1. 2. Activité et connaissance opératoire

Conférence de G. VERGNAUD, Maître de Recherche au C.N.R.S.

En intitulant ces journées "*mathématiques et comportement*", les organisateurs avaient l'intention de porter l'attention sur l'étude des comportements des élèves dans les activités mathématiques, et c'est sans doute pourquoi ils ont demandé à un psychologue d'apporter son point de vue.

En s'adressant à un cognitiviste qui a bataillé longtemps contre le behaviorisme, le risque était grand de le voir partir en guerre contre la notion de comportement et laisser ainsi les mathématiciens sur leur faim.

Je serai donc aussi nuancé et responsable que possible.

Lorsque la notion de comportement s'est développée en psychologie, c'était dans un effort d'objectivité, pour essayer de recentrer les études psychologiques sur les phénomènes observables et notamment sur les liens entre les aspects observables des situations et les réponses observables des sujets. C'était donc un effort louable pour éviter certaines spéculations mentalistes et certaines illusions de l'introspection. Le malheur est que cet effort a rapidement dégénéré dans une sorte d'interdit ; pour mériter l'étiquette de scientifique, il fallait s'en tenir aux observables et refuser toute théorie comportant une incursion dans la pensée du sujet ou même dans les processus sous-jacents aux aspects observables des situations. La psychologie stimulus-réponse régna en maîtresse pendant plusieurs décennies. C'était d'ailleurs l'époque où l'empirisme dominait également les autres sciences : la physique, la biologie et même les mathématiques.

Nous n'en sommes plus tout à fait là aujourd'hui, du moins en France, et c'est donc sans souci polémique que je vais essayer de dégager les principaux concepts psychologiques qui me semblent féconds pour l'étude de l'apprentissage, de l'acquisition, ou plutôt de l'appropriation du savoir mathématique.

Comme ces concepts risquent d'être inhabituels pour certains participants, j'essaierai de les éclairer par quelques exemples en cours de route pour illustrer mon propos.

La pensée n'est conceptuelle que si elle obéit à des critères d'ordre théorique et d'ordre pratique à la fois. Un simple comportement, même adapté, n'est pas conceptuel, mais un discours théorique, s'il ne donne pas lieu à une conduite adaptée dans les situations où ce discours s'applique, n'est pas non plus conceptuel. Une pratique obtenue par dressage ou conditionnement n'est pas un concept, mais un concept qui n'est pas opératoire n'est pas un concept.

L'activité en situation est, pour une majorité croissante de psychologues, à la fois la source et le critère de la pensée conceptuelle ; le langage joue, bien entendu, un rôle fondamental, puisqu'il permet seul le discours théorique et que, sans ce discours, il n'y a guère de concept, mais il ne constitue pas, aux yeux des psychologues, le critère le plus décisif.

Le critère le plus décisif reste l'action en situation, ou encore ce que les psychologues appellent la solution de problème. La solution de problème a, pour le psychologue, une signification beaucoup plus large que pour le mathématicien. Est problème tout ce qui, d'une façon ou d'une autre, implique de la part du sujet la *construction d'une réponse ou d'une action qui produise un certain effet*. Trouver un chemin dans un labyrinthe pour un rat, contourner un grillage pour aller chercher de la nourriture pour une poule, aller chercher un jouet disparu derrière un écran, derrière lequel il vient de disparaître, pour un bébé, désemboîter des poupées gigognes, produire un énoncé verbal, sérier des objets selon leur grandeur ou selon leur poids, rendre la monnaie, prévoir le résultat d'un déplacement, d'un mouvement, etc..., voilà autant d'exemples différents de problèmes, dont certains ont été étudiés assez systématiquement par des psychologues. Résoudre un système d'équations, démontrer un théorème sont également des problèmes, bien entendu.

Toutefois, la notion de problème n'a guère de sens pour les problèmes résolus ou, pour être plus précis, pour les problèmes auxquels le sujet peut appliquer un système de réponse tout constitué.

La notion de problème comporte donc l'idée de nouveau, de jamais fait, de pas encore compris. Toutefois, cela ne signifie pas que le système cognitif avec lequel le sujet attaque le problème nouveau est lui aussi nouveau Au contraire, c'est le plus souvent avec un système ancien et solidement approprié.

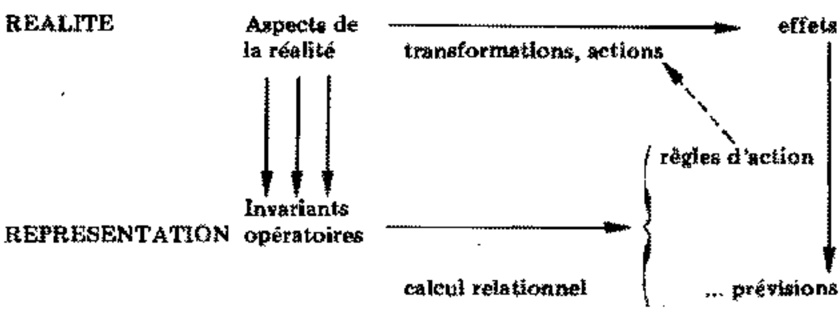
Le concept opératoire, c'est donc celui qui permet de traiter des situations nouvelles jamais rencontrées. Et c'est là que les conceptions empiristes achoppent. Car l'enfant ne se développe pas en apprenant pour chaque situation la réponse appropriée, mais en se formant des concepts opératoires qui lui permettent de traiter de larges classes de situations, y compris celles qu'il n'a jamais rencontrées.

Le catalogue des situations possibles est inépuisable. Il ne serait pas possible de s'en sortir si l'on ne disposait pas de règles générales de traitement valables pour toute une classe de problèmes, y compris des problèmes nouveaux, pourvu qu'on y rencontre les relations qui rendent pertinentes les règles utilisées.

Rentrons dans le vif du sujet et essayons de former une théorie de la solution de problème.

La première thèse à développer est celle d'un certain homomorphisme entre la réalité et la représentation, homomorphisme sans lequel on ne saurait comprendre comment la pensée peut permettre au sujet de produire des actions adaptées et efficaces.

Mais cette thèse s'accompagne nécessairement de trois concepts fondamentaux : (cf. schéma 1)



SCHEMA 1

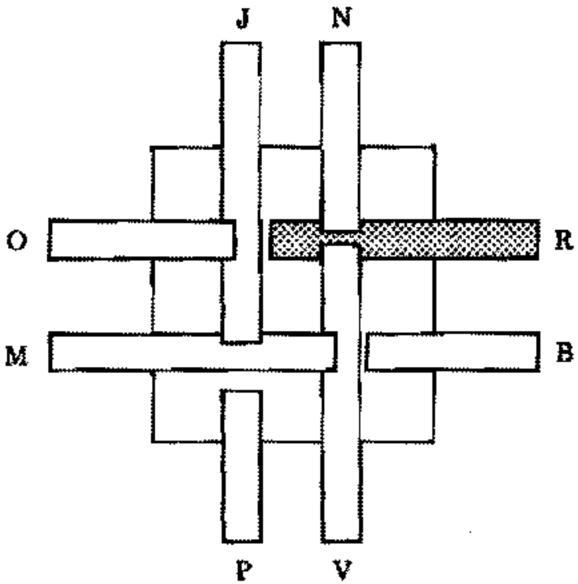
— le concept de règle d'action ou, plus complètement, de *règle de production des actions du sujet*. Ces règles sont celles qui engendrent les actions observables du sujet, notamment ses actions matérielles.

— le concept d'*invariant opératoire*. Ces invariants sont les objets de pensée stables, produits, de la fonction symbolique et possédant certaines propriétés qui rendent possible un calcul relationnel et permettent ainsi d'engendrer règles d'action et prévisions.

— le concept de *représentation calculable* qui résume le tout et qui intègre les concepts de fonction symbolique, d'invariant et de calcul relationnel.

Je vais donner quelques exemples :

Le premier exemple n'est pas à proprement parler mathématique ; c'est celui d'un dispositif matériel de barres encastrées les unes dans les autres, dans lequel les actions du sujet sont aussi des actions matérielles. (cf. schéma 2)



On demande de tirer la barre R et on enregistre la suite des barres tirées par l'enfant pour atteindre ce but.

SCHEMA 2

J'ai souvent donné cet exemple et, si je le répète ici, c'est parce qu'il est particulièrement simple et démonstratif.

Les enfants utilisent quatre sortes de règles :

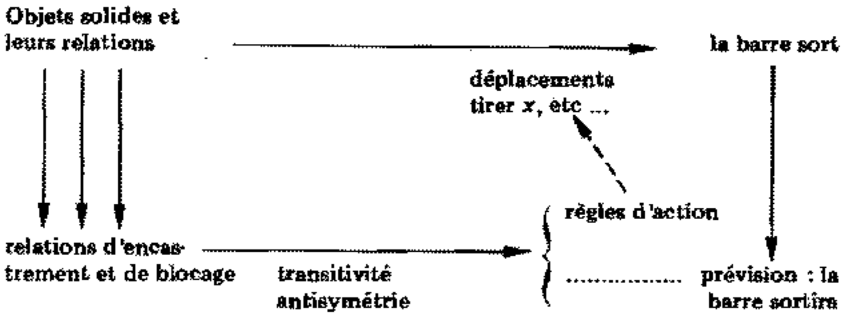
— une règle prenant en compte la relation d'encastrement et utilisant l'antisymétrie et la transitivité de la relation d'ordre qui s'en déduit. Exemple de séquence engendrée par une telle règle : O J M V N R

— une règle prenant en compte l'antisymétrie mais non la transitivité. Exemple : R N R V M J O V M J R V M V R

— une règle prenant en compte une relation de contact entre barres ni transitive ni antisymétrique. Exemple : R V R V R N R V B V R ...

— des règles utilisant d'autres aspects du dispositif, surtout le voisinage spatial périphérique ou la symétrie. Exemple : R B V P M O ...

On peut préciser le schéma de tout à l'heure avec ce dispositif. (cf. schéma 3)



SCHEMA 3

Je n'ai pas besoin d'écrire, pour vous, les calculs relationnels correspondants, mais les observations faites sur les enfants montrent que la transitivité est une forme de calcul relationnel relativement tardive (7 ou 8 ans) et que l'antisymétrie elle-même, qui est aussi une forme de calcul relationnel, est comprise par les enfants entre 4 ans et demi et 5 ans et demi. Il s'agit pour eux d'une véritable appropriation du concept d'encastrement et de la relation de blocage entre barres.

L'étude du dessin des enfants confirme l'étude des procédures utilisées par les enfants, donnant ainsi du crédit à la thèse du rapport étroit entre représentations et règles d'actions.

Dans ce premier exemple, le niveau des objets est assez manifestement celui d'une réalité matérielle, encore que ce niveau suppose déjà une élaboration, plus grande qu'il n'y paraît, du concept d'objet solide et des relations spatiales entre objets solides.

*

* *

Le second exemple concerne l'acquisition de la notion d'addition. Il permet d'ajouter trois thèses complémentaires à la thèse précédente de l'homomorphisme :

1°) qu'il existe plusieurs plans hiérarchisés et plusieurs homomorphismes dans le fonctionnement de la pensée.

2°) que le plan qui sert de point d'appui à la construction du plan suivant n'est pas purement matériel mais est déjà cognitif.

3°) qu'une distinction est nécessaire dans la vie symbolique entre le signifié et le signifiant ou, si l'on veut, entre le concept ou le préconcept et sa représentation symbolique.

Soient deux ensembles disjoints que je représente par des croix et des ronds. Il s'agit de savoir combien d'éléments il y a en tout. Je suppose que l'enfant sait compter les objets.

Il dispose de deux moyens pour trouver le cardinal de l'union. Le premier n'implique pas l'addition puisqu'il consiste à réunir A et B et à dénombrer ensuite.

mentale et éventuellement matérielle

$$\begin{tikzcd}
A, B \arrow[rrr, "\text{union}"] & & & A \cup B \arrow[d] \\
& & & \text{mes.}(A \cup B)
\end{tikzcd}$$

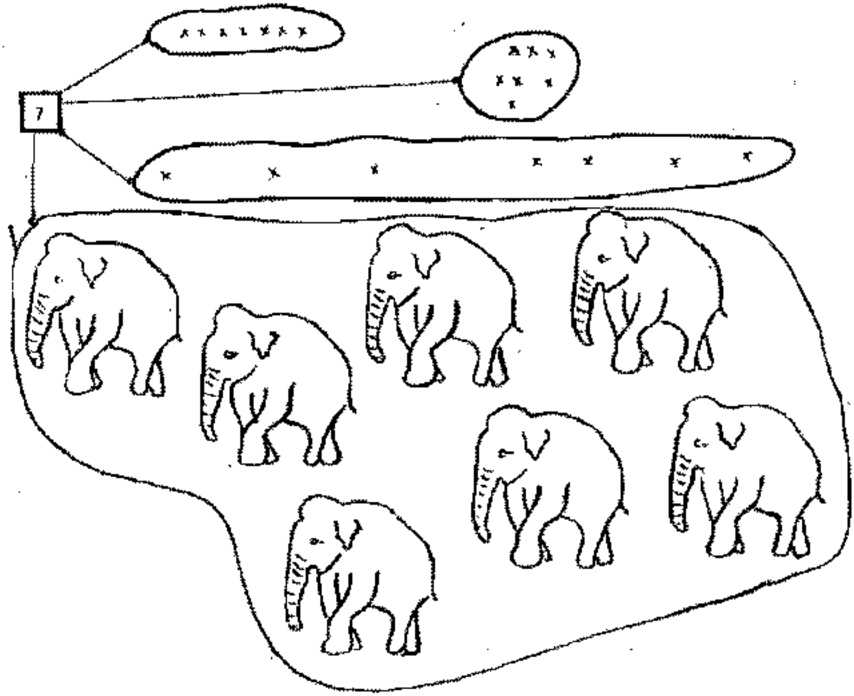
Le second consiste à dénombrer A, puis B, et à ajouter les deux nombres ainsi obtenus.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d] & B \arrow[d] & \\
\text{mes.}(A) & \text{mes.}(B) \arrow[r, "\text{addition}"] & \text{mes.}(A) + \text{mes.}(B) = \text{mes.}(A \cup B)
\end{tikzcd}$$

Il n'est pas très facile d'observer le moment du développement de l'enfant où le second chemin apparaît, dans le même temps d'ailleurs qu'apparaît la reconnaissance de l'équivalence des deux chemins. Mais ce qui est certain, c'est que, sans cet homomorphisme, il n'y a pas véritablement d'acquisition du nombre.

On sait aussi, depuis les fameuses expériences de Piaget, que l'invariant opératoire fondamental qu'est la conservation des quantités discrètes est assez tardif et que, sans cet invariant, il n'y a même pas de sens à parler de nombre et d'addition.

Ce n'est, en effet, que vers 6 ou 7 ans que les enfants considèrent qu'une collection d'objets est invariante, du point de vue de sa quantité, quelle que soit sa configuration (resserrée ou espacée), et que la grandeur de l'ensemble est indépendante de la grandeur des objets qui le composent. C'est une acquisition cognitive importante pour l'enfant que de considérer que 7 croix resserrées ne forment pas un ensemble plus petit que 7 croix espacées ou que 7 éléphants.



Même sachant compter jusqu'à 7, un jeune enfant peut estimer qu'il ne s'agit pas de la même quantité, ce qui signifie, entre autres choses, que la vérification empirique par comptage n'est pas l'élément le plus décisif de l'acquisition de cet invariant opératoire qu'est le nombre comme cardinal.

Avec la numération, un troisième plan intervient qui est celui de la représentation des nombres dans un système de signes et de règles, et un nouvel homomorphisme vient se composer avec l'homomorphisme *mesure* que je viens d'évoquer : c'est l'homomorphisme *écriture*.

$$\begin{array}{lccccc}
\text{nombres} & a & b & \longrightarrow & a + b & \\
 & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
\text{écriture des nombres} & \text{écr.}(a) & \text{écr.}(b) & \longrightarrow & \text{écr.}(a) \;\maltese\; \text{écr.}(b) = \text{écr.}(a+b) &
\end{array}$$

Exemples

$$\begin{array}{r} 34 \\ \maltese \quad 57 \\ \hline \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} \text{XXXIV} \\ \maltese \quad \text{LVII} \\ \hline \end{array}$$

+ représente la règle de l'addition : elle n'est pas la même pour les deux écritures ci-dessus.

$+$ représente la somme.

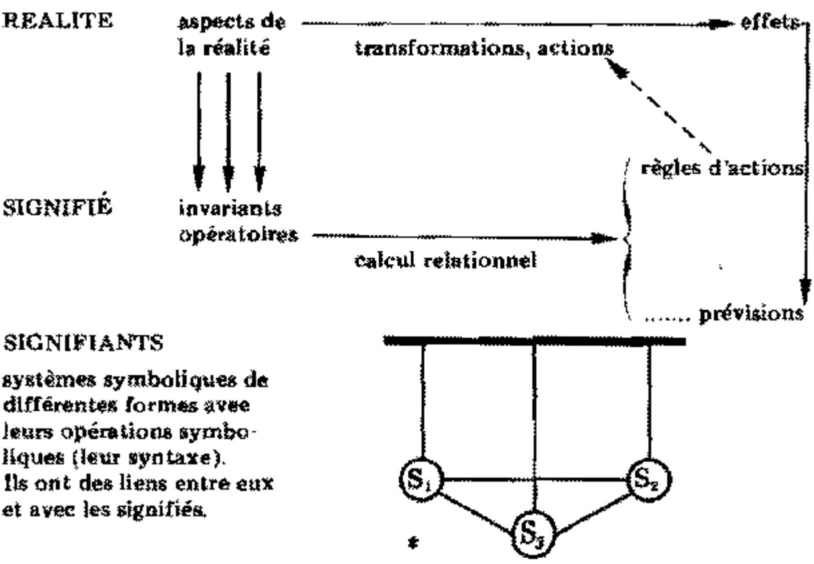
Lorsqu'on apprend à l'enfant la numération et la règle de l'addition avec des objets emboîtables ou du matériel multi-base, celui-ci travaille à quatre niveaux distincts de la pensée :

— celui des objets
— celui des ensembles
— celui des cardinaux
— celui de la représentation écrite des cardinaux.

Et comme le cardinal n'a pas d'autre existence apparente que celle des signes qui le représentent, c'est en fait un homomorphisme composé : *ecr o mes*, qui est mis en oeuvre par l'enfant.

Cela m'amène immédiatement à une distinction nécessaire entre *signifié* et *signifiant*. Le signifié, c'est le concept, ici le concept de cardinal et le concept d'addition ; c'est le concept qui est le plus fondamental dans l'acquisition de l'addition. Le signifiant, c'est la représentation du concept ; ici, la représentation écrite du nombre. Des opérations se déroulent au plan du signifiant, y compris des opérations matérielles d'écriture, mais elles s'appuient sur des opérations de la pensée qui ne sont pas observables et qui sont liées au concept. Je vais très vite et je suis nécessairement schématique, car il faudrait faire des analyses plus fines encore, mais il est clair que le nombre et sa représentation sont des objets distincts.

Je suis alors en mesure de compléter le schéma initial de la façon suivante :



Mon troisième exemple va me permettre d'approfondir cette question des différents signifiants pour un même signifié. Il permet aussi de donner un exemple pertinent pour des enfants plus âgés.

J'appelle problèmes de type additif, les problèmes qui demandent, pour leur solution, uniquement des additions et des soustractions. Commençons par ceux qui n'en demandent qu'une. Ils sont tous représentables par des équations à une inconnue.

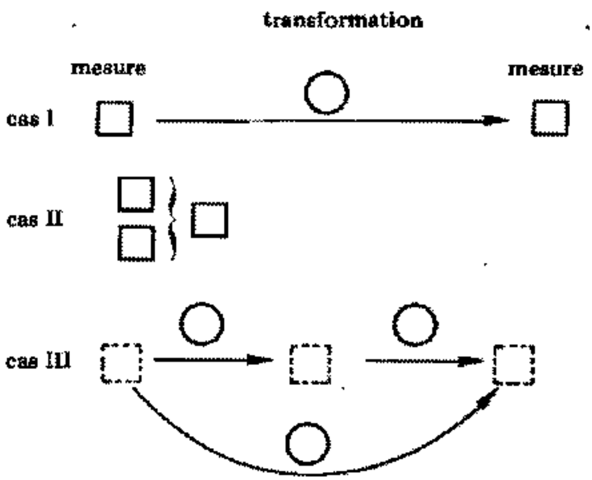
Prenons par exemple :

l'équation $a + x = b$

et sa solution $x = b - a$

Ces signes écrits sur le papier sont des signifiants qui renvoient à des signifiés : les nombres, l'addition, la soustraction, l'égalité. Mais ils ne renvoient pas qu'à des nombres, ils renvoient aussi, qu'on le veuille ou non, aux problèmes qui sont adéquatement représentés par $a + x = b$. En d'autres termes, ils renvoient à des relations dans lesquelles interviennent des quantités physiques (des longueurs, des surfaces, des poids ...), des quantités économiques (des quantités de marchandises, des sommes d'argent ...) et dans lesquelles le temps intervient avec un "*avant*", un "*pendant*" et un "*après*".

Les signes qui sont là, couchés sur le papier, représentent donc en fait des signifiés différents, identiques bien sûr à certains égards, mais différents à d'autres. Pour mieux faire ressortir ces différences, introduisons d'autres représentations qui permettent de discriminer entre différents cas.



Une transformation additive (addition ou soustraction) opère sur une mesure.

Deux mesures se composent par addition pour donner une mesure.

Deux transformations s'enchaînent en une transformation composée.

Il existe d'autres cas mais je n'en parlerai pas aujourd'hui.

Voici quelques situations toutes représentées par $a + x = b$. Elles diffèrent pourtant entre elles et du point de vue du domaine choisi, et du point de vue des relations.

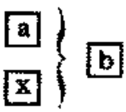
1er exemple

Il y avait a passagers dans l'autobus ; il y en a maintenant b. Que s'est-il passé ?

2ème exemple

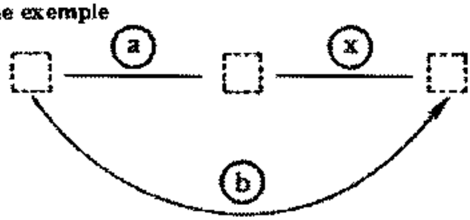
Je viens de gagner (ou perdre) $|a|$ billes. J'en ai b. Combien en avais-je avant de jouer ?

3ème exemple



Il y a b personnes à table dont a du sexe féminin. Combien y en a-t-il du sexe masculin ?

4ème exemple



Pierre a joué deux parties de billes. Il en a gagné (ou perdu) $|a|$ à la première partie. En tout il en a gagné (ou perdu) $|b|$. Que s'est-il passé à la seconde partie ?

Si l'on revient au critère que j'ai donné tout à l'heure, de la notion de concept opératoire, il est clair qu'un psychologue ne peut pas se contenter de vérifier si un élève, à partir de l'équation $a + x = b$ et pour telles ou telles valeurs de a et de b, sait calculer la valeur de x.

Certes, c'est une vérification qui a un sens, mais du point de vue de la compréhension des classes de problèmes adéquatement représentés par $a + x = b$, il manque quelque chose.

Mettre un problème en équation et se servir de l'équation pour le résoudre, est en fait quelque chose d'analogue, du point de vue de la thèse fondamentale de l'homomorphisme, à ce qui se passe entre le plan de la réalité et le plan de la pensée. Simplement, ce qui était parfois seulement signifié par les règles d'action suivies par le sujet, passe cette fois au plan du signifiant et de l'explicite ...

On peut distinguer si l'on veut entre *théorème en acte* et *théorème explicite.*

Quand l'enfant de 7 ou 8 ans utilise la transitivité de la relation d'ordre dans ses calculs relationnels, il met en acte un théorème qu'il n'est pas en tout état de cause capable d'expliciter. On dira parfois qu'il ne fait pas encore de mathématiques, ou Piaget dirait qu'il n'est pas au niveau de l'abstraction réfléchissante. Admettons cette thèse très insuffisante !

Dans la ligne de ce que je viens de dire, une question importante est celle de savoir dans quelle mesure une représentation mathématique est opératoire pour résoudre des problèmes. Un même problème peut souvent avoir plusieurs représentations, dans des systèmes symboliques différents. Lesquelles sont les plus opératoires, à quel niveau de développement de l'enfant et pour quel degré de généralité ? Certaines représentations sont plus abstraites que d'autres au sens où des significations plus diverses viennent se projeter sur le même signe. C'est donc un risque de confusion qu'il peut être utile d'écarter en utilisant pour un temps une représentation moins générale et aussi moins puissante : des schémas différenciés plutôt qu'une équation par exemple. Il peut être aussi souhaitable d'introduire plusieurs représentations et de faire jouer les homomorphismes qu'il y a entre eux ... par exemple, pour certains problèmes mettant en jeu une fonction linéaire, entre un schéma, une équation vectorielle, une équation banalisée et une représentation géométrique.

*

* *

Je voudrais maintenant, dans le temps qui me reste, aborder quelques problèmes de méthode. On se tourne parfois vers le psychologue pour lui demander des résultats tout faits qu'il serait possible d'appliquer en classe. Ces résultats miraculeux, pour l'instant, n'existent guère. Certes, la psychologie a établi un certain nombre de vérités qui sont bonnes à dire, mais la psychologie de l'enseignement a encore presque tout à faire. C'est aux maîtres, avec le concours de psychologues et en faisant leur une certaine problématique, qu'il revient de s'attaquer à l'énorme travail qui est devant nous, pour donner, à l'enseignement, un sens et un contenu que les élèves soient capables de s'approprier.

Toute étude psychologique suppose d'abord l'étude des procédures ou des règles d'action du sujet. A côté des procédures canoniques et algorithmiques existent de nombreuses procédures non canoniques, localement efficaces, tenant compte d'une partie des propriétés des données. Il faut respecter ces procédures, les relever, les comprendre. C'est là qu'est la clef de l'obstacle rencontré par l'enfant et aussi le chemin par lequel on peut lui faire comprendre certaines difficultés.

L'erreur est aussi intéressante, du point de vue du métier de maître, que la bonne réponse. Mais l'interprétation des erreurs et des procédures des élèves suppose que des recherches systématiques soient faites qui placent en perspective les procédures les unes par rapport aux autres et qui les relient aux différentes classes et sous-classes de situations.

L'étude psychologique ne se borne pas à l'étude des procédures ; elle étudie également les représentations, soit en les inférant à partir des procédures observées, soit en considérant les différents systèmes de signifiants utilisés par l'élève (le langage courant, les schémas, les écritures mathématiques ...).

Sans l'étude de la représentation, qui est la plus délicate, il manque quelque chose d'important et c'est justement ce qui manque le plus à l'approche behavioriste qui s'en tient à l'étude des comportements. A dire vrai, l'observation des comportements appelle une analyse complémentaire à deux niveaux :

1°) dégager, derrière les comportements observés, les règles qui les engendrent ;

2°) dégager, au-delà de ces règles et avec le secours des explications verbales et des autres témoignages du sujet, les représentations sous-jacentes.

Mais cette analyse psychologique n'aurait pas de sens si elle ne s'appuyait sur une solide analyse de la matière à enseigner. J'ai évoqué, il y a un instant, l'idée qu'il fallait des recherches systématiques avec plan d'expérience à la clef, pour pouvoir interpréter ces observations psychologiques. Je peux préciser de la manière suivante :

La psychogenèse des procédures et des représentations est liée à une psychogenèse encore plus fondamentale dont l'analyse est inextricablement liée à l'analyse de la matière à enseigner. Il existe, en effet, une hiérarchie de notions, de relations, de classes et de sous-classes de problèmes que l'enfant est capable de traiter, voire auxquels il est capable de donner un sens. Cette analyse est évidemment impossible sans une connaissance approfondie de la matière.

La meilleure qualification des maîtres en psychologie, que j'appelle de tous mes voeux, ne peut donc que s'appuyer sur une solide qualification dans la ou les disciplines enseignées ; elle ne s'y oppose pas, bien au contraire. Mais cette analyse de la matière n'est pas nécessairement la même du point de vue du psychologue et du point de vue du spécialiste. Là où le spécialiste recherche les principes fondamentaux et les axiomes les plus puissants, le psychologue recherche les notions et les classes de problèmes le plus précocement et le plus aisément comprises et traitées par l'enfant. Par exemple, là où le mathématicien voit une seule et même notion, l'enfant, lui, voit des choses qualitativement différentes. Ou bien, là où le mathématicien voit une procédure banale et peu intéressante, l'élève, lui, peut voir un système de traitement évident et localement efficace.

Les structures mathématiques ne se construisent pas d'un bloc, mais morceau par morceau, tout le monde le sait, bien entendu ; encore faut-il connaître dans le détail, et sans surestimer ni sous-estimer les capacités des élèves, comment l'édifice est assimilé par l'enfant et véritablement approprié, c'est-à-dire utilisé de façon naturelle dans la solution de problème. La marque de l'appropriation, c'est l'évidence. Elle ne se transmet pas facilement.

Les structures additives et multiplicatives de l'arithmétique élémentaire se construisent, par exemple, sur une période beaucoup plus longue que ne semblent le reconnaître les programmes ; et cette construction n'est pas indépendante des contenus physiques et des contenus de la vie courante qui leur donnent un sens. C'est, au contraire, sur eux qu'elle s'appuie, de façon presque indissociable. La notion de linéarité n'est pas traitée de façon identique lorsqu'elle concerne la notion de vitesse uniforme, celle de poids spécifique, celle de densité de surface ou celle de prix unitaire. Les différentes procédures qui, pour le mathématicien, sont équivalentes ne sont pas également naturelles pour l'élève qui utilise éventuellement l'une et ignore l'autre. L'idée de procédure algorithmique est inséparable de l'idée de caractéristique d'une classe de problèmes. Or l'élève ne reconnaît pas nécessairement l'appartenance à une même classe de deux problèmes distincts. Il ne les traite donc pas de la même façon.

*
* *

Sans doute certains participants ont-ils le sentiment, après les propos que je viens de tenir, que cette conception est bien intellectualiste pour un psychologue, et qu'on est, ce faisant, très éloigné des problèmes liés à l'affectivité, à la relation maître-élève, à la psychologie de groupe et aux questions politiques qui traversent de fond en comble le problème de l'enseignement et de l'éducation. C'est un reproche fondé, mais partiellement seulement.

Je vais essayer de me rattraper, dans les quelques minutes qui me restent, non pas en parcourant au galop ces questions que je n'ai pas abordées, mais en essayant de montrer quelques rapports des thèmes que je viens d'évoquer avec ces questions générales de l'éducation.

Une première idée concerne la question du sens, qui dans mon esprit rejoint celle du désir. Pour s'y intéresser, un élève doit trouver du sens au contenu de l'enseignement qu'on lui transmet ; la question du sens se pose à trois plans différents. Ces plans ne sont pas nécessairement ordonnés.

1°) Pour qu'un contenu ait un sens pour l'élève, il faut que celui-ci y voit quelque rapport avec des activités significatives pour lui, qu'il s'agisse d'activités manuelles et technologiques, d'explorations et d'expérimentations d'ordre scientifique ou d'activités socio-économiques de la vie courante. De ce point de vue, on peut s'interroger sérieusement sur les méthodes pédagogiques et l'isolement de l'enseignement des mathématiques, tel qu'il est le plus souvent pratiqué et tel qu'il apparaît à travers les manuels scolaires. Ajouter des critères externes aux critères internes du savoir mathématique ne peut qu'obliger l'enseignement des mathématiques à se transformer et à s'intégrer davantage à un enseignement des sciences et des techniques qui devrait en tout état de cause l'accompagner à tous les âges. Mais c'est une vaste perspective qui ne dépend pas principalement des enseignants de mathématique. Peut-être peuvent-ils cependant apporter leur pierre à ce processus,

2°) Pour qu'un contenu ait un sens pour l'élève, il faut qu'il y voie une vraie question, donc ni trop difficile ni trop facile. Le respect des contraintes psychogénétiques est décisif dans ce domaine et il y a peut-être pas mal d'illusions à corriger. On croit acquises des notions et des techniques qui sont à peine ébauchées pour la majorité des enfants. Parfois, à l'inverse, on apporte un soin extravagant à démontrer des évidences. Je sais bien qu'alors c'est sur la notion de démonstration que le maître ou le manuel veulent insister. Mais cela n'est pas toujours clair. Au fond, il faut toujours commencer par se demander quel sens l'élève peut bien donner à la question que se pose le maître. Il arrive que ce soit le même. Le plus souvent, il n'y a qu'une petite partie commune.

3°) Enfin, pour qu'un contenu ait un sens pour l'élève, il faut qu'il s'inscrive dans un projet qui ait quelque corps. Un enseignement de mathématiques de masse ne s'adresse pas principalement à de futurs mathématiciens, et peut-être y a-t-il aussi des choses à revoir de ce point de vue. Non pas qu'il y ait plusieurs sortes de mathématiques ou qu'il faille différencier les contenus en fonction de la destinée des élèves. Au contraire, si les mathématiques sont un savoir universel utile à tous, tant du point de vue culturel que du point de vue professionnel, alors il faut l'enseigner de telle sorte qu'il soit approprié par tous. Et s'approprier le savoir, c'est d'abord lui donner un sens.

*

* *

Je ne peux pas m'empêcher d'attirer l'attention des participants à ces journées sur le fait qu'une majorité croissante de psychologues se détourne maintenant des études différentielles et des études caractérologiques, auxquelles Monsieur Servais nous a conviés hier, pour s'intéresser davantage aux processus généraux de l'intelligence et des phénomènes d'acquisition. J'ai peur, pour ma part, qu'au moment où le problème principal est de promouvoir un enseignement scientifique de masse, les classifications caractérologiques ne soient en fait un obstacle à une réflexion véritable sur les raisons des échecs actuels de l'enseignement des mathématiques.

Imputer ces échecs au caractère des élèves (mais ce n'est pas ce qu'a dit Monsieur Servais) ne serait pas la meilleure façon d'ouvrir la voie à la critique du système actuel qui est, lui, le principal responsable.

*

* *

Chers collègues, on oppose parfois savoir et savoir-faire, pensée abstraite et pensée concrète, et l'on prétend souvent, soit que la pensée conceptuelle n'apparaît que très tard, soit encore que certains enfants sont inaptes à y accéder.

Puis-je me permettre de conclure en disant que ces thèses sont des thèmes idéologiques qui n'ont rien à voir avec le fonctionnement véritable de la pensée. Le savoir-faire ne saurait être opposé au savoir puisqu'il en est le critère en même temps qu'il s'appuie nécessairement dessus. Savoir et savoir-faire sont deux versants indissociables de la pensée conceptuelle.

De même, la pensée conceptuelle n'est réservée ni aux adultes ni aux travailleurs intellectuels. Le concept opératoire, c'est ce qui est propre à tous les hommes, dans leur vie quotidienne comme dans leur vie professionnelle, et si des témoignages indubitables existent, dans les "*comportements*" observables des hommes, du fonctionnement ou du non-fonctionnement d'un concept, cela ne saurait être rationalisé en une pseudo-aptitude ou une pseudo-inaptitude à la pensée conceptuelle. Il en va des concepts mathématiques comme des autres concepts.

Se débarrasser de certains préjugés et de certaines idéologies ne résout pas tous les problèmes, mais cela permet de s'y attaquer.