2

ETUDES

Base magique

Par Jacques PINAUD, Robert DOMAIN, et Pascal MONSELLIER, IREM d'Orléans

T.J. Fletcher (1) disait en 1972 ne pas connaître le théorème général concernant la dimension de l'*espace vectoriel réel des matrices magiques d'ordre* n. En fait, Chambadal et Ovaert l'obtiennent en exercice (2). En voici une autre démonstration, qui permet en outre de déterminer facilement une base de cet espace vectoriel.

Rappelons la définition de "matrice magique" : Une matrice carrée réelle d'ordre n est magique si et seulement si les sommes des éléments de chaque ligne, de chaque colonne et des deux diagonales sont égales.

A. **Quelques cas particuliers :**

A. 1 Ordre 1 — Toute matrice $M = (a)$ (a réel) est magique — L'espace vectoriel engendré est de dimension 1 (isomorphe à $\mathbb{R}$).

A. 2 Ordre 2 — La matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ (a,b,c,d réels) est magique si et seulement si

$$a+b = c+d = a+c = b+d = a+d = b+c.$$

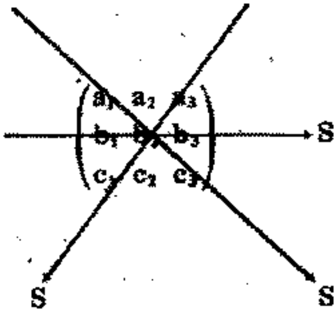
On conclut aisément que M est magique si et seulement si elle s'écrit : $M = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$. L'espace engendré est de dimension 1.

---

(1) in "L'Algèbre Linéaire par ses applications" CEDIC p. 19

(2) in "Algèbre Linéaire et algèbre tensorielle" DUNOD p. 469 exercice n° 5.

A.3 **Ordre 3** — La matrice $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ est magique si et seulement si les sommes des éléments de chaque ligne, de chaque colonne, et de chaque diagonale sont égales. Soit S cette somme commune. La somme des éléments de la seconde ligne et des deux diagonales vaut donc $3S$.



Donc

$$(a_1+b_2+c_3)+(a_3+b_2+c_1)+(b_1+b_2+b_3) = 3S$$

Si nous faisons apparaître la première et la troisième colonnes (de somme S) dans cette égalité, on a :

$$3b_2+(a_1+b_1+c_1)+(a_3+b_3+c_3) = 3S$$

$$3b_2 = S$$

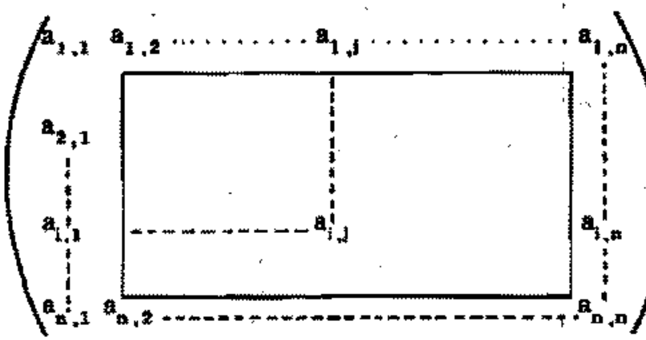
$$\text{et } b_2 = \frac{S}{3}$$

Le choix du terme central b_2 (obtenu en supprimant dans la matrice les éléments du "bord") détermine donc la somme S. On pourrait démontrer que l'espace vectoriel considéré est de dimension 3. Nous allons plutôt généraliser cette remarque pour déterminer la dimension dans le cas général.

B. Matrice magique d'ordre n ($n > 3$).

B. 1 Soit M une matrice carrée d'ordre n. Nous noterons par des lettres grecques les *suites* d'éléments, et par des lettres latines la *somme* de ces suites d'éléments.

M =



Posons : $\Lambda_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,j}, \dots, a_{i,n})$ ième ligne

$\Gamma_j = (a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{i,j}, \dots, a_{n,j})$ jème colonne

$\Delta_1 = (a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3}, \dots, a_{i,i}, \dots, a_{n,n})$ 1ère diagonale

$\Delta_2 = (a_{1,n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{i,n+1-i}, \dots, a_{n,1})$ 2ème diagonale

Posons :

$L_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$ somme des éléments de la ième ligne

$C_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$ somme des éléments de la jème colonne.

$D_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$ somme des éléments de la 1ère diagonale.

$D_2 = \sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1-i}$ somme des éléments de la 2ème diagonale.

Enfin, considérons les sommes des lignes, des colonnes et des diagonales précédentes *privées de leurs éléments extrêmes* ; à savoir :

$$l_i = \sum_{j=2}^{n-1} a_{i,j} \; ; \; c_j = \sum_{i=2}^{n-1} a_{i,j} \; ; \; d_1 = \sum_{i=2}^{n-1} a_{i,i} \; ; \; d_2 = \sum_{i=2}^{n-1} a_{i,n+1-i}$$

(ces sommes existent car $n \geqslant 3$)

Avec ces notations, nous pouvons dire que M est une matrice magique d'ordre n si et seulement s'il existe un nombre S tel que :

$$L_1 = L_2 = \dots = L_n = C_1 = C_2 = \dots = C_n = D_1 = D_2 = S$$

Posons pour finir : $s = d_1 + d_2 + l_2 + \dots + l_{n-1}$

| s est donc la somme de toutes les lignes et des diagonales de la matrice obtenue en enlevant à M les éléments du "bord".

B.2 Si M est magique, on a alors :

$$D_1 + D_2 + L_2 + L_3 + \dots + L_{n-1}$$

$$= (a_{1,1} + d_1 + a_{n,n}) + (a_{1,n} + d_2 + a_{n,1}) + \sum_{i=2}^{n-1} (a_{i,1} + l_i + a_{i,n})$$

Le premier membre valant n.S (puisque M est magique), on trouve :

$$n.S = \sum_{i=1}^{n} a_{i,1} + (d_1 + d_2 + \sum_{i=2}^{n-1} l_i) + \sum_{i=1}^{n} a_{i,n}$$

$$n.S = C_1 + s + C_n$$

Comme $C_1 = C_n = S$: $n\,S = 2\,S + s$ $\boxed{s = (n-2)\,S}$

Ce premier résultat généralise celui du A.3., pour lequel n vaut 3, et s vaut 3 b_2 (dans la notation du A 3) puisque, la matrice obtenue en enlevant à M ses "bords" se réduisant à (b_2), la somme des lignes et des diagonales de cette matrice vaut

$$s = b_2 + b_2 + b_2 \quad !$$

C. **PROBLEME** : Considérons une matrice m *quelconque* d'ordre (n—2). Existe-t-il une matrice magique M d'ordre n obtenue en "bordant" m ? Si l'on pose comme précédemment $s = d_1 + d_2 + \sum_{i=2}^{n-1} l_i$, en prenant pour m les notations de la figure, pour qu'une telle matrice M existe, il est nécessaire que $S = \dfrac{s}{n-2}$ (cf B).

S est donc déterminé.

$$m' = \begin{pmatrix} a_{2,2} & \cdots & a_{2,i} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{3,2} & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,i} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,i} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,i} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & a_{3,2} & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & & a_{n-1,i} & & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,i} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Les 4n—4 coefficients cherchés, à savoir :

— ceux de la 1ère ligne : $a_{1,j}$ ($j \in \{1,\ldots,n\}$)

— ceux de la nième ligne : $a_{n,j}$ ($j \in \{1,\ldots,n\}$)

— ceux de la 1ère colonne : $a_{i,1}$ ($i \in \{2,\ldots,n-1\}$)

— ceux de la nième colonne : $a_{i,n}$ ($i \in \{2,\ldots,n-1\}$)

doivent satisfaire les 2n + 2 équations :

$L_i = S$; $C_j = S$; $D_1 = S$; $D_2 = S$ (pour $i \in \{1,\ldots,n\}$ et $j \in \{1,\ldots,n\}$).

RESOLUTION : Choisissons *arbitrairement* (2n—4) coefficients parmi les 4n—4 cherchés, de la manière suivante :

$a_{1,j}$ quelconques pour $j \in \{1,\ldots, n-1\}$

$a_{i,1}$ quelconques pour $i \in \{2,\ldots, n-2\}$

Il reste 2n coefficients inconnus, à savoir :

— ceux de la dernière ligne : $a_{n,j}$ pour $j \in \{1,\ldots,n\}$

— ceux de la dernière colonne : $a_{i,n}$ pour $i \in \{1,\ldots,n-1\}$

— le coefficient $a_{n-1,1}$ de la première colonne

$$M = \begin{pmatrix}
\mathit{a}_{1,1} & \mathit{a}_{1,2} & \mathit{a}_{1,3} & \mathit{a}_{1,n-1} & \mathrm{a}_{1,n} \\
\mathit{a}_{2,1} & \mathrm{a}_{2,2} & \mathrm{a}_{2,3} & \mathrm{a}_{n,n-1} & \mathrm{a}_{2,n} \\
\cdot & \cdot & & \cdot & \\
\cdot & \cdot & & \cdot & \\
\cdot & \cdot & & \cdot & \\
\cdot & \cdot & & \cdot & \\
\mathit{a}_{n-2,1} & \mathrm{a}_{n-2,2} & & & \\
\boxed{\mathrm{a}_{n-1,1}} & \mathrm{a}_{n-1,2} & & \mathrm{a}_{n-1,n-1} & \boxed{\mathrm{a}_{n-1,n}} \\
\boxed{\mathrm{a}_{n,1}} & \mathrm{a}_{n,2} & \cdots\cdots & \mathrm{a}_{n,n-1} & \boxed{\mathrm{a}_{n,n}}
\end{pmatrix}$$

en italique : coefficients arbitraires

en frappe normale : coefficients de m

↗ : coefficients déterminés par les équations.

La condition de "magicité" de M permet de *déterminer* aisément d'une manière *unique* :

— ***presque tous ceux de la dernière colonne*** : car chaque ligne Λ_i doit être telle que :

$$L_i = a_{i,1} + l_i + a_{i,n} = S$$

donc $a_{i,n} = S - a_{i,1} - l_i$ (pour $i \in \{1,\dots,n-2\}$).

— ***presque tous ceux de la dernière ligne*** : car chaque colonne Γ_j doit être telle que $C_j = a_{1,j} + c_j + a_{n,j} = S$

donc $a_{n,j} = S - a_{1,j} - c_j$ (pour $j \in \{2,\dots,n-2\}$).

Il reste à déterminer : $a_{n-1,1}$; $a_{n,1}$; $a_{n-1,n}$; $a_{n,n}$ (encadrés sur la figure) qui doivent vérifier les six équations :

$$L_{n-1} = S \;;\; L_n = S \;;\; C_1 = S \;;\; C_n = S \;;\; D_1 = S \;;\; D_2 = S$$

— *dans* Δ_1 : $a_{n,n}$ peut être déterminé car

$$D_1 = S \quad \text{donc} \quad a_{n,n} = S - a_{1,1} - d_1$$

— *dans* Δ_2 : $a_{n,1}$ peut être déterminé car

$$D_2 = S \quad \text{donc} \quad a_{n,1} = S - a_{1,n} - d_2$$

— *dans* Γ_1 : $a_{n-1,1}$ peut être déterminé car

$$C_1 = S \quad \text{donc} \quad a_{n-1,1} = S - \sum_{i=1}^{n-2} a_{i,1} - a_{n,1}$$

— *dans* Γ_n : $a_{n-1,n}$ peut être déterminé car

$$C_n = S \quad \text{donc} \quad a_{n-1,n} = S - \sum_{i=1}^{n-2} a_{i,n} - a_{n,n}$$

Il suffit à présent de vérifier si les conditions $L_{n-1} = S$ et $L_n = S$ sont satisfaites. Or, on a :

$$D_1 + D_2 + L_2 + \dots + L_{n-2} + L_{n-1} = C_1 + C_n + s = S + S + (n-2)S \;\; (\text{car } s = (n-2)S)$$

Comme $D_1 = D_2 = L_2 = \dots = L_{n-2} = S$, on trouve :

$$(n-1)S + L_{n-1} = n.S \quad \text{donc :} \quad L_{n-1} = S.$$

De même :

$$L_1 + L_2 + \dots\dots\dots + L_{n-1} + L_n = C_1 + C_2 + \dots + C_n = nS$$

Comme $L_1 = L_2 = \dots L_{n-1} = S$, on a : $(n-1)S + L_n = nS$

$$\text{donc} \quad L_n = S.$$

CONCLUSION : La matrice **M** obtenue est magique.

Les termes inconnus arbitraires à partir desquels on a calculé les derniers coefficients inconnus sont au nombre de :

$(n-2)^2$ [coefficients de m]

$+ (n-1)$ [coefficients de la 1ère ligne]

$+ (n-3)$ [coefficients restants de la 1ère colonne].

Comme $(n-2)^2 + (n-1) + (n-3) = n^2 - 2n$, on conclut que :

Une matrice d'ordre n est entièrement déterminée par la donnée de $(n^2 - 2n)$ nombres réels arbitraires.

D'où le :

> *THEOREME :*
>
> L'espace vectoriel réel des matrices magiques d'ordre n est, pour $n \geqslant 3$, de dimension $n^2 - 2n$.

D. APPLICATIONS

D. 1 La méthode précédente permet la construction d'une base "canonique" des espaces vectoriels considérés. Il suffit, dans la zone des coefficients arbitraires, de les choisir tous nuls sauf un qu'on égale à 1, et de compléter la matrice par la méthode décrite.

Exemple : Si n = 3 : La dimension de l'espace est 3.

$$S = \frac{s}{3-2} \quad \text{donc } S = s$$

Voici une base :

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Somme 0 car s = 0   *Somme 0* car s = 0   *Somme 3* car s = 3

Si n = 4 : La dimension de l'espace vectoriel est 16—8 = 8. La formule $S = \frac{s}{n-2}$ devient $S = \frac{s}{2}$.

Voici une base :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$S = s = 0$ $\qquad$ $S = s = 0$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$S = s = 0$ $\qquad$ $S = s = 0$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$s = 2$; $S = 1$ $\qquad$ $s = 2$; $S = 1$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$s = 2$; $S = 1$ $\qquad$ $s = 2$; $S = 1$

D.2 Si on note J_n l'espace vectoriel des matrices magiques d'ordre n, l'application $\left| \begin{array}{l} J_n \to \mathbf{R} \\ M \mapsto S \end{array} \right.$ qui, à la matrice magique M, associe sa somme S, est une forme *linéaire* (facile à vérifier). Le noyau de cette forme, ensemble des matrices magiques de somme nulle, est donc un hyperplan de dimension $n^2 - 2n - 1$.

CONCLUSION : L'ensemble $\overset{\circ}{J}_n$ des matrices magiques d'ordre n et de somme nulle est un espace vectoriel de dimension $n^2 - 2n - 1$.

Exemples :

Si $n = 3$, $\overset{\circ}{J}_3$ est de dimension 2. Les deux premiers vecteurs de la base proposée ayant une somme nulle, ils forment une base de $\overset{\circ}{J}_3$.

Si $n = 4$, $\overset{\circ}{J}_4$ est de dimension 7. Pour trouver une base de $\overset{\circ}{J}_4$, on peut prendre les quatre premiers vecteurs de la base proposée, et les compléter par trois vecteurs tels que l'ensemble des 7 vecteurs forme un système libre. On pourra choisir :

$$I = H - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad J = F - G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } K = E - F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

D.3 Le carré magique

$$\begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

de somme 34, que l'on trouve sur la gravure au burin "La mélancolie", d'Albrecht Dürer, s'exprime en fonction de la base précédente (cf D1) par :

$$16\,A + 3\,B + 2\,C + 5\,D + 10\,E + 11\,F + 6\,G + 7\,H$$

D.4 Le carré magique "chinois" $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ s'écrit dans la base (α, β, γ) du D.1 :

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$