4

MATHÉMATIQUE ET GÉOGRAPHIE

Continuité et uniformité

Un exemple de pédagogie donné par Emile BOREL

par Roger CUCULIÈRE

On sait que certaines fonctions se définissent naturellement comme fonctions *multiformes*, c'est-à-dire associant, à chaque valeur de départ, non pas une mais plusieurs images [1]. L'exemple le plus simple est la "fonction" $x \longmapsto \pm\sqrt{x}$ qui à x réel positif associe les deux réels dont le carré est x : on dit que cette fonction admet deux *déterminations*. Dans le domaine réel, le signe fournit un principe de choix entre ces deux déterminations, et on appelle $\sqrt{x}$ celle qui est *positive*. On a alors une fonction au sens habituel du terme, une fonction *uniforme*, qui de plus est continue.

Il en va tout autrement dans le domaine complexe. La "fonction" $z \longmapsto \sqrt{z}$ associe à *tout* complexe ses *deux* racines carrées. Elle est définie sur C tout entier. On peut toujours trouver un moyen de distinguer entre ses deux déterminations. Par exemple, on peut munir C d'une relation d'ordre qui en fasse un groupe additif totalement ordonné. Comme les deux racines carrées de z sont opposées, une seule des deux sera "positive", c'est-à-dire supérieure ou égale à 0, et c'est celle-là que l'on pourra appeler

(1) Evidemment, le mot "fonction" n'est pas tout à fait pris ici dans le sens consacré par les programmes du Secondaire.

$\sqrt{z}$. Mais on peut montrer que cette fonction, qui sera alors une bonne fonction au sens usuel de ce terme, ne peut être continue sur C tout entier. On a alors le choix entre deux qualités qui sont toutes deux précieuses pour une fonction : continuité et uniformité.

Diverses solutions peuvent être trouvées pour surmonter cette contradiction. On peut définir la fonction sur une partie de C et non sur C tout entier, mais alors on sacrifie une autre qualité de la fonction, sa possibilité de donner $f(z)$ *pour tout z*. On peut aussi considérer que l'ensemble d'arrivée n'est pas le plan complexe, mais une "surface de Riemann" à feuillets superposés et raccordés, chacun recevant une détermination de la fonction (2). Comme on le verra ci-après, cela n'est possible que si la fonction a un nombre *fini* de déterminations.

*

* *

Les lignes qui suivent sont extraites d'un petit livre de E. Borel et R. Deltheil écrit en 1931 : *La Géométrie et les Imaginaires* (Albin Michel éditeur). Publié dans une collection nommée "Bibliothèque d'éducation par la science", cet ouvrage s'adressait "aux esprits curieux de mathématiques, sans être spécialisés". C'est ce que l'on pourrait appeler un ouvrage de vulgarisation, mais de cette *bonne* vulgarisation qui, sans sacrifier le contenu, donne à comprendre au plus grand nombre possible.

Il traite d'une partie des mathématiques généralement jugée difficile : la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe. L'extrait que nous avons choisi est consacré plus précisément à la contradiction entre la continuité et l'uniformité d'une fonction, saisie sur l'exemple de la fonction logarithme complexe et de la fonction $z \longmapsto \sqrt[3]{z}$.

Mais il signale aussi une fonction très usuelle, que chacun connaît, et pour laquelle on a dû faire le choix de sacrifier la continuité à l'uniformité : c'est l'heure qu'il est à un instant donné, en fonction du point choisi sur le globe terrestre.

(2) On trouvera des éclaircissements à ce sujet dans tout ouvrage élémentaire consacré aux fonctions analytiques, par exemple "Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes" de Henri Cartan (Hermann éd.). On y verra aussi que la sphère (Σ) dont parle le texte de E. Borel, c'est la sphère de Riemann obtenue à partir du plan complexe par projection stéréographique de pôle ω, ce point ω correspondant au point à l'infini du plan complexe.

Nous avons voulu présenter ce texte pour montrer qu'un grand esprit comme Emile Borel, un de ceux qui ont fait avancer la science, ne dédaignait pas, lorsque c'était utile, de recourir aux exemples les plus concrets pour faire comprendre les mathématiques — sans pour autant les falsifier.

Cet exemple qui vient de loin, qui vient de haut, mérite encore aujourd'hui d'être suivi.