Le grandissement est donc :

$$G = \frac{(a+cx')\delta}{\delta} = a + cx'$$

Dans le cas d'une lentille mince où $a = 1$ et $c = -\dfrac{1}{f}$, on a $G = \dfrac{x'}{x}$.

Soulignons, encore une fois, pour terminer, que tout ceci correspond à la réalité physique si le système S et l'objet AB ont les qualités voulues (aplanétisme, conditions de Gauss, petites dimensions).

Références :

Bulletin de l'Union des Physiciens, n° 444 et n° 531.
Optique, Annequin et Boutigny (Vuibert).