Une nouvelle axiomatique de la géométrie; pourquoi ?

par G. SPAAK, Joyeuse

A — Petite histoire en guise d'introduction

Depuis l'adaptation, par Hilbert, de l'axiomatique d'Euclide, on a assisté à une floraison d'axiomatiques de la géométrie. Fallait-il rajouter encore un élément à cet ensemble, à peine dénombrable ?

Cette question ne m'avait guère effleuré, avant que deux élèves de seconde m'aient été envoyés, pour un rattrapage en mathématiques ... Prudemment, je commençai par la théorie des ensembles, l'algèbre, la construction de R ... Au moment où il fallut aborder la géométrie, je me plongeai dans les axiomatiques (une bonne dizaine) que je pus me procurer. Aucune d'elles ne m'apparut satisfaisante :

* D'emblée, ou presque, j'écartai les axiomatiques de type "*algébrique*", dans lesquelles la géométrie apparaît comme un corollaire de l'algèbre. Constructions et démonstrations y sont pourtant simples, élégantes, irréprochables ; mais les risques de perdre le support intuitif m'apparaissent énormes : faut-il introduire les espaces vectoriels, les transformations orthogonales, voire même l'ensemble des nombres réels, sans référence à ce qui leur a servi de point de départ, de prototype ?

* Les autres axiomatiques proposées pour la géométrie me semblent présenter, pour l'enseignement, deux inconvénients majeurs :

1 — Les *notions primitives* utilisées (droites, plans ; parfois, les distances, ou même des notions plus élaborées) me semblent peu intuitives ; elles me paraissent plutôt devoir être définies, que posées a priori.

2 — L'*appareil axiomatique* utilisé me semble assez lourd : les axiomes utilisés sont nombreux, souvent composites, et parfois très loin de l'intuition.

Par une journée d'inconscience de juin 1970, j'entrepris donc ce travail ; bien qu'il soit loin d'être terminé, il me semble, aujourd'hui, parvenu à un stade utilisable (tandis que les deux élèves dont je parlais achèvent leurs études supérieures !) ; j'en présente ici un résumé substantiel (les enseignants plus spécialement intéressés pourront, par l'A.P.M.E.P., obtenir les références de publications plus complètes).

B — Les idées directrices

* Je me suis essentiellement appuyé sur des expériences pédagogiques pour le primaire (et, tout spécialement, de Dienès), comportant une expérimentation sur la *topologie*, sur les *déplacements et symétries*, sur la *mesure des longueurs* (cf. "Exploration de l'espace et pratique de la mesure", Dienès, O.C.D.L.).

Mon travail tente de combler le hiatus entre cet enseignement (qui me semble fournir de très bonnes bases intuitives) et le secondaire, dans l'espoir de parvenir à un enseignement de la géométrie cohérent, depuis le Cours Préparatoire jusqu'à l'Université.

* Au départ, j'avais retenu les principes suivants :

— Géométrie dans l'espace, plutôt que géométrie plane (c'est l'espace dont nous avons une expérience physique ; le plan en est une abstraction).
— Termes primitifs : l'espace (considéré comme ensemble de points) ; les déplacements (à partir de l'expérience du mouvement d'un corps solide).
— Définir toutes les autres notions (longueurs, droites, plans, parallélisme et perpendicularité, etc...).
— Développer l'algèbre (applications ; groupes ; corps ; espaces vectoriels, etc...) parallèlement à la géométrie, qui fournira un bon nombre d'illustrations de ces notions algébriques, et une occasion de les utiliser.
— Introduire, par la géométrie plutôt que par l'algèbre, les ensembles numériques usuels : **Z**, **Q**, **R** et C.

* En fait, après avoir développé une axiomatique tridimensionnelle basée sur ces principes, j'en ai aussi cherché, sur une suggestion de Monsieur Magnier, une adaptation pour la géométrie plane. Celle-ci présente les avantages habituels sur la géométrie spatiale : commodité pour faire et pour comprendre les figures ; allègement de la théorie, de certaines définitions ; simplification considérable de bon nombre de démonstrations, etc... Elle fournit, en outre, une introduction beaucoup plus naturelle à l'ensemble des nombres complexes.

En revanche, elle perd un des gros avantages (à mon sens) de l'axiomatique spatiale, en présupposant, comme terme primitif, le PLAN, dont la perception intuitive ne me semble nullement immédiate.

C — Les bases de départ

En *géométrie spatiale*, les *termes primitifs* sont :

— l'espace, E , considéré comme un ensemble de points.
— l'ensemble, Δ , des déplacements (qui sont des applications de E dans E). Je représente par Δ_{ab} l'ensemble des déplacements qui conservent a et b ; par Δ^* , l'ensemble des déplacements propres (et autres conventions analogues).

Il me semble utile, avant d'énoncer les *définitions* et *axiomes*, d'en préciser le contenu intuitif. Les déplacements fournissent une définition facile des *longueurs* (donc, aussi, des *sphères* : D2) : les bipoints (a,b) et (c,d) définissent la même longueur ssi ("si, et seulement si") l'un peut se transporter sur l'autre (cf. D1, fig. 2).

La définition des *translations* (D5), à partir des longueurs ("la distance d'un point à son transformé est constante"), est facile, mais perd, malheureusement, une partie du support intuitif ; à cet égard, il eût été préférable de pouvoir définir les translations comme des "déplacements qui conservent les directions".

Mais on aura aussi besoin de *comparer les longueurs*, ce qui suppose une sorte de "mesure". A cette fin, j'ai utilisé les *chaînes d'arpentage* (cf. D3), dont chaque maillon est rigide, et dont la souplesse ne vient que des articulations (à condition qu'il y ait au moins deux maillons ; c'est pourquoi j'impose n > 1 dans D3).

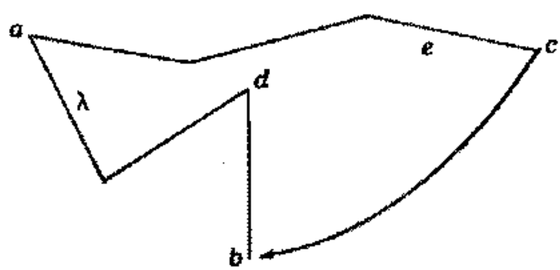

Figure 1

La définition D4 signifie : "b est plus près de a que c ($\widehat{abc}$) ssi toute chaîne joignant a à c peut se refermer sur a et b" ; ainsi (Fig. 1) $\widehat{abc}$ est vraie, mais non $\widehat{acd}$ (deux maillons de longueur

λ ne suffisent pas à atteindre c), ni même $\widehat{ace}$ (dans ce cas, il faut utiliser une autre longueur de maillons ; par exemple, 6 maillons d'un centimètre suffisent pour joindre a à e, mais il en faut 7 pour joindre a à c).

On peut alors définir la *frontière* d'un ensemble F : d'un point de la frontière, on a très peu à bouger pour se trouver dans F, et très peu, pour se trouver hors de F ; la définition classique, D6, de l'adhérence d'un point à un ensemble, n'intervient que comme relais technique dans cette définition.

Définitions :

D1

On dit que le bipoint *(a,b) se transporte sur (c,d)* ssi il existe un déplacement qui amène a en c, et b en d :

$(a,b) \to (c,d)$ ssi $\exists \quad \varphi \ : \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$

Figure 2

D2

On appelle *sphère de centre a, passant par b*, l'ensemble

$S_{ab}(a) = \{ d : (a,b) \to (a,d) \}$

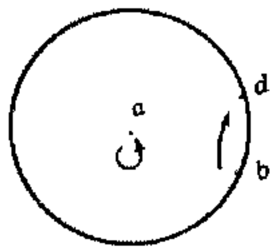

Figure 3

D3

Si $n > 1$, on dit que $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ *est une chaîne* ssi chaque "*maillon*" (a_{i-1}, a_i), se transporte sur le suivant, c'est-à-dire ssi, pour $O < i < n$, $(a_{i-1}, a_i) \to (a_i, a_{i+1})$.

n est le *nombre* de cette chaîne ; on dit que cette chaîne *joint a_0 à a_n*.

D4

On dit que "*a et c cernent b*" (on écrit $\widehat{abc}$) ssi pour toute chaîne $(a, c_1, \ldots, c_n)$ joignant a à c, il existe une chaîne de même nombre : $(a, b_1, \ldots, b_n)$, joignant a à b, telle que $(a, c_1) \to (a, b_1)$.

D5

$\mathcal{T}$ est une *translation* ssi c'est un déplacement tel que $\mathcal{T} \ : \begin{matrix} a & b \\ a' & b' \end{matrix}$ implique $(a, a') \to (b, b')$ (Fig. 4). On désigne par $\mathcal{T}$ l'ensemble des translations.

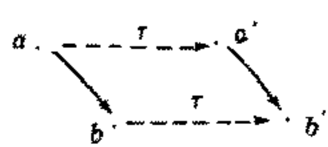

Figure 4

D6

a adhère à F ssi, pour tout point c, distinct de a, a et c cement au moins un point de F.

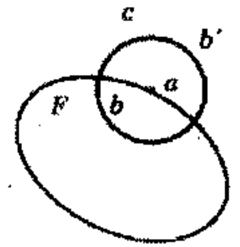

Figure 5

D7

a est un *point frontière* de F ssi a adhère à F et à son complémentaire, E-F (Fig. 5). On appelle "*Frontière de F*" l'ensemble, *Fr(F)*, des points-frontière de F.

D8

a, b, c alignés ssi a = b ou si tout déplacement qui conserve a et b conserve aussi c.

a, b, c trépied dans le cas contraire.

On peut alors énoncer les axiomes. Intuitivement, A1 (axiome "*des mouvements successifs*") signifie : le résultat de deux mouvements successifs peut être considéré comme résultat d'un seul mouvement. L'existence d'un déplacement inverse ("remettre un objet à sa place") d'un déplacement donné est aussi intuitive ; mais elle est déductible des autres axiomes.

A2 (axiome du *pivot*) affirme que beaucoup de déplacements conservent deux points (rotations autour de ces deux points).

A3 signifie qu'on peut *retourner*, sur lui-même, un triangle isocèle (par une rotation d'un demi-tour autour de son axe de symétrie).

A4 se passe de commentaire.

A5 est l'axiome de *connexité* de E. Intuitivement, il se justifie ainsi : si on se déplace d'un point de F à un point extérieur à F (fig. 6), il vient un moment où on sort de F ; à ce moment, on est en un point-frontière de F.

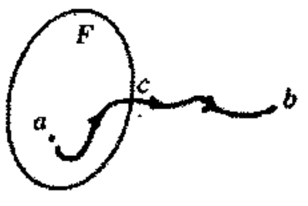

Figure 6

A6 (*"axiome du chien"*) signifie : si $a \neq b$, de tous les points d'une sphère de centre a, l'un est plus près de b que tous les autres.

A7 est l'axiome du *tabouret* (si vous bougez un tabouret, l'un, au moins, des trois pieds change de place).

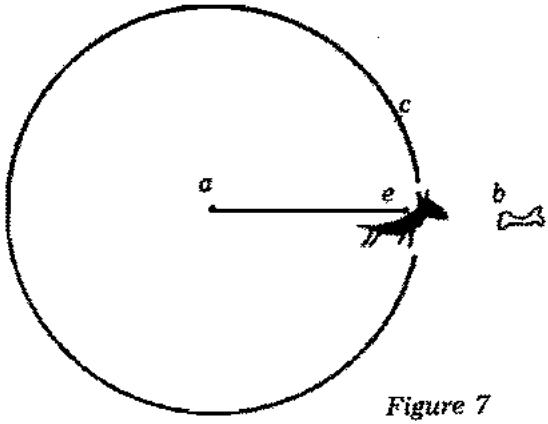

Figure 7

Figure 8

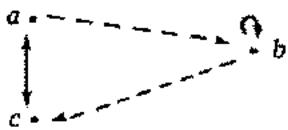

Figure 9

Axiomes :

A1
La composée de deux déplacements est un déplacement.

A2 (Fig. 8)
Il existe deux points distincts, a et b, et plus de deux déplacements conservant a et b ; autrement dit : $\exists\ a, b \quad a \neq b$ et $\mathrm{Card}\,(\Delta_{ab}) > 2$.

A3 (Fig. 9)
Si (a,b) se transporte sur (b, c), alors il existe un déplacement qui conserve b et échange a et c.

A4
Il existe une translation, unique, qui amène a en b (points donnés quelconques).

A5 (Fig. 6)
Si a appartient à F, mais non b, alors F admet un point frontière.

A6 (Fig. 7)
Si $a \neq b$, si S est une sphère de centre a, il existe, sur S, un point unique, e, tel que, pour tout point c de S, b et c cernent e.
Autrement dit : $(\exists\,!\, e \in S)\ c \in S \Rightarrow \widehat{bec}$

A7
Aucun déplacement propre ne conserve les trois points d'un trépied. Autrement dit, si a, b, c trépied et $\varphi \neq \iota$, alors $\varphi \in \Delta_{abc}$.

En *géométrie plane*, les seules différences (à part le remplacement de "sphère" par "cercle" dans D2 et A6) portent sur :

— l'axiome du pivot, qui est remplacé par l'axiome du pliage (ici, un seul déplacement propre conserve deux points) ;
— l'inutilité de l'axiome du tabouret (qui reste vérifié, mais perd tout intérêt).

D — La démarche mathématique

Longueurs ; combinaisons d'applications ; transmuées :

Définition de la *longueur* ab (classe d'équivalence de (a, b) pour la relation "se transporte sur") ; des *isométries* ; tout déplacement est une isométrie ; la réciproque, fausse en géométrie spatiale, est *vraie* en géométrie plane, avec cette axiomatique (il faudra distinguer entre "déplacements directs" et "déplacements inverses"). Une partie algébrique, un peu technique, et inhabituelle en géométrie élémentaire (nécessaire, ici, à cause de l'importance des déplacements dans cette axiomatique) ; notamment, définitions des *transmuées*. Définition du *vecteur* $\vec{ab}$ (à partir de A4) ; image d'un vecteur par un déplacement (la transmuée d'une translation est une translation).

Comparaison des longueurs :

Définition (à partir de D4) ; réflexivité, transitivité (mais ce n'est que beaucoup plus tard que je pourrai démontrer que cette comparaison des longueurs est un ordre total). La longueur nulle est inférieure à toutes les autres (une conséquence inattendue : l'existence des *triangles équilatéraux*).

Démonstration (à l'aide de l'axiome de connexité) du théorème d'*enchaînement* : si λ est une longueur non nulle, on peut joindre deux points quelconques par une chaîne de maille λ.

Droites et demi-droites :

Définition des *droites* (à partir de l'alignement) ; des *demi-droites*, à l'aide de l'axiome du chien : la demi-droite a, b est l'ensemble des points e (Fig. 7) quand on fait varier le rayon de la sphère ; elle est une partie de la droite a, b. E n'est pas une droite.

Par deux points passe une droite unique ; problème du report d'une longueur sur une droite. Toute droite ou demi-droite est un ensemble infini. Définition, unicité du *milieu* c d'un bipoint (a, b) (l'existence sera démontrée plus tard) ; caractérisation par l'égalité $\overrightarrow{ac} = \overrightarrow{cb}$.

Symétries ; droites perpendiculaires :

Définition des *symétries axiales* ; involutions propres conservant une droite, point par point ; existence et unicité d'une symétrie d'axe D. Définition et quelques propriétés de la perpendicularité de deux droites.

Définition des *symétries centrales* ; ce sont des isométries mais pas des déplacements (sauf en géométrie plane). Définition des *symétries planes* (produit d'une symétrie axiale et d'une symétrie centrale), des *plans*. En géométrie spatiale, c'est seulement à ce stade que je démontre que tout déplacement est inversible. En géométrie plane, définition des rotations, des médiatrices ; et théorème : toute isométrie est un déplacement.

Le groupe des vecteurs ; homothéties :

Démonstration du théorème : "les translations forment un *groupe commutatif*". Définition de *parallélisme* et *orthogonalité* de droites, de plans ou de vecteurs.

Définition des *homothéties* de centre e (si $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{cd}$, $\overrightarrow{a'b'} = \overrightarrow{c'd'}$ et e, a, a' sont alignés). Toute homothétie non constante est bijective ; tout bipoint admet un milieu ; la comparaison des longueurs est un ordre total. Définition de la projection d'un point sur une droite, sur un plan. Si e, a, b sont alignés (et $e \neq a$), il existe une homothétie de centre e qui transforme a en b ; si deux plans sont parallèles, toute droite qui coupe l'un coupe l'autre.

Le corps des réels ; l'espace vectoriel des translations :

Chaque homothétie induit une transformation (appelée *nombre réel*) dans l'ensemble des vecteurs ; à l'homothétie h correspond le nombre réel x : je note $x\vec{u}$ le transformé de $\vec{u}$ par h. R est un corps commutatif, et $\mathcal{T}$, un espace vectoriel (de dimension 2 ou 3, suivant le cas) sur R. Choix d'une *unité de longueur* ; définition et propriété du *produit scalaire* ; théorème de Pythagore.

Définition des réels positifs (à partir des demi-droites) ; de l'ordre usuel dans R. Caractérisation de R par cette relation d'ordre : ordre total, compatible, avec le théorème de la borne inférieure.

Cela suffit pour démontrer l'identité (jusqu'à isomorphisme) avec la géométrie euclidienne classique ; je rajoute cependant quelques rapides compléments sur les *distances* ; les *sommes de longueurs*, la *mesure* d'une longueur en fonction d'une unité (avec l'application à l'expression décimale des nombres réels) ; la construction de l'ensemble C des complexes (en géométrie plane).

E — Possibilités d'utilisation pédagogique

* Ce travail est bien déblayé du point de vue *mathématique* ; en revanche, du point de vue *pédagogique*, presque tout reste à faire, à inventer, à expérimenter. Je vois cependant quelques éléments de réflexion :

* Au niveau du *primaire*, une expérimentation des principaux outils et des principales notions (topologie ; déplacements ; translations ; comparaison de longueurs par chaîne d'arpentage...) pourrait fournir aux élèves des *bases intuitives* solides, ainsi qu'une série de *résultats-clés* (notamment les axiomes).

* Au secondaire, les problèmes sont plus complexes :
— géométrie plane, ou géométrie spatiale ?
— comment assurer une bonne synchronisation des enseignements d'algèbre et de géométrie ?
— à quel stade, et jusqu'à quel point, utiliser la démarche axiomatique ?

* On pourrait grandement faciliter le démarrage, en *admettant* ("à crédit") certains théorèmes, tels que (par exemple) :
— tout déplacement admet un déplacement inverse ;
— tout bipoint admet un milieu ;
— deux translations quelconques commutent ;
— si e, a, b sont alignés (et $e \neq a$), il existe une homothétie de centre e qui transforme a en b.

Les occasions de démontrer ces théorèmes seraient alors à rechercher dans le second cycle.

F — Etude mathématique de ces axiomatiques :

* Tous les axiomes de l'une, ou l'autre, de ces axiomatiques sont vérifiés en géométrie euclidienne plane (avec l'ensemble des

isométries) ou tridimensionnelle (avec l'ensemble des déplacements). On est donc assuré de la *non-contradiction* de ces deux axiomatiques (sous réserve de celle de la théorie des ensembles).

* J'ai pu démontrer l'*indépendance* de chaque axiome de l'axiomatique plane. Pour l'axiomatique *tridimensionnelle*, je n'ai pas encore pu démontrer l'indépendance de A6 (“*axiome du chien*”), et j'ai même de sérieux doutes à ce sujet ; je sais déjà que cet axiome peut être remplacé (au prix d'un alourdissement considérable de la théorie) par un axiome beaucoup plus faible, tel que : “pour toute longueur, il existe une longueur strictement supérieure” ; ou même : “quels que soient a et b, a et b cernant a”.

Il est à noter que la plupart des modèles utilisés pour les démonstrations d'indépendance sont très simples ; certains d'entre eux pourraient éventuellement être utilisés, *dès le secondaire*, pour illustrer le mécanisme de ces démonstrations d'indépendance. Par exemple, la géométrie tridimensionnelle vérifie toute l'axiomatique plane, sauf l'axiome du *pliage* : celui-ci est donc indépendant des autres.

* On pourrait aussi rechercher des variantes axiomatiques moins rigides, susceptibles, par exemple, de définir les espaces hilbertiens réels (supprimer l'axiome du tabouret et celui du pivot, qui jouent le rôle d'axiomes de dimension...), ou d'autres structures de type géométrique dignes d'intérêt.