

3

ETUDES

Les infiniment petits existent !

par J. BETREMA (*I.R.E.M. de Nantes*) et G. WALLET (*I.R.E.M. de Poitiers*)

Le calcul infinitésimal a présenté tout au long de son histoire une dualité de méthode : utilisation d'une part de quantités infiniment petites, élaboration d'autre part de procédés de démonstration permettant d'évacuer les mêmes quantités. Déjà l'oeuvre d'Archimède est marquée par ce trait caractéristique. Cependant l'aspect rigueur de la démonstration y est largement dominant et servira d'ailleurs de modèle à des générations de mathématiciens. Ce n'est qu'au XVII^e siècle que le calcul différentiel et intégral dégage peu à peu sa spécificité en même temps que semble s'imposer l'usage au moins géométrique de l'infiniment petit. Cette tendance est illustrée particulièrement par FERMAT, PASCAL, HUYGENS et BARROW. Dans la dernière partie de ce siècle, LEIBNIZ dégage partiellement l'infiniment petit de sa gangue géométrique et en fait un objet mathématique susceptible de s'intégrer à des calculs ; avec l'aide de cet outil, il va pouvoir reconnaître et isoler les concepts fondamentaux du calcul infinitésimal. Mais déjà la polémique commence à propos du statut de l'infinitésimal et des contradictions qui semblent régir son usage. A partir du XVIII^e siècle, l'histoire du calcul différentiel est marquée simultanément par un essor formidable (travaux d'EULER et de LAGRANGE) et par le rejet de ce qui avait permis son essor. BERKELEY dénonce de manière très violente l'extrapolation des opérations définies pour les grandeurs finies aux prétendus infiniment petits.

Alors qu'EULER utilise avec audace et souvent avec succès des quantités infinies, D'ALEMBERT, dans l'article de l'Encyclopédie consacré à la Différentielle, qualifie de métaphysique, d'obscur et inutile l'usage des quantités évanouissantes. Ainsi le titre même de l'ouvrage de LAGRANGE : "Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel, dégagé de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissants, de limites et de fluxions, et réduit à l'analyse des quantités finies". Cette tendance se renforce jusqu'à l'élaboration dans le courant du XIXe siècle de l'approche moderne de l'analyse avec les travaux de CAUCHY, BOLZANO et WEIERSTRASS. L'histoire semble alors avoir donné son verdict : l'infiniment petit n'a plus sa place dans l'édifice de l'analyse dont l'un des piliers est maintenant le concept de limite.

C'est en 1960 qu'un logicien américain, ABRAHAM ROBINSON, a l'idée d'utiliser un modèle non-standard pour valider la notion d'infiniment petit. La théorie qu'il met au point, nommée Analyse Non-Standard, est une véritable revanche posthume de LEIBNIZ. Il y est démontré qu'on peut reconstruire l'analyse classique en plongeant le corps des réels \mathbb{R} dans un corps non archimédien ${}^*\mathbb{R}$ dont certains éléments sont infiniment grands ou petits.

L'exposé qui suit, et qui s'appuie sur un article de VAN-OSDOL [7], donne une présentation élémentaire du corps ${}^*\mathbb{R}$ des réels non-standard. La simplicité des applications à l'analyse qui sont abordées ici permet d'éviter la démonstration préalable d'un théorème d'existence, dit théorème fondamental de l'analyse non-standard. Le lecteur intéressé trouvera dans [4], [5] et [6] une démarche opposée... et des applications plus riches.

Construction de ${}^*\mathbb{R}$

L'idée est, comme d'habitude, de faire le quotient de l'ensemble, noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, des suites de réels, par une relation d'équivalence.

On peut penser à prendre comme définition : $(x_n) \sim (y_n)$ si, et seulement si, les deux suites coïncident à partir d'un certain rang.

En d'autres termes, en appelant \mathcal{F} l'ensemble des parties $S \subset \mathbb{N}$ dont le complémentaire est fini, on aura par définition :

$$(1) \quad (x_n) \sim (y_n) \Leftrightarrow \{n \mid x_n \neq y_n\} \in \mathcal{F}$$

\mathcal{F} est ce qu'on appelle un *filtre* sur N , car :

- i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$
- ii) $S_1, S_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow S_1 \cap S_2 \in \mathcal{F}$
- iii) $S \in \mathcal{F}$ et $S \subset T \subset N \Rightarrow T \in \mathcal{F}$

La relation définie par (1) est réflexive (car $N \in \mathcal{F}$) et symétrique, et grâce à la propriété (ii) du filtre \mathcal{F} , elle est transitive ; c'est donc bien une relation d'équivalence.

De même, grâce à (ii), les opérations usuelles de somme et de produit de deux suites sont compatibles avec la relation d'équivalence (1). On peut donc définir une somme et un produit sur l'ensemble quotient. La classe $\bar{0}$ de la suite $(0, 0, \dots, 0, \dots)$ est élément neutre pour l'addition, et celle $\bar{1}$ de $(1, 1, 1, \dots, 1, \dots)$ est élément neutre pour le produit. La vérification des axiomes d'anneau est facile, mais il existe toujours des éléments non nuls sans inverse : par exemple :

Soit (a_n) la suite définie par :

$$a_n = 0 \text{ si } n \text{ est pair}$$

$$a_n = 1 \text{ si } n \text{ est impair}$$

On a : $(\overline{a_n}) \neq \bar{0}$, $\{(\overline{a_n})\}$ désigne la classe de (a_n) et pour toute suite (x_n) , on a :

$$(\overline{a_n}) (\overline{x_n}) = (\overline{a_n x_n}) \neq \bar{1}$$

puisque $|n | a_n x_n = 0 |$ est infini, d'où

$$|n | a_n x_n = 1 | \notin \mathcal{F}$$

De même, la relation d'ordre passe au quotient ; on a explicitement la définition suivante :

$$(\overline{x_n}) \leq (\overline{y_n}) \text{ si et seulement si : } \{n | x_n \leq y_n\} \in \mathcal{F}$$

Mais, nouvel inconvénient, l'ordre obtenu n'est pas total : on ne peut comparer $\bar{0}$ et la classe de la suite $(-1)^n$, puisque :

$$|n | 0 \leq (-1)^n | \notin \mathcal{F}$$

$$|n | (-1)^n \leq 0 | \notin \mathcal{F}$$

Les difficultés rencontrées seront levées si on peut remplacer le filtre \mathcal{F} par un filtre \mathcal{U} (avec $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$) tel que :

$$(iv) \text{ quelle que soit la partie } S \subset N : (S \in \mathcal{U}) \text{ ou } (\overline{S \in \mathcal{U}})^{(1)}$$

(1) \overline{S} désigne la partie complémentaire de S dans N .

Un filtre possédant la propriété (iv) est appelé un *ultrafiltre*. L'existence, pour tout filtre \mathcal{F} , d'un ultrafiltre \mathcal{U} tel que $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$, est une conséquence simple du lemme de Zorn, et donc de l'axiome du choix.

Dans la suite, \mathcal{U} désignera un ultrafiltre sur \mathbb{N} contenant le filtre \mathcal{F} des complémentaires des parties finies de \mathbb{N} . Par définition, ${}^*\mathbb{R}$ sera le quotient de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par \mathcal{U} , c'est-à-dire par la relation d'équivalence définie par :

$(x_n) \sim (y_n)$ si, et seulement si, $\{n \mid x_n = y_n\} \in \mathcal{U}$
(on appelle ${}^*\mathbb{R}$ un *ultraproduit*).

Il est à noter que ${}^*\mathbb{R}$ dépend de l'ultrafiltre \mathcal{U} choisi, et qu'en outre on peut seulement prouver l'existence de tels ultrafiltres, et non en construire.

Notation : Pour toute suite (x_n) de réels, nous noterons x sa classe modulo \mathcal{U} ; de même, y sera la classe de (y_n) , etc... ; x, y sont donc des éléments de ${}^*\mathbb{R}$, et par définition :

$$x = y \Leftrightarrow (x_n) \sim (y_n) \Leftrightarrow \{n \mid x_n = y_n\} \in \mathcal{U}$$

Par passage au quotient, on définira dans ${}^*\mathbb{R}$ une somme, un produit, et une relation d'ordre. ${}^*\mathbb{R}$ est alors un *corps totalement ordonné*, appelé *corps des réels non standard*. Vérifions seulement ici que les deux difficultés rencontrées précédemment tombent :

a) Tout élément non nul $x \in {}^*\mathbb{R}$ admet un inverse pour le produit. En effet par hypothèse :

$$\{n \mid x_n = 0\} \notin \mathcal{U}$$

Donc (propriété (iv) des ultrafiltres) : $\{n \mid x_n \neq 0\} \in \mathcal{U}$

et la suite y_n définie par :

$$\begin{cases} y_n = 1/x_n & \text{si } x_n \neq 0 \\ y_n = 0 & \text{(ou n'importe quel) sinon} \end{cases}$$

est bien telle que : $(x_n)(y_n) \sim (1, 1, 1, \dots)$.

b) Soit ${}^*\mathbb{P}$ l'ensemble des éléments strictement positifs de ${}^*\mathbb{R}$; ${}^*\mathbb{P}$ est défini par :

$$x \in {}^*\mathbb{P} \quad \text{si, et seulement si,} \quad \{n \mid x_n > 0\} \in \mathcal{U}$$

Montrons que pour tout élément $x \in {}^*\mathbb{R}$, nous avons :

$$x \in {}^*\mathbb{P} \quad \text{ou} \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad -x \in {}^*\mathbb{P}$$

et que ces trois cas s'excluent mutuellement (2).

Pour cela, considérons les trois ensembles :

$$J = \{n \mid x_n < 0\}, \quad K = \{n \mid x_n = 0\}, \quad L = \{n \mid x_n > 0\}$$

Ils forment une partition de \mathbb{N} , et, d'après la propriété (iv) des ultrafiltres, on voit facilement que l'un d'entre eux appartient à \mathcal{U} , et un seulement (l'intersection de deux d'entre eux est vide, et $\emptyset \notin \mathcal{U}$). C.Q.F.D.

Enfin, on plonge facilement \mathbb{R} dans ${}^*\mathbb{R}$ en identifiant le réel x et la classe de la suite (x, x, x, \dots) . Désormais \mathbb{R} désignera un sous-corps de ${}^*\mathbb{R}$; on appellera réels les éléments de \mathbb{R} , et réels non-standard les éléments de ${}^*\mathbb{R}$.

Infiniment petits et infiniment grands

Soit (x_n) une suite telle que : $\lim x_n = +\infty$

Cela signifie que, pour tout réel a , nous avons : $a < x_n$ à partir d'un certain rang, c'est-à-dire :

$$\{n \mid a < x_n\} \in \mathcal{F}$$

Or, par définition de \mathcal{U} , on a : $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$

Donc, pour tout réel a : $a < x$

Les réels non standard supérieurs en module à tout réel (ordinaire) sont dits *infiniment grands*. Notons que \mathcal{U} est "beau-coup plus gros" que \mathcal{F} , donc la condition :

$$\forall a \quad \{n \mid a < |x_n|\} \in \mathcal{U}$$

ne signifie pas que la suite $(|x_n|)$ tend vers $+\infty$. En d'autres termes, il y a "plus" d'infiniment grands que ceux auxquels on s'attendait : si $\lim |x_n| = +\infty$, alors x est un infiniment grand, mais la réciproque est fautive.

De même, on appelle *infiniment petits* les réels non standard inférieurs en module à tout réel strictement positif. Si $\lim (x_n) = 0$, x est donc infiniment petit mais la réciproque n'est pas vraie.

0 est le seul réel infiniment petit.

Si $dx > 0$ est un infiniment petit, et a un réel, l'intervalle $]a - dx, a + dx[$ comprend un seul réel, à savoir a , et l'intervalle $]dx, 2dx[$ ne comprend aucun réel.

(2) Comme en outre ${}^*\mathbb{P}$ est manifestement stable pour l'addition et la multiplication, il s'ensuit que ${}^*\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné.

On sait que \mathbb{R} est, à un isomorphisme près, le seul corps totalement ordonné vérifiant l'axiome de la borne supérieure. Dans ${}^*\mathbb{R}$ on trouve donc des parties majorées sans borne supérieure, par exemple l'ensemble I des infiniment petits. En effet, soit par l'absurde $a = \text{Sup } I$.

Si a est infiniment petit, nous avons : $2a \in I$, d'où contradiction car $a < 2a$; sinon : $\frac{a}{2}$ majore I , d'où encore contradiction, puisque a est le plus petit majorant de I .

Un élément $x \in {}^*\mathbb{R}$ est dit au contraire *fini* s'il existe un réel a tel que $|x| \leq a$. L'ensemble F des éléments finis de ${}^*\mathbb{R}$ est un anneau, dont l'ensemble I des infiniment petits est un idéal maximal (vérification facile). Donc F/I est un corps. Montrons qu'en fait F/I est isomorphe à \mathbb{R} , c'est-à-dire qu'on a le théorème :

Théorème 1

Tout élément fini x de ${}^*\mathbb{R}$ se décompose de façon unique sous la forme :

$$x = u + du$$

où u est un réel, et du un infiniment petit.

Démonstration

Par hypothèse, l'ensemble : $L = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq x\}$ est borné, puisque x est fini. Soit u la borne supérieure de L .

Montrons que $du = x - u \in I$

Soit ϵ un réel (ordinaire) strictement positif. Par définition de u , nous avons :

$$u - \epsilon \in L \quad \text{et} \quad u + \epsilon \notin L$$

$$\text{d'où : } u - \epsilon \leq x \quad \text{c'est-à-dire} \quad u - x \leq \epsilon$$

$$\text{et } u + \epsilon > x \quad \text{c'est-à-dire} \quad x - u < \epsilon$$

d'où au total :

$$|x - u| < \epsilon$$

Comme ceci est vrai pour tout réel ϵ strictement positif, on a bien :

$$du = x - u \in I$$

Enfin, soit une autre décomposition :

$$x = u' + du' \text{ avec } u' \in \mathbb{R}, du' \in I.$$

$$\text{On obtient } u - u' = du' - du \in I \cap \mathbb{R}$$

$$\text{d'où : } u = u' \text{ et } du = du' \text{ (C.Q.F.D.)}$$

Prolongements

Soit $X \subset \mathbb{R}$; on appellera $*X$ la partie de $*\mathbb{R}$ constituée des x tels que :

$$\{n \mid x_n \in X\} \in \mathcal{U}$$

Vu la définition du plongement de \mathbb{R} dans $*\mathbb{R}$, on a :

$$X \subset *X$$

De même, si f est une application $X \rightarrow \mathbb{R}$, on appellera

$$*f \quad \left| \begin{array}{l} *X \longrightarrow *R \\ x \longrightarrow y \end{array} \right.$$

l'application définie par :

$$y_n = f(x_n) \text{ si } x_n \in X$$

$$y_n = 0 \text{ (ou n'importe quoi) sinon}$$

On étendra de même les fonctions de plusieurs variables. On vérifiera que ces définitions ont un sens grâce à la propriété (ii) de \mathcal{U} : $S \in \mathcal{U}$ et $T \in \mathcal{U} \Rightarrow S \cap T \in \mathcal{U}$

On vérifiera aussi que l'on a bien : $x \in X \Rightarrow *f(x) = f(x)$

Exemples

1) Un élément de $*\mathbb{N}$, c'est-à-dire un *naturel non-standard*, est la classe d'une suite (x_n) telle que :

$$\{n \mid x_n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{U}$$

En particulier, comme $\mathbb{N} \in \mathcal{U}$, les éléments $x \in *\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall n : x_n \in \mathbb{N}$ sont des naturels non-standard.

La classe de $(1, 2, 3, \dots, n, \dots)$ est un naturel non-standard infiniment grand.

2) Si $+$ et \cdot désignent les opérations dans \mathbb{R} , $*+$ et $*$ sont bien, comme on pouvait s'y attendre, les opérations du corps $*\mathbb{R}$.

Par conséquent, si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est une fraction rationnelle, $*f$ est la fraction rationnelle correspondante $*X \rightarrow *\mathbb{R}$.

Théorèmes d'analyse

Nous allons traduire dans ${}^*\mathbf{R}$ un certain nombre de concepts d'analyse dans \mathbf{R} . Les traductions obtenues sont très satisfaisantes en ce sens qu'elles sont voisines de l'intuition ; mais il ne faut pas cacher une difficulté qui, mésestimée, conduirait à des paradoxes : la traduction dans ${}^*\mathbf{R}$ doit utiliser les prolongements ${}^*\mathbf{X}$, *f , etc... définis au paragraphe précédent, prolongements qui ne sont pas toujours aussi "simples" ou "naturels" que l'on pourrait espérer (cf. [2] pour des paradoxes).

Dans toute la suite, nous utiliserons la relation d'équivalence suivante dans ${}^*\mathbf{R}$: $x \sim y$ si, et seulement si, $x - y$ est un infiniment petit. On dira dans ce cas que x est *infiniment voisin* de y .

Soit $S : \begin{cases} \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R} \\ n \longmapsto S(n) \end{cases}$ une suite de réels.

Théorème 2

S converge vers le réel a si, et seulement si, pour tout naturel infiniment grand $\nu \in {}^*\mathbf{N}$, on a :

$${}^*S(\nu) \sim a$$

Autrement dit : S converge vers le réel a si et seulement si : $S(\nu)$ est infiniment voisin de a lorsque ν est un naturel infiniment grand (!).

*Démonstration **

a) Supposons que $\lim S(n) = a$. Soit ϵ un réel > 0 ; il existe $m \in \mathbf{N}$:

$$n > m \Rightarrow |S(n) - a| < \epsilon$$

Soit ν un naturel infiniment grand. Posons :

$$K = \{n \mid \nu_n \in \mathbf{N} \cap \{n \mid \nu_n \geq m\}\}$$

Par hypothèse $K \in \mathcal{U}$, et :

$$n \in K \Rightarrow |S(\nu_n) - a| < \epsilon$$

Donc

$$K \subset L = \{n \mid |S(\nu_n) - a| < \epsilon\}$$

Ceci prouve que $L \in \mathcal{U}$, d'où : $|{}^*S(\nu) - a| < \epsilon$

Ceci est vrai pour tout ϵ réel > 0 , donc ${}^*S(\nu) - a$ est infiniment petit.

b) Inversement, si S ne converge pas vers a , il existe un réel $\epsilon > 0$ et une suite croissante de naturels $\nu(n)$ tels que :

$$\forall n \mid |S(\nu(n)) - a| > \epsilon$$

ν est un naturel infiniment grand tel que : $|*S(\nu) - a| > \epsilon$, ce qui prouve que $*S(\nu)$ n'est pas infiniment voisin de a (C.Q.F.D.)

On démontrera de façon analogue le théorème suivant :

Théorème 3

$f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $a \in X$ si, et seulement si, pour tout $x \in *X$, nous avons :

$$x \sim a \Rightarrow *f(x) \sim f(a)$$

Applications

1) Soit X l'ensemble des réels non nuls, et f l'application

$$\left| \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 1/x \end{array} \right.$$

On vérifiera que $*X$ est l'ensemble des réels non standard différents de zéro, et $*f$ l'application

$$\left| \begin{array}{l} *X \longrightarrow *R \\ x \longmapsto 1/x \end{array} \right.$$

Soit $a \in X$. Montrons que f est continue en a . Soit da un infiniment petit :

$$\frac{1}{a + da} - \frac{1}{a} = - \frac{da}{a(a + da)}$$

est un infiniment petit (les infiniment petits forment un idéal dans l'ensemble des nombres finis) (C.Q.F.D. !).

2) Somme et produit de fonctions continues en a sont continues en a , car :

$$*(f + g) = *f + *g \quad \text{et} \quad *(fg) = (*f)(*g)$$

et la relation $y \sim z$ (y est infiniment voisin de z) est compatible avec l'addition et la multiplication !

Revenons au théorème 1, qui affirme que tout élément fini $x \in \mathbb{R}$ peut être décomposé de façon unique sous la forme :

$$x = u + du \quad \text{avec} \quad u \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad du \in I$$

On posera $u = R(x)$ ("partie réelle" de x).

On obtient alors les traductions intéressantes suivantes qu'on pourra chercher à démontrer (cf [7]) :

Théorème 4

$X \subset \mathbb{R}$ est fermé si, et seulement si,

$$\forall x \in {}^*X \quad (x \text{ fini} \Rightarrow R(x) \in X)$$

Théorème 5

$X \subset \mathbb{R}$ est ouvert si, et seulement si, pour tout réel $x \in X$ et tout infiniment petit $dx \in I$, nous avons : $x + dx \in {}^*X$

Théorème 6

$$X \subset \mathbb{R} \quad \mathcal{L}^* \parallel p \sim \# \parallel^* \setminus \mathcal{L}^*$$

$X \subset \mathbb{R}$ est compact si, et seulement si, tout élément $x \in {}^*X$ est fini et vérifie : $R(x) \in X$

On en déduit immédiatement que tout compact X est fermé. En outre X compact est borné (dans \mathbb{R}) ; sinon il existerait dans X une suite non bornée (x_n) , c'est-à-dire un infiniment grand $x \in {}^*X$.

Réciproquement, si $X \subset \mathbb{R}$ est borné (dans \mathbb{R}), *X ne comporte que des éléments finis ; donc un fermé borné est compact. Nous avons là une "démonstration non-standard" du théorème connu (dont la formulation n'utilise aucun terme non-standard) :

Théorème 7

$X \subset \mathbb{R}$ est compact si, et seulement si, X est fermé borné.

Autre exemple de démonstration non-standard :

Théorème 8

L'image continue d'un compact est un compact.

Démonstration

Soit X un compact de \mathbb{R} , $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, et $Y = f(X)$.

Soit $y \in {}^*Y$; il existe donc une suite (x_n) dans X telle que :

$$|n| y_n = f(x_n) \in \mathcal{U}$$

D'où :

$$y = {}^*f(x) \quad \text{et} \quad x \in {}^*X$$

Comme X est compact : $x = u + du$ avec $u \in X$, $du \in I$

Comme f est continue, le théorème 3 indique : ${}^*f(x) \sim f(u)$

En résumé : $y \sim f(u)$, ce qui prouve que y est fini, et que $R(y) = f(u) \in Y$.

Donc Y est compact.

Nous arrêterons là nos exemples d'analyse non-standard, car on pourrait continuer ainsi longtemps : dérivation, intégration, etc... On voit que les traitements non-standard des définitions et des démonstrations sont plus proches de l'intuition (peut être en sont-ils "infiniment voisins" ?).

L'analyse est une branche déjà très développée des mathématiques, et l'analyse non-standard n'y a pas apporté de révolution. Cependant, on lui doit déjà quelques résultats nouveaux et elle a permis de redémontrer de manière plus élégante de nombreux théorèmes.

Il est surtout remarquable de constater que le grand assainissement de l'analyse, opéré au milieu du XIXe siècle par l'éviction des infinitésimaux et le développement des " (ϵ, η) -raisonnements" ne découlait peut-être pas d'une nécessité logique.

Et plus tard, par un terrorisme intellectuel remarquable, ceux (entre autres les physiciens) qui ont continué à utiliser les infiniment petits ont été considérés avec mépris, et nous continuons à répandre cet état d'esprit. Et pourtant, l'élégance et la rapidité des méthodes infinitésimales auraient pu nous inquiéter....

Bien sûr la construction, présentée dans cet article, des réels non-standard, construction qui repose sur l'existence d'ultrafiltres, est impossible dans le système de pensée du 19e siècle ; c'est une construction de l'époque de la logique moderne et de la théorie des ensembles.

Mais il faudrait étudier si, sans *construire* le corps des réels non-standard, il n'était pas possible, dès le 19e siècle, de définir rigoureusement les *règles d'emploi* des infiniment petits et infiniment grands. Les mathématiciens du 19e siècle, malgré des erreurs, avaient une bonne pratique de l'emploi de ces notions ; en outre la conviction s'est développée chez eux (cf [8]) que la source de la validité des mathématiques se situe dans la *manipulation réglée de symboles*.

Il faudrait donc analyser les raisons qui les ont poussés à abandonner les infiniment petits et à *exclure* cette notion plutôt qu'à la *régler*. Et si l'on admet l'hypothèse d'une nécessité intrascientifique à cette exclusion, faut-il reconnaître ici un exemple de *refoulement* que suppose l'émergence d'un certain type de *rationalité*, ici l'analyse ? De toute façon on tient certainement là un cas exemplaire, ni trop proche, ni trop lointain, où peut être vue

et étudiée l'influence du contexte idéologique d'une époque (en particulier social, politique et philosophique) sur le développement des mathématiques.

Enfin, la réponse à la question : qu'est-ce qui, en profondeur, a produit, en mathématiques, l'abandon des infiniment petits ? peut amener à une nouvelle réflexion sur la pédagogie de l'initiation à l'analyse. Quand on sait, par expérience, la difficulté qu'il y a à fonder cette dernière sur les " (ϵ, η) -arguments" ...

BIBLIOGRAPHIE

L'ouvrage fondamental de ROBINSON [6] présente $\ast R$ à partir de concepts généraux de logique, rappelés dans un premier chapitre. On aura un aperçu de cette démarche en consultant l'article de LIGHTSTONE [2], [1] et [8] ne traitent pas des réels non-standard, mais sont des études épistémologiques sur le développement du calcul infinitésimal.

- [1] BADIOU A. : *LA SUBVERSION INFINITESIMALE*. Cahiers pour l'Analyse. N° 9. Editions du Seuil.
- [2] LIGHTSTONE A.H. : *INFINITESIMALS*. The American Mathematical Monthly. Vol. 79, N° 3, 1972.
- [3] LUXEMBURG W.A.J. : *APPLICATIONS OF MODEL THEORY TO ALGEBRA, ANALYSIS AND PROBABILITY*. HOLT, RINEHART and WINSTON. New-York 1969
- [4] LUXEMBURG W.A.J. : *WHAT IS NONSTANDARD ANALYSIS ?* The American Mathematical Monthly. Vol. 80, N° 6, Part II (1973)
- [5] MACHOVER M. et HIRSHFELD J. : *LECTURES ON NONSTANDARD ANALYSIS*. Lectures Notes in Mathematics 94 ; 1969.
- [6] ROBINSON A. : *NONSTANDARD ANALYSIS*. North-Holland, Amsterdam 1966.
- [7] VAN OSDOL D.H. : *TRUTH WITH RESPECT TO AN ULTRAFILTER OR HOW TO MAKE INTUITION RIGOROUS*. The American Mathematical Monthly. Vol. 79, N° 4, 1972.
- [8] C. HOUZEL, J.L. OVAERT, P. RAYMOND, J.J. SANSUC : *PHILOSOPHIE ET CALCUL DE L'INFINI*. Maspéro, 1976.