

# Des échiquiers en tous genres

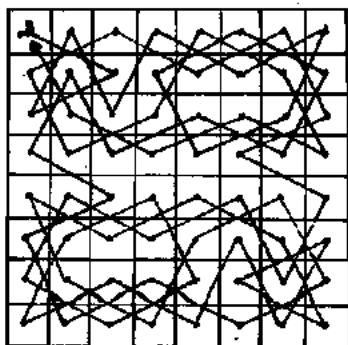
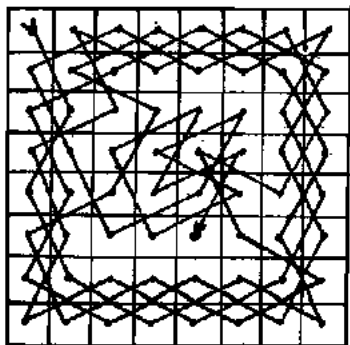
par Jean de BIASI, Université Paul Sabatier, Toulouse

Sur l'échiquier classique, simple quadrillage  $8 \times 8$  où les cases sont alternativement blanches et noires, quelques mathématiciens parfois prestigieux se sont penchés. Ils ont imaginé ou généralisé quelques problèmes, certains relativement simples, d'autres dont la solution n'est que très récente ou encore inconnue. En voici quelques-uns.

## 1) LE PARCOURS DU CAVALIER (Euler - de Moivre - Vandermonde)

*"Un cavalier peut-il parcourir les 64 cases d'un échiquier  $8 \times 8$  en passant une fois et une seule par chaque case ?"*

La réponse à ce problème [qui est la recherche de l'existence d'un chemin (fig. 1) ou d'un circuit (fig. 2) hamiltonien sur un graphe] est affirmative et les solutions sont sans doute assez nombreuses.



**Question** - Existe-t-il un parcours du cavalier pour tout échiquier généralisé  $p \times q$  ?

L'auteur ne connaît pas la réponse mais une méthode de recherche pourrait consister à déplacer le cavalier vers la case d'où il contrôle le minimum de cases non visitées... (Berge dixit (1))

## 2) LE PARTAGE DE L'ÉCHIQUIER (Olympiades mathématiques 1974)

"On veut découper un échiquier  $8 \times 8$  en  $p$  rectangles en respectant les cases et les conditions supplémentaires suivantes :

- Chaque rectangle contient autant de cases blanches que de cases noires

- Si  $a_i$  est le nombre de cases blanches du  $i$ ème rectangle, alors  $a_1 < a_2 < \dots < a_p$ .

Déterminer la valeur maximale de  $p$  pour laquelle un tel découpage est possible et indiquer pour cette valeur de  $p$  toutes les suites  $a_1, a_2, \dots, a_p$  possibles".

Les conditions

$$a_1 < a_2 < \dots < a_p \quad \text{et} \quad a_i \geq 1$$

impliquent  $a_i \geq i$  pour tout  $i$  élément de  $[1, p]$ , d'où

$$a_1 + a_2 + \dots + a_p \geq 1 + 2 + \dots + p = \frac{p(p+1)}{2}$$

Or  $a_1 + a_2 + \dots + a_p = 32$

d'où  $\frac{p(p+1)}{2} \leq 32$  et  $p \leq 7$ ,

cette valeur maximale 7 étant admissible puisque

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 10 = 32$$

Comme

$$a_1 + a_2 + \dots + a_6 \geq \frac{6 \times 7}{2} = 21,$$

$a_7$  est au plus égal à 11, d'où  $7 \leq a_7 \leq 11$ .

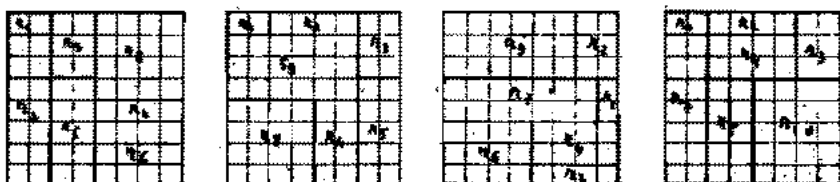
$a_7 = 7$  ne convient pas car l'on aurait  $a_i = i$  pour tout  $i$  élément de  $[1, 7]$  d'où  $\sum_{i=1}^7 a_i = 28$ .

$a_7 = 11$  ne convient pas non plus car le rectangle correspondant serait obligatoirement du type  $2 \times 11$ , ce qui n'est pas possible.

Il reste les possibilités  $a_7 \in \{8; 9; 10\}$  dont chacune donne au moins une solution :

$(1;2;3;5;6;7;8)$  ;  $(1;2;3;4;5;8;9)$  ;  $(1;2;3;4;6;7;9)$  ;  $(1;2;3;4;5;7;10)$

Voici une configuration pour chacune des solutions.



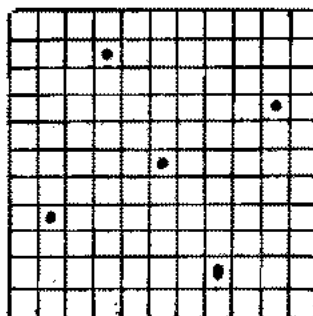
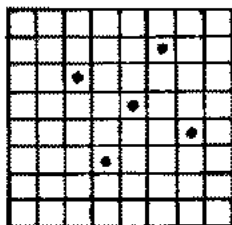
La généralisation de ce problème au cas  $n \times n$ , puis au cas  $p \times q$ , paraît possible, mais l'investigation des solutions est sans doute laborieuse.

### 3) DES DAMES OMNIPRESENTES

*"Quel est le nombre minimum de dames à placer sur un échiquier  $8 \times 8$  pour contrôler toutes les cases ?"*

Ce nombre est 5 [et correspond au nombre d'absorption du graphe  $G$  des mouvements possibles d'une dame sur un échiquier (voir I) ].

Notons qu'avec 5 dames il est possible de contrôler un échiquier  $11 \times 11$  (fig. 8) mais qu'actuellement il semble que l'on ne connaisse pas de résultats précis sur la dimension maximum  $n(k)$  d'un échiquier contrôlable par  $k$  dames.



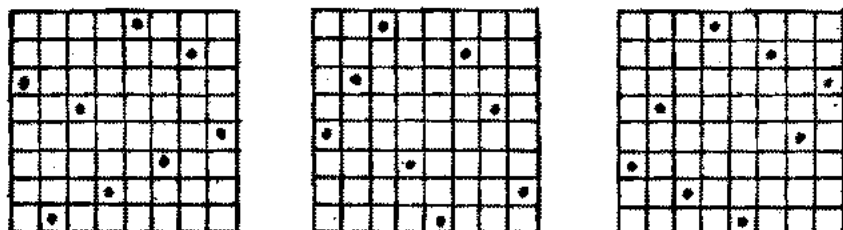
#### 4) DES DAMES BIEN TRANQUILLES (Gauss et beaucoup d'autres...)

"Peut-on placer 8 dames qui ne se menacent pas sur un échiquier  $8 \times 8$  ?"

Ce problème admet exactement 92 solutions (pouvant aisément se déterminer par ordinateur), Gauss lui-même n'en ayant trouvé "que" 76. Elles se déduisent des permutations suivantes de  $(0;1;2;3;4;5;6;7)$  :

(5 0 4 1 7 2 6 3)	(4 0 3 5 7 1 6 2)	(3 5 7 2 0 6 4 1)
(3 5 0 4 1 7 2 5)	(0 5 7 2 6 3 1 4)	(4 6 1 5 2 0 3 7)
(4 6 1 5 2 0 7 3)	(2 4 7 3 0 6 1 5)	(3 7 0 4 6 1 5 2)
(3 1 6 4 0 7 5 2)	(6 1 5 2 0 3 7 4)	(2 4 1 7 0 6 3 5)

dont chacune donne une configuration par rotation de l'échiquier et par symétrie par rapport à la diagonale principale. Chaque permutation donne donc 8 solutions sauf la dernière qui n'en donne que 4 (d'où  $8 \times 11 + 4 = 92$ ). En voici trois :



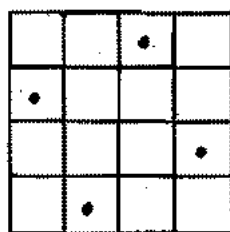
(5 0 4 1 7 2 6 3)      (3 5 7 2 0 6 4 1)      (2 4 1 7 0 6 3 5)

fig. 1

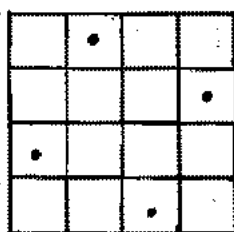
**Généralisation.** "Placer  $n$  dames qui ne se menacent pas sur un échiquier  $n \times n$ ".

a) Premiers essais - Solution pour  $n \equiv 0,1,4,5 \pmod{6}$  (c'est-à-dire "modulo 6")

On construit des échiquiers de côté 1,2,3... ; on se munit de jetons que l'on baptise dames et le jeu commence ! Pour 1, solution évidente ; pour 2 et 3, pas de solution ; pour 4, deux solutions réciproques l'une de l'autre correspondant à la permutation  $(2;0;3;1)$  de  $(0;1;2;3)$ .

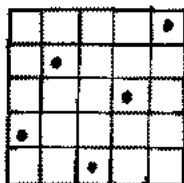


(2 0 3 1)

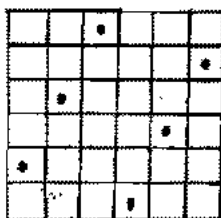


(1 3 0 2)

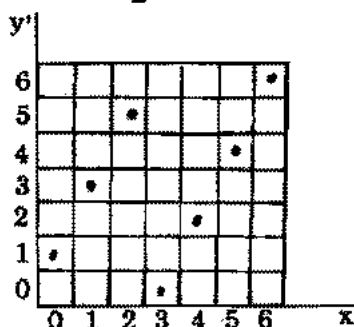
Pour 5, pour 6, pour 7, une solution presque évidente et très régulière est obtenue en plaçant les dames suivant deux droites de pente 2 ( $y = 2x + 1$  et  $y = 2(x - m)$  où  $m = E(\frac{n}{2})$ )



n = 5



n = 6



n = 7

Mathématisons un peu cette solution pour étudier son éventuelle généralisation. Choisisant 2 axes orthonomés  $ox$ ,  $oy$  avec  $ox$ , bord inférieur, orienté positivement vers la droite et  $oy$ , bord gauche, orienté positivement vers le haut, on peut associer à chaque case une abscisse et une ordonnée toutes deux naturels compris entre 0 et  $n - 1$  (au sens large) ; la solution précédente correspond alors à l'application bijective  $\sigma$  de l'intervalle de naturels  $I_n = [0, n-1]$  dans lui-même défini pour  $n = 2m$  ou  $n = 2m + 1$ , par :

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= 2x + 1 \text{ pour } 0 \leq x \leq m-1 \\ \text{et } \sigma(x) &= 2(x-m) \text{ pour } m \leq x \leq n-1 \end{aligned}$$

Comme  $\sigma$  est une permutation de  $I_n$ , il y a bien une dame et une seule sur chaque ligne et sur chaque colonne. Si l'on appelle maintenant diagonale première  $D_k^1$  une droite d'équation  $y - x = k$  (parallèle à la première bissectrice) et diagonale seconde  $D_k^2$  une droite d'équation  $y + x = k$  (parallèle à la deuxième bissectrice), on voit sans difficulté que toutes les  $D_k^1$  passant par les points associés

à la bijection précédente sont distinctes. Le seul cas de "menace" peut donc provenir de deux points situés sur une même diagonale seconde, ce qui exige l'existence d'un naturel  $x$  tel que

$$\frac{2x + 1 - 0}{x - m} = 1$$

d'où :

$$m = 3x + 1 \quad \text{et} \quad n = 6k + 2 \quad \text{ou} \quad n = 6k + 3$$

Par suite, la permutation précédente constitue bien une solution pour  $n \equiv 0, 1, 4, 5$  [6] mais ne convient pas pour  $n \equiv 2, 3$  [6], cas rebelles !

b) *Les cas rebelles* :  $n \equiv 2, 3$  [6]

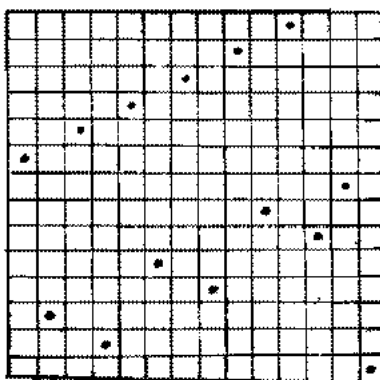
$\alpha$ )  $n \equiv 2$  [6]. Distinguons 2 cas :

- $n = 6m + 2$  avec  $m$  impair (c'est-à-dire  $n \equiv 8$  [12] ou  $n = 12p + 8$ ).

(C'est en particulier le cas de l'échiquier classique  $8 \times 8$ ). Une solution est obtenue en généralisant la deuxième proposée pour  $n = 8$  (fig. 1) et consiste à poser

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma(x) = \sigma_1(x) = 2x+3 \text{ pour } 0 \leq x \leq 6p+2 & \text{graphe } G_1 \\ \sigma(x) = \sigma_2(x) = 2(x-6p-3) + 2 = 4k-2 \text{ pour } x = 6p+2k+1, 1 \leq k \leq 3p+2 & \text{graphe } G_2 \\ \sigma(x) = \sigma_3(x) = 2(x-6p-4) = 4(k-2) \text{ pour } x = 6p+2k, 2 \leq k \leq 3p+2 & \text{graphe } G_3 \\ \sigma(n-1) = \sigma_4(n-1) = 1 & \text{graphe } G_4 \end{array} \right.$$

- En particulier  $\sigma_1(x)$  est impair et différent de 1,  $\sigma_2(x)$  et  $\sigma_3(x)$  sont pairs, le premier congru à 2 [4], le deuxième congru à 0 [4] ;  $\sigma_4(x)$  vaut 1 et les restrictions  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$  sont toutes injectives ; donc  $\sigma$  elle-même est injective ; et comme  $\text{Card } \sigma(I_n) = n$ ,  $\sigma$  est bijective et par suite il y a une dame et une seule sur chaque ligne et sur chaque colonne.
- Il n'y a pas 2 dames sur une même diagonale première, la seule éventualité non fautive d'une manière évidente étant l'existence d'un naturel  $k$  tel que  $\frac{4(k-2)-2}{6p+2k-6p-3} = 1$  ; d'où  $2k = 7$ , ce qui est impossible.
- Il n'y a pas 2 dames sur une même diagonale seconde car celles qui passent par les points de  $G_1$  sont du type  $D_{3k}^2$ , celles qui passent par les points de  $G_2$  du type  $D_{6k}^2$ , celles qui passent par les points de  $G_3$  du type  $D_{6k}^2$  et enfin celle qui passe par  $G_4$  est  $D_n^2 = D_{12p+8}^2$  qui n'est aucune des précédentes.

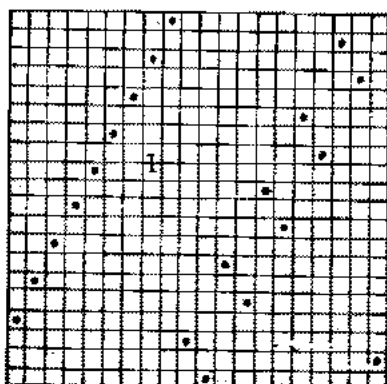


$n = 20$

- $n = 6m + 2$ ,  $m$  pair (c'est-à-dire  $n \equiv 2 [12]$ , ou  $n = 12p + 2$ )  
Une solution est :

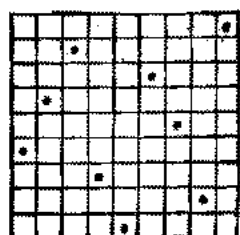
$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma(x) = \sigma_1(x) = 2x + 3 \text{ pour } 0 \leq x \leq 6p - 1 & \text{graphe } G_1 \\ \sigma(6p) = \sigma_2(6p) = 1 & \text{graphe } G_2 \\ \sigma(x) = \sigma_3(x) = 2(x - 6p + 1) = 4k + 4 \text{ pour } x = 6p + 2k + 1, 0 \leq k \leq 3p - 1 & \text{graphe } G_3 \\ \sigma(x) = \sigma_4(x) = 2(x - 6p - 1) = 4k - 2 \text{ pour } x = 6p + 2k, 1 \leq k \leq 3p & \text{graphe } G_4 \\ \sigma(n - 1) = \sigma_5(n - 1) = 0 & \text{graphe } G_5 \end{array} \right.$$

Comme précédemment, on vérifie que  $\sigma$  est bien une permutation de  $I_n$ , d'où l'existence d'une dame et d'une seule sur chaque colonne, puis qu'il n'y a pas 2 dames sur une même diagonale première (l'existence d'une telle configuration conduirait à l'égalité  $2k = 5$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ) et enfin qu'il n'y a pas 2 dames sur une même diagonale seconde (en raisonnant sur des congruences).

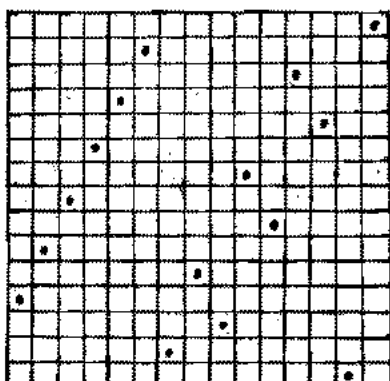


$n = 14$

$\beta$ )  $n \equiv 3 [6]$ . Dans chacun des 2 cas précédents ( $n \equiv 8 [12]$  et  $n \equiv 2 [12]$ ) il n'existe aucun point sur  $D_0^1$ , c'est-à-dire aucun  $x$  tel que  $\sigma(x) = x$ ; par suite, en posant  $\sigma(n - 1) = n - 1$ , ces deux cas se prolongent à  $n \equiv 9 [12]$  et  $n \equiv 3 [12]$  et fournissent donc la solution pour  $n \equiv 3 [6]$ .



n = 8



n = 15

### Remarques

1) La solution précédente du problème des  $n$  dames en position de "tranquillité" sur un échiquier  $n \times n$  est originale mais n'est sans doute pas la meilleure. En 1969, *Hoffmann, Loessi* et *Moore* (II) en avaient également trouvée une mais elle ne paraît pas non plus parfaite. Peut-être un lecteur trouvera-t-il la belle solution valable pour tout  $n$  ?

2) Ce problème traditionnellement considéré comme une amusette se rattache à la notion de "distorsion" d'un espace métrique introduite et étudiée par *C. Frasnay*. Pour un tel espace  $(E, d)$ , on appelle *distorsion* toute permutation  $\sigma$  de  $E$  telle que :

$$(\forall x) (\forall y) (x \in E, y \in E, x \neq y \Rightarrow d(\varphi(x), \varphi(y)) \neq d(x, y))$$

et trouver une solution au problème des  $n$  dames, c'est bien trouver une distorsion de  $I_n$  muni de la distance définie par la valeur absolue. Il est alors tentant de chercher l'existence d'une distorsion de  $N$  ou de  $Z$  (échiquier infini ou doublement infini). On s'aperçoit vite que cette recherche est nettement plus facile que celle rencontrée dans les cas "rebelles" et les solutions sont nombreuses. Cela provient du fait que le caractère fini de  $n \times n$  se révèle ici très contraignant alors que le caractère infini laisse au contraire une grande latitude dans le choix des couples  $(x, \sigma(x))$ .

### BIBLIOGRAPHIE

- (I) C. BERGE, *Graphs and hypergraphs* (North Holland Mathematical library, 1973).  
 (II) E.J. HOFFMANN, J.C. LOESSI, R.C. MOORE, *Mathematical magazine* 1969.