

1

COMPTE RENDU DES JOURNÉES A. P. M. DE RENNES

(septembre 1976)

1. 1. Humaniser l'enseignement de la mathématique

*Conférence de Willy SERVAIS, Faculté des Sciences
Psycho-pédagogiques, Université d'Etat, MONS (Belgique)*

0. La mathématique en question

La mathématique a, parmi les sciences, une situation singulière et paradoxale. Elle est sans doute l'oeuvre que l'esprit humain élabore le plus par ses propres forces et qui témoigne le mieux de sa structure fonctionnelle. Elle est, par un contraste, en fait surprenant, une matière qui semble étrangère à un nombre trop grand d'intelligences. Ainsi, une création humaine dans son essence apparaît à trop d'hommes comme inhumaine, voire déshumanisante.

La fiction, ou la réalité, de la bosse des mathématiques rappelle qu'il n'y a pas en leur royaume d'élus qui n'aient au front le signe aristocratique d'intelligence. Pour ceux qui ne sont pas prédestinés, il n'y a de promis qu'un labeur sans joie, un gavage plein d'amertume, une frustration sans appel, une injustice congénitale.

De toutes les branches enseignées, la mathématique est peut-être celle dont l'étude est le plus jalonnée de pleurs et de grincements de dents. Pour trop d'élèves et trop de familles, les maths sont des rabat-joie, des empoisonneuses de réunions familiales, des gâcheuses de vacances.

Et cependant :

Il n'y a pas de compréhension du monde naturel, pas de possibilité d'en tirer parti sans la mathématique. Il n'y a pas de construction, quelle qu'elle soit, dans le monde culturel et technique, créé par l'homme, qui n'emprunte sa forme, sa beauté et son efficacité fonctionnelle à la mathématique.

La mathématique est une composante maîtresse du pouvoir créateur et réalisateur des hommes. Elle est un bien et un droit pour chacun d'eux car elle est une des dimensions selon lesquelles il peut se réaliser.

Depuis que la puissance de compréhension et d'action de la mathématique est reconnue, c'est-à-dire depuis l'aube des civilisations, un effort de plus en plus vaste, de plus en plus conscient a été fait pour en promouvoir la connaissance et l'usage.

Les résultats à grande échelle, et peut-être aussi les acquisitions de pointe, sont-ils à la mesure des efforts investis ? Même les plus optimistes n'oseraient répondre oui.

Serait-il possible d'améliorer ce rendement et de le rapprocher du niveau de nos aspirations ? Comment pourrions-nous tenter de le faire ? Voilà les questions qui se posent.

En totalité, ou presque, les efforts vers un meilleur enseignement ont toujours été consacrés à mettre mieux au point le contenu mathématique et sa présentation pédagogique spécifique. Cette voie de progrès évidente et, semble-t-il, immédiate, pour être importante, est-elle la seule quand il s'agit d'introduire de jeunes intelligences à l'activité mathématique, de les y apprivoiser, de la leur rendre familière pour qu'elle soit plus assimilée et plus efficace ?

D'une manière générale, le côté psychologique, effectif et pour tout dire humain est négligé si pas inexistant.

Notre propos est d'examiner la question ensemble à la lueur, je voudrais dire à la lumière, de nos expériences quotidiennes et avec toute l'impulsion de nos vœux. Notre réflexion passera par cinq étapes dont les intitulés sont déjà une critique et un programme :

La discipline mathématique, les maîtres, les élèves, les enseignants, l'éducation mathématique ouverte.

I. La discipline mathématique

Parmi toutes les branches scientifiques, la mathématique est celle qui est le plus une discipline aux divers sens de ce mot.

Elle est d'abord un ensemble de connaissances et de méthodes que l'on apprend sous un maître pour ensuite, si l'on peut, devenir un artisan de son expansion.

Au sens usuel, elle est un ensemble de règles de conduite normalement assorties de sanctions qui s'imposent aux membres d'une collectivité.

Par extension, elle peut devenir un cadre de vie que l'on s'impose à soi-même (1).

La mathématique est une discipline exigeante. Elle est ainsi pour ceux qui la pratiquent même avec aisance. Elle l'est davantage encore, faut-il le dire, pour ceux qui la subissent comme un labeur imposé auquel ils demeurent étrangers.

Le caractère contraignant de la mathématique résulte d'un faisceau de propriétés qu'elle possède au plus haut degré parmi les sciences.

(1) Voir "Dictionnaire de la langue philosophique" par P. FOULQUIE et R. SAINT-JEAN, (PUF).

La mathématique est l'activité mentale la plus abstraite, la plus virtuelle par rapport au concret. Elle est la plus logique, la plus relationnelle, vide de contenu. Elle est la plus schématique, la plus formelle par ses figures, ses diagrammes, son formalisme, ses algorithmes. Elle est la plus systématique, la plus organisée, de façon hypothético-déductive, à partir d'axiomatiques qui définissent ses structures.

Toutes ces propriétés superlatives font de la mathématique, pourtant si ouverte à la création intellectuelle, une citadelle fermée, sévère et redoutable.

1 — La terreur mathématique

Les élèves et leurs familles considèrent la mathématique comme la branche la plus contraignante et la plus sévère. Cette opinion est renforcée par le rôle de crible de sélection auquel on fait servir la mathématique.

La mathématique se prête bien à cet usage car les épreuves ont, d'une part, un caractère d'objectivité et demandent, d'autre part, des qualités d'intelligence rationnelle, notamment celle de dominer une vaste matière fortement organisée.

La mathématique est la branche la plus cumulative qui soit. Dans les autres sciences, en physique, par exemple, il est possible de connaître une partie, la calorimétrie, en ignorant, pour ainsi dire, l'optique. En mathématique, tout se tient et, dès les éléments, un effort de mémoire synthétique est indispensable.

Ce caractère global et cumulatif est encore renforcé par la présentation plus moderne et plus structurée des matières, qui donne à la mathématique une solide unité. D'un autre côté, cette grande et forte connexion des parties entre elles, assurée par les notions fondamentales d'ensembles, de relations et de fonctions, est une aide pour maîtriser mieux l'abondance des faits. Encore faut-il avoir atteint le niveau d'où une vue synoptique est possible !

Beaucoup d'élèves, par défaut de mémoire, de capacité organisatrice rationnelle ou par manque de temps et d'exercice, sont débordés et bientôt noyés par l'abondance de la mathématique.

La panique des élèves qui sentent des trous s'ouvrir sous leurs pieds est bien connue ([1] p. 67, Jacques NIMIER "Mathématique et affectivité").

— "Alors, après ça, rattraper des lacunes en mathématiques, en quatrième, j'ai suivi tant bien que mal. En troisième, je reconnais que j'ai essayé de travailler. Mes parents m'ont fait donner des cours particuliers mais ça n'a pas réussi à rattraper toutes mes lacunes de maths, et j'arrive en seconde, je suis certain que je vais avoir des difficultés pour les problèmes de physique, car je vais avoir des lacunes en algèbre..."

Le travail et la bonne volonté peuvent ne pas être en cause ([1] p. 68)

— "L'année dernière, là, vraiment j'étais déroutée. Alors cette année encore plus, parce que je comprends les cours, je comprends et tout, mais après, quand il s'agit de refaire, après j'ai comme un trou, je n'y arrive plus."

Dans les autres branches ce n'est pas pareil, on peut gonfler ce que l'on dit par du baratinage. De plus, une erreur ne s'y propage pas comme en mathématique où une faute de calcul ou de raisonnement compromet tout le développement ultérieur ([1] p. 69) :

— "On se trompe d'un tout petit truc, ça y est, tout est en l'air !"

Pour l'élève peu sûr, la réussite lui apparaît comme un coup de chance. ([1] p. 71) :

— *"Par exemple, je suis devant un exercice de mathématiques à résoudre... Eh bien ! J'ai tout de suite l'impression que je n'y arriverai pas ou que, si j'y arrive, ce sera un coup du hasard."*

Dans les lettres, dans les arts, les œuvres portent la marque de l'artiste dont elles attestent la personnalité subjective.

Les sciences positives demandent à ceux qui les pratiquent d'effacer leur subjectivité par un renoncement, un oubli d'eux-mêmes.

La mathématique est, pour la plupart, une discipline aliénante entre toutes. Il en est ainsi parce qu'elle procède par abstraction et schématisation successives, chaque niveau étant atteint par un abandon du contenu du niveau inférieur.

Par perte progressive de contenu, les notions, par une manière d'ascèse, s'épurent, se simplifient, se vident de sens sémantique pour arriver à un stade logique qui peut se réduire à une syntaxe.

Voici comme cela s'exprime : ([1] p. 59)

E — *"Je trouve qu'on doit s'instruire dans les langues plutôt que d'apprendre une autre matière comme les mathématiques qui nous troublent l'esprit."*

N — *Comment les mathématiques troublent-elles l'esprit ?*

E — *Oui. Troublent l'esprit, car les mathématiques ce n'est que de la logique. Il faut avoir de la logique. Tandis que pour les langues, pour faire des langues, il faut avoir une certaine présence d'esprit ; c'est-à-dire que l'esprit marche mieux avec les langues qu'il ne marche avec les mathématiques... Et c'est pour ça que ça vient troubler l'esprit."*

Chez l'élève faible, le formalisme propre à donner plus de clarté, de concision et à permettre des calculs, est source d'incompréhension. ([1] p. 52)

— *"Car je ne sais pas, on pourrait très bien écrire les mathématiques dans notre langue plutôt que de mettre des signes, et je trouve que si c'était comme ça, plus de gens comprendraient. Parce qu'il faut apprendre un tas de signes, un tas d'expressions mathématiques, et beaucoup se trompent parfois."*

Que devient l'enfant assiégé par la forêt de signes lorsque ceux-ci, au lieu d'être introduits avec une signification, deviennent une typographie où l'automatisme des manipulations tient lieu de compréhension des opérations algébriques ?

Ecoutez ! ([1] p. 47)

— *"En mathématiques, on répète un truc ; c'est vraiment le bourrage de crâne."*

— *"C'était plutôt une sorte de mécanique, il fallait rendre un devoir, on le rendait..."*

— *"Quand on a un problème, j'apprends mes théorèmes et tout ça. Je les sais, je sais mes définitions, mais je fais mon problème machinalement."*

— *"En mathématiques, on fait quelque chose comme une machine."*

La mathématique isole du monde et des autres ([1] p. 55) :

— *"Et puis, ce qui montre aussi que les mathématiques coupent du monde, c'est qu'en ce moment je travaille, les mathématiques ne me servent à rien ; alors que les discussions, les idées que j'ai retenues, je peux toujours en parler avec n'importe qui."*

Alors si je parle comme cela à une fille, dans le bureau, de la surjectivité, premièrement je n'en verrai pas l'intérêt, elle non plus, et puis on aurait l'impression de se rendre un peu idiote, quoi, de parler de cela. Ben, c'est vrai !"

— *"Par exemple, en comparant avec la littérature, on peut se rapporter à des oeuvres et même à des personnages de roman ou bien à des auteurs qui puissent... je sais pas... vous reconforter, disons... vous soutenir ; alors qu'avec les mathématiques, il n'y a personne, on est seul."*

La rigueur disciplinaire de la mathématique, la déshumanisation aliénante de son abstraction, la mécanisation des exercices et des cours, le vide de son objectivité dépersonnalisante, sont surtout ressentis par les élèves vulnérables, à l'affectivité tendre et aux capacités logiques réduites. Ils tremblent et paniquent devant elle qui les hante comme un cauchemar. Comme le dit Jacques NIMIER ([1] p. 63) :

"Que pourrions changer des présentations plus rigoureuses, plus claires, de tel théorème à la compréhension de ceux pour qui les mathématiques sont associées à un fantasme de destruction et de mort ?"

2 — Les défenses contre les maths

Tous les élèves qui ne mordent pas à la mathématique ne semblent pas en souffrir. Certains ont des moyens de défense psychologiques.

Oublier et perdre de vue est une manière de prendre ses distances. ([1] p. 80, 82, 83)

— *"Par exemple, ce qu'on fait en ce moment : les ensembles, ça m'arrive, ça passe, c'est comme ça. Je pense maths, je pense à la chose en gros et puis c'est tout, ça s'en va."*

— *"J'apprenais ma leçon la veille de l'interrogation et puis c'était tout. Après, ça repartait pour un temps... et puis à la fin en troisième, ça conduit à un désintéressement complet. Là, j'avais totalement abandonné les mathématiques."*

En prendre son parti est aussi une protection ([1] p. 109, p. 113).

— *"Ça me reste là, ça me passe à trois milles."*

— *"Pour moi, les maths, c'est vraiment un autre monde, ça m'a toujours dépassé."*

— *"Les maths, je considère cela comme quelque chose de superflu, en plus ; ce n'est pas parce que j'ai un peu d'admiration pour ceux qui font des maths que je vais me dire que je vais faire beaucoup de maths pour être absolument semblable à eux, non, je ne crois pas. Sincèrement, je ne suis pas forte en maths, ça ne me prive pas et je ne m'en porte pas plus mal... ça dépend..."*

Un bon remède est la compensation. ([1] p. 83)

— *"Même, on arrive à une certaine fierté à être nul en maths. Par exemple, on se dit : moi je suis littéraire, et on abandonne complètement."*

— *"Ceux qui n'aiment pas les maths, ils les repoussent. C'est pas la peine de les obliger, ils les repoussent."*

La meilleure compensation est de dévaloriser la mathématique pour ne plus en sentir le manque ([1] p. 107) :

— *"J'ai jamais réussi à me mettre dans l'idée que ça pourrait être quelque chose d'important."*

— *"C'est parce que j'aime le français et, d'un point de vue idéologique, que je pense qu'il y a des problèmes qui sont beaucoup plus importants que les maths et en classe littéraire on peut en parler, tandis qu'en maths, je ne sais pas ce que cela viendrait faire."*

Il est vrai que, dans notre enseignement, la mathématique n'est pas utilisée pour étudier des problèmes vltaux importants. Cela conduit des élèves à des opinions radicales ([1] p. 107) :

— *"Pour moi, les x et les y , ça ne représente rien, c'est tout à fait abstrait."*

— *"Il fallait copier des théorèmes qui étaient complètement idiots."*

Cela va jusqu'à l'apostrophe ([1] p. 108) :

— *"Vous, en tant que prof de maths, vous y croyez vraiment, à tous ces théorèmes ?"*

L'agressivité à l'égard des mathématiques ne date pas d'aujourd'hui. Sans doute est-elle renforcée par notre société technicienne où les parents, avec anxiété, vantent les mérites, le prestige et la puissance de la reine des Sciences ([1] p. 110) :

— *"Mes parents pensent que c'est une matière importante. Quand on dit les maths, on pense en général la matière la plus importante, celle où on doit travailler le plus. Ensuite, les maths, on s'imagine que c'est la matière la plus difficile, la matière que l'on envie le plus, qu'on désire le plus."*

— *"Quand on sait que quelqu'un est bon en maths, on dit : Lui il est bon en maths. Parce qu'on sait que les maths, c'est un peu l'avenir en ce moment avec les ordinateurs ; alors les parents : c'est dommage que tu ne sois pas bonne en maths ! Qu'est-ce qu'il y a que tu ne comprends pas ?"*

Dans ce climat de valorisation de la mathématique, être nul est une tare ([1] p. 142) :

— *"Toujours... Depuis l'école primaire, toujours ça : une sorte de marque, nul en maths, inapte aux mathématiques."* et plus loin ([1] p. 147) :

E — *"Justement le danger, c'est que j'ai peur, je me suis habitué... c'est une sorte d'état qui dure depuis des années, je suis confiant en français et en langues et je suis pas du tout sûr de moi... je vis dans un climat d'insécurité en mathématiques ; donc je ne me fais pas du tout à l'idée de changer de situation, si je suis un peu plus confiant en maths, ce qui arrive, ce qui va se passer, là..."*

N — *Quel est le risque, alors ?...*

E — *Justement, j'ai peur de perdre,..."*

3 — La joie mathématique

Jusqu'à présent, nous avons ouvert tout grand le dossier à charge de la discipline mathématique. Il le fallait pour éprouver tout le poids avec lequel elle pèse sur les élèves qui la subissent. Par souci d'équité, il est juste de faire entendre la voix des élèves qui sont "bons en maths".

Ce témoignage est propre à reconforter les professeurs de mathématique dont certains pourraient ne pas avoir, au fond d'eux-mêmes, bonne conscience. Ils seront heureux d'entendre louer les joies mathématiques qu'ils éprouvent. ([1] p. 90)

E — *Au fond, on crée pas tellement le problème, on crée la solution. Enfin, elle vient de nous, c'est comme des objets qu'on fait, tout ça...*

N — *Vous fabriquez quelque chose, au fond.*

E — *Oui, en faisant des maths, on se fabrique quelque chose.*

Alors c'est pour ça... On aime bien, tout le monde aime bien fabriquer quelque chose, je pense... Parce que si on n'arrivait pas à fabriquer ce quelque chose, enfin..., trouver..., trouver la paix, avoir la joie justement de l'avoir fait, je crois qu'on n'en ferait plus...

Si vraiment on n'arrive pas..., au fond on n'aime pas, on abandonne parce qu'on n'arrive pas à sortir..., à faire quelque chose de soi. Et ça, ça énerve, ça agace ; on préfère faire quelque chose qui nous permettra de faire quelque chose de soi-même. Si on ne trouve pas, on est obligé de demander la solution aux autres."

N — *"Vous avez l'impression de fabriquer quelque chose, mais quelque chose qui vient de vous.*

E — *Ah ! Oui, qui sort de nous. Oui. Comme quelque chose qu'on a pensé, qu'on a trouvé, qu'on a montré. Parce qu'un raisonnement mathématique, ça se montre... Enfin, je pense. Alors quelque chose qu'on a montré, qui a été fait oui, par nous-même... Oui, parce qu'un problème, bien sûr le départ ne vient pas de nous, mais après ce qu'on doit faire, le plus important, ça doit être fait par nous. C'est ça qui apporte la satisfaction, une satisfaction personnelle d'avoir fait ce qu'on a fait."*

Pareil témoignage, dans la spontanéité du langage parlé qui se cherche pour s'exprimer mieux, décrit à merveille la satisfaction de celui qui "fait quelque chose" qui l'affirme à lui-même et aux autres.

La joie narcissique du créateur n'est pas dans la chose créée. Elle est dans la création de soi.

Il ne s'agit pas ici d'aimer, d'une manière contemplative et platonique, la mathématique faite mais d'aimer faire de la mathématique. En vérité, le mobile psychologique profond n'est-il pas, comme en toute chose, de s'aimer à travers ce qu'on accomplit bien ?

Comme le souligne J. NIMIER, la mathématique procure bien des joies ([1] p. 126).

Joie de voir clair.

— *"Hier, j'ai fait comme ça un chapitre qu'on n'avait pas fait et vraiment je ne comprenais rien du tout, et hier je suis arrivé à comprendre. Je comprenais pas..., c'est-à-dire qu'il y avait surtout un point qui était flou, et j'ai réussi, par moi-même, je suis arrivé à le rendre clair, et j'ai éprouvé cette satisfaction."*...

Joie de l'imprévu, fierté de se dépasser.

— *"Oui, de l'imprévu. Et puis on ne sait pas si on va arriver. On ne sait pas si on va trouver, et puis la joie une fois qu'on a trouvé..., de pouvoir dire qu'on l'a fait, de pouvoir l'expliquer aux autres... C'est ça qui pousse, qui pousse à en faire... Enfin, ça demande particulièrement de se surmonter puis de classer ses idées."*

Pour les élèves que leur capacité rend combatifs, la mathématique n'est plus une menace, un danger, une barrière. Elle est un obstacle, un adversaire qu'il faut vaincre ([1] p. 86, 87).

— *"Il y a deux solutions : on trouve ou on ne trouve pas. C'est simplement mon tempérament qui fait ça, mais si je ne trouve pas, je me sens vraiment vaincu, même malheureux, vraiment malheureux de n'avoir pas trouvé."*

Et puis, si je trouve, je me sens vraiment vainqueur... Si j'ai fait un problème... c'est un peu normal d'ailleurs... un problème qui est difficile et que j'ai réussi à faire, il est évident que je serai..., que là je me sentirai vainqueur."

Même cri de triomphe :

— *"Je me sens vainqueur, vraiment, quand j'ai trouvé... Dès l'instant où vous vous donnez un but, si vous l'atteignez, il est pratiquement évident que vous trouvez du bonheur... Si je réussis à le faire, vraiment je suis heureux."*

II. Les maîtres

1 — Une maîtrise difficile à acquérir

La variété et l'abondance de la prolifération mathématique sont telles qu'il est humainement impossible de maîtriser une connaissance assez approfondie des nombreux domaines de création.

Avoir une culture mathématique tenue à jour demande un effort considérable. Il est de plus aisé d'avoir une bonne information de la matière des programmes du niveau secondaire et d'en posséder une maîtrise raisonnable au prix d'un effort humainement possible. Un tel effort est surtout payant grâce aux structures fondamentales qui assurent à l'ensemble de ces matières beaucoup d'unité, de cohésion et, par suite, d'intelligibilité.

On sait que, par défaut de formation, l'enseignement mathématique n'est pas toujours assuré par des professeurs assez formés et en nombre suffisant.

De toute façon, le maître, quel qu'il soit, devrait, eu égard à l'effort qu'il a dû fournir pour acquérir son bagage de mathématique moderne, être assez proche de l'élève qui aborde cette matière.

Il n'en est malheureusement pas toujours ainsi.

Nous savons qu'un des traits de caractère de celui qui enseigne est le narcissisme. C'est lui qui nous porte à faire les meilleurs cours que nous pouvons. Si nous en sommes conscients, nous pouvons en limiter les effets en évitant de considérer les approximations ou les ignorances des élèves comme des injures personnelles.

2 — La domination des maîtres

Mais il reste des adultes qui font peser sur leurs élèves leur supériorité mathématique.

Ecoutez ce témoignage ([1] p. 53) :

— *"Le gars qui arrive les mains dans les poches, qui pose un problème de vingt lignes au tableau et qui le résout comme ça en cinq minutes, pour nous... sécher pendant des heures, ça me fait penser à un jeu : au chat et à la souris.*

Le chat, c'est le prof, et puis moi ? ... Salut les gamins ! Il y a des mecs qui ont trouvé ça, et vous, vous y arrivez pas ! ... Enfin, ce n'est pas une généralité. En tout cas, moi, ce que j'ai comme expérience mathématique, c'est ça ..."

Que penser encore de cette confiance : ([1] p. 70)

— *"Une chose m'a surpris ; il y avait une fille qui avait de bonnes notes au début de l'année et puis après, elle n'était plus forte. Alors le prof lui a dit : "Je croyais que vous étiez intelligente et vous ne l'étiez pas, mince ! Je*

réagit à cela ! Si les maths c'est l'intelligence, alors je ne dois pas en avoir beaucoup. Alors j'étais un peu découragée sur le moment, et puis je me suis dit : "Ca va en français, en langues ; il n'y a pas de raison, il doit y avoir plusieurs sortes d'intelligence."

Heureux cas où une enfant trouve en elle la compensation nécessaire à un jugement sur son intelligence qui pourrait la marquer d'une façon définitive.

On sait toute l'importance d'un bon rapport affectif entre un élève et celui qui l'enseigne et comment un lien de sympathie avec le professeur peut faire aimer la matière, amener à la travailler avec conviction et à la connaître.

3 — L'autorité en mathématique

En mathématique, en cas de contestation à propos d'une propriété ou d'une démonstration, c'est la mathématique elle-même qui doit être et rester l'arbitre. Le maître n'a pas le droit de faire acte d'autorité pour faire prévaloir son point de vue. Encore faut-il qu'il ait la simplicité et l'adresse de reconnaître, le cas échéant, que c'est l'élève qui a raison.

Il y a des professeurs qui, au lieu d'entraîner l'élève à recourir aux propriétés mathématiques, se bornent à répondre eux-mêmes aux multiples questions "Peut-on faire ceci ? Doit-on faire cela ?" La connaissance de la mathématique est alors travestie en un code d'obligations, d'autorisations et d'interdictions.

Par exemple, la distributivité de la multiplication sur l'addition que l'on peut exprimer : quels que soient les nombres a , b , c on a :

$$(a + b) c = ac + bc$$

est traduite en style d'obligation :

— "Pour multiplier une somme par un nombre, on multiplie chacun des termes de la somme par ce nombre et on fait la somme des produits obtenus."

Cette règle impérative est une sottise comme le montre l'exemple suivant :

$$(47 + 53) \times 7 = 100 \times 7 = 700$$

Un énoncé sous forme d'autorisation :

"Pour multiplier une somme par un nombre, on peut multiplier chaque terme de la somme par ce nombre et faire la somme des produits obtenus." n'est pas faux. Cette règle polarise la lecture de gauche à droite de l'égalité symétrique.

$$(a + b) c = ac + bc$$

Elle passe sous silence la lecture de droite à gauche, relative à la mise en évidence du facteur c . Pourquoi ne pas énoncer simplement la distributivité non comme une règle mais comme une proposition logique ?

"Le produit d'une somme par un facteur est égal à la somme des produits, par ce facteur, des termes de la somme initiale."

Au lieu d'interposer entre l'élève et la mathématique, sa propre barrière d'autorité, le professeur doit montrer à l'élève que lui-même est soumis à l'autorité de la mathématique. C'est à la fois éviter à l'élève l'impact de sa domination d'adulte et se placer à ses côtés devant la juridiction mathématique.

S'il ne faut pas mécaniser l'apprenti mathématicien par un téléguidage d'ordres et d'interdictions, il ne convient pas pour autant de l'abandonner à lui-même seul et sans aide devant la mathématique lorsque la tâche est trop lourde pour une jeune intelligence.

Les maîtres qui ont un contact pédagogique et humain adapté à chaque élève savent par une manière d'intuition ce qui convient de dire à l'un pour le sécuriser, à un autre pour le stimuler, à un troisième pour le défier, à un dernier pour l'encourager dans un effort jusque-là peu productif.

4 — Les maîtres à penser

Les vrais maîtres de mathématique sont, chacun à leur manière, avec les moyens que leur donnent leur science et leur personnalité, des maîtres d'apprentissage à penser. Proches de leurs jeunes disciples, ils savent les guider, cordialement, et leur faire découvrir comment on cherche, comment on se pose des questions, comment on devine, comment on contrôle, comment on bâtit une démonstration ou on résout un problème. Leur savoir-faire, leur art, est bien plus fait de psychologie, de contact humain que de mathématique et de logique.

Que chacun de nous se reporte au souvenir de ses professeurs et de ses maîtres.

Pendant que je vous parle, je suis avec émotion leurs portraits qui défilent dans ma mémoire où je les retrouve vivants. Ce sont des souvenirs fort anciens.

Le premier, le plus pitoyable de tous, suscite toujours la même commiseration. Il préparait ses cours avec scrupule, tenait un tableau noir modèle où il dessinait les figures en couleurs pendant les récréations. Il déchaînait un chahut épique de la part de braves garçons, sans pitié pour sa faiblesse. Parfois le chahut s'éteignait d'un coup devant l'apparition du préfet des études qui distribuait une retenue générale. Ce professeur avait découvert une démonstration du postulat d'Euclide et n'a jamais compris qu'elle ne valait rien.

Notre professeur de scientifique était l'humanité souriante, d'une élégance foncière morale, mathématique, vestimentaire. Nous travaillions tous ensemble dans un débat qu'il conduisait avec tant d'aisance naturelle qu'elle passait inaperçue. Il admirait les belles propriétés et nous faisait partager sa joie de les comprendre. Pour nous demander si nous avions saisi, il ne posait aucune question. Il nous regardait tour à tour, les uns après les autres, avec son sourire lumineux en nous désignant du menton et faisait entendre un affectueux gloussement de connivence ; puis nous demandait : *"Et alors ?"* La réponse était fixée comme dans un cérémonial : *"Il faut le mettre en mémoire, monsieur."* Tout cela m'a fait souvent penser à la phrase de Pascal : *"après m'être donné la joie de comprendre, il faut me donner la peine d'apprendre"*.

À l'université, les maîtres différaient beaucoup les uns des autres. Notre *"grand maître"* nous aimait autant qu'il aimait la mathématique. Il nous a fait pendant quatre ans exposer nous-mêmes tous ses cours : géométrie analytique, mécanique, géométrie projective, géométrie différentielle en assurant la contradiction. Vigoureuse contradiction, affectueuse et sans pitié ! Elle nous apprend l'art de présenter et de démontrer les propositions mathématiques.

Notre maître d'intuition enseignait la géométrie. Il peuplait l'espace des gestes de ses mains : toute propriété apparaissait avec évidence.

Notre maître de rigueur fut notre professeur d'analyse doublé d'un logicien mêlé aux controverses de Brouwer. Les professeurs de physique étaient deux savants, l'un avait la précision amène de l'expérimentateur, l'autre, l'enthousiasme souriant et communicatif de sa conviction einsteinienne.

Les maîtres de stage, très différents les uns des autres nous marquèrent tous très fort à leur manière. L'un qui était jovial et bon vivant nous montrait les liens de la mathématique et de la physique et comment on conduit avec conviction et fermeté une classe de quatrième que la puberté travaille. Le deuxième faisait la classe en redingote noire avec col blanc à coins cassés. Net en esprit comme au moral et au physique, il était aimé et craint de ses jeunes disciples qu'il retrouvait dans les camps de plein air de l'athénée où, en short comme un master scout anglais, il les aidait d'une main ferme à dresser une tente ou à passer une rivière à gué. Le dernier claudiquait un peu mais il avait l'intelligence brillante, une belle voix prenante et une culture plus vaste que celle d'un professeur de lettres.

Si je me suis permis d'évoquer les maîtres que j'ai eu la bonne fortune d'avoir, ce n'est pas seulement pour dire la reconnaissance que je leur dois mais c'est pour montrer combien ils étaient divers dans leur humanité. Plus que les mathématiques qu'ils m'ont enseignées, c'est l'humanité qu'ils avaient en eux qui est leur véritable message.

III. Les élèves

1 — *Connaissance des élèves*

Face à la mathématique, face au maître, face à l'environnement, face à notre monde, les élèves sont des enfants souvent démunis.

Des enfants qui nous préoccupent ou nous réjouissent, nous excèdent ou nous consolent, nous désespèrent ou nous réconfortent. Il en est ainsi parce que leurs faits et gestes, leurs inquiétudes, leurs joies, leur désarroi, leur confiance, leurs problèmes sont tous issus des nôtres qu'ils ne font, le plus souvent, qu'exprimer et répercuter devant nous. Tels ils sont, produits de notre société et de nous-mêmes. Nous n'avons qu'eux comme porteurs de nos espoirs. A nous de leur donner, pour leur vie, tout l'élan qui nous reste !

Notre rôle est de faire acquérir, par le plus grand nombre possible d'entre eux, l'instrument incomparable de pensée et d'action qu'est la mathématique. Mais notre science, si vaste et si solide soit-elle, restera vaine si nous ne connaissons assez les élèves qui sont nos compagnons de travail. Notre enseignement ne s'adresse pas à l'élève, concept abstrait, mais aux élèves, enfants ou adolescents concrets, présents dans une classe. Il nous faut une connaissance plastique qui se modèle assez sur chaque enfant afin de permettre une entrée en relation, une mise en confiance, un échange humain.

2 — *Les caractères*

Pour aider le professeur dans ses relations personnelles avec un élève, il faut en plus de la connaissance des fonctions communes à la psychologie de tous les hommes en général, la connaissance de ce qui caractérise la psychologie d'un élève pris en particulier. A coup sûr, il ne s'agit pas de suivre les mille détails de la psychologie individuelle, mais de rechercher le caractère c'est-à-dire, par définition, l'ensemble des manières habituelles de sentir, d'agir et de penser d'un individu [2].

La caractérologie a donné lieu à plusieurs courants de recherche :

- a) Détermination de quelques propriétés assez générales des conduites humaines pour permettre de caractériser dans son ensemble la conduite individuelle ;
- b) Etude des relations entre les différents traits de caractère ;
- c) Recherche des causes constitutionnelles ou psychologiques qui provoquent les conduites individuelles.

L'école française de caractérologie de Le Senne a écrit une série d'ouvrages destinés aux enseignants ; cette caractérologie s'attache, en effet, à l'étude des caractères généraux des conduites telles que l'on peut les observer directement dans la vie courante, en particulier, dans une classe, ce qui permet aux professeurs d'en tirer parti, de comprendre et de prévoir les comportements de ses élèves. [2], [3], [4], [5], [6], [7].

D'autres caractérologies qui se veulent plus profondes demandent les examens plus pénétrants du psychologue et du psychanalyste.

Les enquêtes caractérologiques que nous avons menées pendant des années successivement avec les élèves des classes supérieures de l'Athénée du Centre ont montré une variabilité des traits caractériels. Cette variation, surtout sensible au cours de la puberté, s'atténue dans les deux années supérieures, surtout en dernière année. Elle présente, dans la majorité des cas, une évolution vers la stabilité.

En fait, d'une part, les caractères apparaissent comme assez permanents pour qu'on puisse se fonder sur leur fixité relative dans la prévision des conduites. D'autre part, ils offrent, dans l'enfance et l'adolescence, une plasticité suffisante pour permettre une action éducative.

D'une manière générale, si on peut dire que le caractère conditionne les conduites, c'est une extrapolation gratuite que d'affirmer qu'il les détermine d'une façon absolue.

3 — Les facteurs caractériels de structure

Le point de départ des travaux de l'Ecole française a été les recherches entreprises par le psychologue G. HEYMANS et le psychiatre E. WIERSMA de Groeningen. ([1],[5]).

Les résultats ont fait apparaître que les multiples traits de caractère ne sont pas distribués au hasard dans un individu. Ils présentent entre eux certaines affinités qui les groupent sous un trait plus général ou facteur caractériel de structure. Les enquêtes ont dégagé trois facteurs de structure fondamentaux. Ce sont l'émotivité, l'activité et le retentissement des représentations.

Pour ceux d'entre vous qui ne connaissent pas la question, je vais me permettre d'en rappeler les grandes lignes. Cela vous permettra, en fin critique, de tester votre caractère.

L'émotivité

Tout événement dont nous prenons conscience produit en nous une émotion plus ou moins forte. L'intensité de cet ébranlement en rapport avec son objet permet de repérer la plus ou moins grande émotivité.

Un émotif est, dans des circonstances données, plus violemment ému que la moyenne. Il se troublera pour des motifs qui ne touchent pas la plupart des hommes et dont il est le premier à savoir qu'ils n'en valaient pas la peine. Les réactions extérieures de l'émotif sont souvent vives (cris, larmes,

explosions de joie, rougeur, pâleur, mouvement). L'émotif s'enthousiasme et s'indigne aisément, il passe facilement de la joie à la tristesse, a fréquemment le sentiment d'être malheureux ; il est susceptible, facilement blessé. Il est obsédé de doutes à propos d'actes sans importance, il est angoissé devant une tâche nouvelle. La timidité, la peur peuvent l'inhiber complètement.

La liaison des émotifs au milieu qui les entoure est forte. Ils peuvent y trouver une source d'énergie ou ressentir douloureusement combien ils sont perméables et, par suite, vulnérables.

L'inémotif, lui, garde son calme, n'est troublé que par les événements graves ; il accepte tranquillement les choses comme elles sont ; il est d'humeur égale, et se montre raisonnable ; il est plus isolé du réel, plus abrité, plus autonome.

L'émotivité s'atténue au cours de la vie, ou tout au moins elle réduit ses manifestations. La majorité des adolescents sont émotifs. C'est leur émotivité qui leur donne l'allant et l'enthousiasme. Cependant, ils sont surtout sensibles à la vulnérabilité qu'elle cause. Sans exception, les étudiants qui ont répondu à mes enquêtes, même les inémotifs, ont souhaité sentir diminuer leur émotivité. Sans doute faut-il y voir le désir de devenir plus maître de soi, comme l'adulte. N'est-ce pas aussi dû à ce que l'émotivité, dont le rôle dynamique est si important dans la recherche, rend aussi très sensible à la moindre perturbation et ne permet pas une concentration aisée ?

L'activité

L'activité apparente est le comportement de celui qui agit et s'agit beaucoup ; elle doit être distinguée avec soin de l'activité au sens caractérologique qui est la disposition à agir de soi-même avec aisance.

L'actif vit pour agir, l'inactif agit contre son gré. Il ne faut pas s'y tromper, l'inactif caractériel, s'il est émotif, pourra avoir une activité extérieure débordante à condition d'être poussé par son émotivité ; mais après son effort, il restera abattu, incapable de réagir pendant tout un temps. L'actif, au contraire, récupère aisément, il a le sommeil tranquille, réparateur, il peut veiller sans grande fatigue : l'action lui coûte peu. Il est sans cesse occupé, sans obligation autre que son besoin d'agir ; il contrôle le travail qu'il donne à faire. Les difficultés le stimulent, il prend des décisions immédiates et les exécute sur le champ. La vue du travail d'autrui l'excite à passer à l'action.

Pour l'inactif, le rêve, la distraction passive, la contemplation immobile de l'action d'autrui sont les plus agréables emplois du temps. Le passage de la décision à l'exécution est pénible. Il est porté à différer ce qu'il doit faire, il se décourage facilement à la moindre difficulté.

Faut-il le dire ? L'activité caractérologique est une disposition précieuse, un gage de succès dans les études et spécialement dans les études de mathématiques. Ceux qui ne la possèdent pas doivent fournir un effort énorme pour un maigre résultat. Ce sont souvent des élèves au long labeur improductif ; ceux dont les parents, qui se laissent prendre au change, disent : "si vous saviez comme il travaille tard, monsieur, il ne sort jamais !"

Le retentissement des représentations

Toutes nos représentations et nos impressions exercent sur nous deux actions. Une action immédiate qui a lieu pendant que les représentations sont effectivement présentes à la conscience claire, c'est leur fonction primaire. Une action différée ou secondaire qui se prolonge lorsque les représentations ont disparu du champ de la conscience.

Ces deux fonctions sont appelées la primarité et la secondarité. Selon qu'un individu est mu surtout par la primarité ou la secondarité, il est dit primaire ou secondaire.

Chez le primaire, une donnée mentale actuellement présente à la conscience refoule les effets des données passées. Le primaire vit intensément l'instant présent. Il est spontané, sans rancune, rapide et superficiel. Ses joies, ses peines, ses colères, ses bonnes résolutions sont toutes passagères, extérieures et sans prolongement.

Chez le secondaire, il y a rémanence de la donnée mentale. Le secondaire relie son action présente au passé et la projette dans l'avenir. Il est l'homme des souvenirs et des prévisions, il oublie difficilement les injures et les bienfaits, il fait des plans, des programmes. Ses émotions, canalisées dans l'instant, sont plus intérieures et s'étalent dans la durée. Ses réactions sont lentes, profondes, organisées.

La primarité, liée à l'activité, donne des élèves réactifs, pétillants, toujours prêts à répondre, à intervenir, à prendre la parole pour dire une étourderie ou proposer une bonne idée.

En mathématiques, ce sont des primaires caractériels qui animent les classes inférieures de la vivacité de leurs réponses.

La secondarité, surtout en l'absence d'émotivité, fait des élèves réfléchis qui se taisent, se concentrent et ruminent, le visage fermé, lorsque la question est posée. Leurs connaissances sont organisées et gardées par une mémoire fidèle. Si leur activité est suffisante, ils savent développer une idée, suivre le fil d'une démonstration sans perdre de vue ce qui est donné, ce qu'on demande, ce qui est acquis, ce qui reste à faire.

Si le primaire peut avoir, à ses bons moments, un coup d'oeil prompt et sûr, il a plus rarement l'art d'exploiter les trouvailles, tandis que le secondaire peut tirer parti de ses souvenirs et a des intentions qui portent loin. Cela explique, semble-t-il, que dans le passage des classes inférieures aux classes supérieures, des primaires qui avaient le premier rôle passent au second plan. D'autant plus que les motivations lointaines, la considération de l'avenir et de la carrière, qui agissent sur les secondaires, les laissent indifférents.

Un secondaire n'oublie pas un encouragement ni une réprimande. Il faut savoir que les paroles du maître sont livrées à sa rumination intérieure, qu'il ne faut ni les grossir ni les répéter ; tandis que le primaire a besoin de patientes redites. Sans y mettre la malice que le professeur imagine, il se délie parfois de toute promesse, oublie les conseils, perd de vue les travaux dont la remise est lointaine. Les études, surtout les mathématiques, développent une secondarité acquise, sans faire disparaître réellement la primarité foncière.

Toutefois, je garde le souvenir de ces élèves, bohèmes des mathématiques, qui, malgré tous mes efforts et mes encouragements, n'ont jamais dépassé l'illumination de la trouvaille.

Les types fondamentaux

Chacun des facteurs caractériels : émotivité, activité, retentissement peut présenter des degrés de plus ou moins grande intensité. Tout individu est plus ou moins émotif, plus ou moins actif, plus ou moins primaire ou secondaire.

Si nous ne considérons schématiquement que les extrêmes, ces facteurs ne présenteront plus que deux intensités :

émotif : E	non émotif : n E
actif : A	non actif : n A
secondaire : S	primaire : P

Associations de toutes les manières possibles, une intensité extrême d'un facteur avec chacune des intensités des deux autres facteurs, nous obtenons huit cas :

Emotif, actif, secondaire :	E A S ;
Emotif, actif, primaire :	E A P ;
Emotif, non actif, secondaire :	E n A S ;
Emotif, non actif, primaire :	E n A P ;
Non émotif, actif, secondaire :	n E A S ;
Non émotif, actif, primaire :	n E A P ;
Non émotif, non actif, secondaire :	n E n A S ;
Non émotif, non actif, primaire :	n E n A P ;

A chacune de ces associations, correspond un type de caractère parfaitement défini. Ces types caractériels sont des concepts abstraits, résultant d'une classification dichotomique. Il ne faut pas s'attendre à les trouver réalisés rigoureusement par des individus concrets. En fait, ceux-ci peuvent être situés relativement aux types purs. Ces derniers constituent donc un système de référence auquel on rapporte les caractères réels.

Le système de types de HEYMANS, WIERSMA se montre en pratique un repère commode. Pour faciliter le langage, les auteurs ont introduit des dénominations particulières. Ce sont :

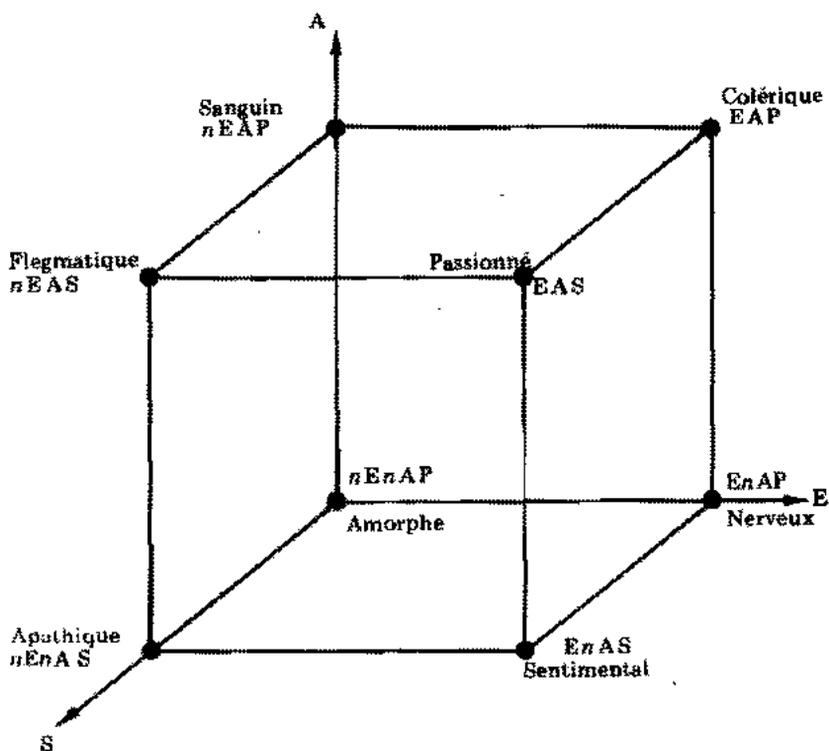
Passionné :	E A S,
Colérique :	E A P,
Sentimental :	E n A S,
Nerveux :	E n A P,
Flegmatique :	n E A S,
Sanguin :	n E A P,
Apathique :	n E n A S,
Amorphe :	n E n A P.

Pour représenter aisément les ressources du repère psychologique constitué par les huit types fondamentaux, nous pouvons avoir recours à une figuration géométrique.

Sur trois arêtes d'un cube, issues d'un même sommet, plaçons des axes correspondant respectivement aux trois facteurs E, A, S. Convenons que le sommet origine représente l'amorphe n E n A P et que les seconds sommets sur les axes E, A, S correspondent respectivement à E n A P (nerveux),

$nE A P$ (sanguin), $nE nA S$ (apathique). Aux extrémités d'une même diagonale, plaçons les caractères antagonistes qui s'opposent par chacun des facteurs tels que :

- $E A S$ (passionné) et $nE nA P$ (amorphe)
- $E A P$ (colérique) et $nE nA S$ (apathique)
- $nE A S$ (flegmatique) et $E nA P$ (nerveux)
- $nE A P$ (sanguin) et $E nA S$ (sentimental)



Un individu concret dont les facteurs E, A, S, présentent, dans des échelles qualitatives données, des intensités déterminées, sera représenté par un point du cube. On verra de la sorte comment il se situe par rapport aux types de référence.

L'étude des corrélations entre les traits de caractère a permis de déterminer quels sont les plus fréquents de chaque type et a fourni une base statistique au signalement de chacun.

L'école française de caractérologie a établi ces signalements avec beaucoup de soin dans une forme qui est directement utilisable par le professeur. Plusieurs ouvrages de caractérologie relatifs à l'éducation montrent combien les connaissances en la matière sont précieuses pour comprendre les élèves et leurs problèmes ([4] [5] [6] [7]).

4 — Propension à la mathématique

D'après la description qui en a été faite, l'activité et la secondarité sont des facteurs qui donnent à l'intelligence investie dans un caractère qui les possède une propension à faire de la mathématique avec aisance et succès.

Il est intéressant que des professeurs de mathématique qui se sentent doués pour cette science, examinent avec objectivité dans quelle mesure ils possèdent ces deux facteurs. Nous pourrions aussi relire de ce point de vue les déclarations qui ont été faites par les élèves.

En fait, les deux types caractériels où se trouvent le plus de mathématiciens sont les passionnés et les flegmatiques. ([2])

Nous en donnerons le signalement. ([10])

Les passionnés (EAS)

Dès la fin de l'enfance, le passionné se manifeste par un ensemble de traits : impressions fortes, don de l'observation, action décidée et vigoureuse, esprit de suite, amour de l'indépendance et goût de la ponctualité, absence de vanité jointe à une fière idée de soi, bonne foi, serviabilité, bonté pour les faibles, amitié pour les animaux, amour de la famille et de la patrie.

Adolescent, le passionné a une activité qui anime sa raison et une raison qui lui fait choisir ses actes. Il est le sens de la droiture et de la justice.

Souvent bien adapté à ses condisciples et au maître, il peut, de façon réfléchie et sans ostentation, pour une bonne cause, affronter un groupe de chahuteurs ou tenir tête à l'autorité.

La rapidité et la vigueur de son intelligence, son sens du concret, sa réflexion, sa mémoire organisée en font un bon élève, souvent un excellent étudiant dans les lettres, les sciences naturelles et les mathématiques. Il travaille seul consciencieusement pour essayer avec plaisir ses jeunes forces. Il aime la géométrie qui parle à son goût du concret et qui demande si souvent autant d'imagination que de logique.

Les flegmatiques (nEAS)

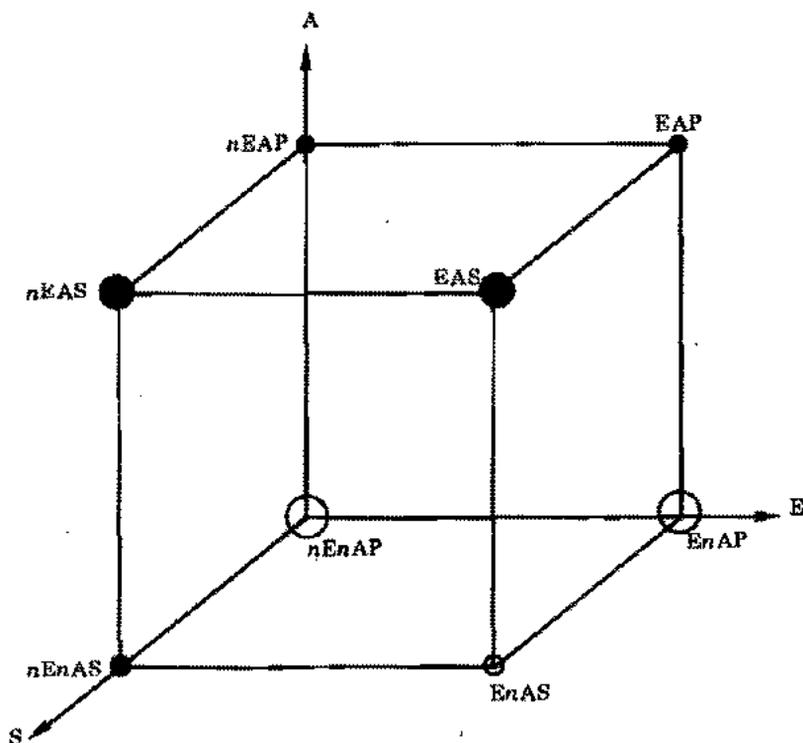
Le jeune flegmatique montre assez tôt qu'il sait raisonner, son intelligence est conceptuelle, méthodique, parfois un peu lente mais sûre. Son sens de l'ordre, sa ponctualité, son besoin d'habitude font du flegmatique le plus scolaire des élèves : régulier, docile et travailleur. Très objectif, dépourvu d'affectation, digne de foi, il a le sens de l'humour et l'humour égale. Il est plein de patience et de ténacité. Il a le goût des systèmes abstraits, des principes, des règles et des lois. Il prend aux mathématiques un vrai plaisir. Son sens moral est élevé, son civisme profond. Quoique les professeurs n'aient qu'à se louer de la docilité du flegmatique, il convient qu'ils cultivent son émotivité faible afin de ne pas le laisser s'enliser dans les tâches scolaires.

5 — L'opposition à la mathématique

Les caractères les plus naturellement fermés si pas hostiles aux mathématiques sont, d'une façon générale, les amorphes (nE, nA, P) et les nerveux (E, nA, P) qui manquent à la fois d'activité et de secondarité. Les colériques (E, A, P) et les sentimentaux (E, nA, S) montrent souvent peu de goût naturel, à cause de leur émotivité qui n'est pas servie par la primarité des premiers et par le manque d'activité des seconds.

Enfin on trouve, parmi les sanguins, (nE, A, P) et les apathiques (nE, nA, S), dont l'émotivité est faible, quelques élèves qui affirment des dispositions moyennes en mathématiques, surtout dans les classes inférieures.

Dans les classes suivantes, le manque de secondarité des sanguins et l'activité des apathiques ne leur permet pas de tenir leurs promesses des premières années.



Nous avons figuré les dispositions caractérielles aux mathématiques par des disques ou des cercles placés aux sommets du cube de référence. Ces disques et ces cercles (grands ou petits) indiquent respectivement une disposition favorable ou non.

La configuration montre clairement comment joue l'opposition des caractères antagonistes.

6 - Capacité d'apprendre la mathématique

La caractérologie confirme l'existence de types plus disposés à la mathématique et accrédite ainsi, d'une certaine manière, l'existence de la bosse congénitale.

Il ne faut pas en conclure que la capacité d'apprendre serait refusée à ceux qui ne la possèdent pas. Notre système d'enseignement accorde en général le même temps pour acquérir un volume donné de connaissances. Si un

élève décroche et échoue, il recommence son année avec le même programme et à la même cadence. Cette pratique défavorise et humilie les élèves lents d'esprit. Sont-ils pour autant moins réfléchis et moins intelligents ? Je me rappelle le plus logicien de mes maîtres. Il était incapable de répondre du tac au tac à une objection. Il la notait soigneusement et, le lendemain, nous apportait une mise au point écrite, définitive.

Un psychologue et éducateur américain, John Carrol, suggéra, il y a quelques années, une autre manière de voir que d'admettre que l'habileté mathématique est telle que les étudiants qui ne l'ont qu'à un faible degré ne peuvent pas apprendre autant de mathématique avec autant de profondeur que les étudiants mieux doués au départ. Il avança l'hypothèse que tous, ou presque tous, peuvent être amenés au même degré d'accomplissement dans n'importe quelle branche, mais que la quantité d'instruction qui serait nécessaire pour porter un étudiant à un niveau donné varierait d'un étudiant à l'autre.

A ce moment, le School Mathematics Study Group organisa une expérience qui confirma cette hypothèse. ([8] p. 105)

Deux groupes d'étudiants, l'un expérimental, l'autre de contrôle, furent constitués au niveau de la septième année (12 - 13 ans) et au niveau de la neuvième année (14 - 15 ans). Les deux groupes expérimentaux étaient d'une habileté en-dessous du médian (du 25ème au 50ème percentile), tandis que les deux groupes de contrôle étaient d'une habileté au-dessus du médian (du 50ème au 75ème percentile). Dans chaque cas, le groupe expérimental et le groupe de contrôle reçurent le même programme de mathématique, et utilisèrent le même livre. La seule différence est que les groupes expérimentaux eurent deux ans pour étudier la même matière que les groupes de contrôle couvrirent en un an comme d'habitude, ces groupes de contrôle entrant en action une année après les groupes expérimentaux.

L'analyse des résultats des tests administrés en fin d'expérience montra qu'en septième année, les étudiants du groupe expérimental répondaient presque, mais pas tout à fait, aussi bien que les étudiants du groupe de contrôle. De plus, il apparut que les étudiants du groupe expérimental avaient appris beaucoup plus en deux ans qu'ils ne l'auraient fait en une année ordinaire. En neuvième année, les étudiants du groupe expérimental eurent, à la batterie des tests finale, de meilleurs scores que le groupe de contrôle.

Cette expérience montre comment on peut amener à un bon niveau un élève faible, à condition de lui permettre de consacrer, à un programme prévu pour un an, les deux années qui lui sont nécessaires. Ce système de deux années d'étude pour une est plus efficace que le système de redoublement d'année qui humilie l'élève en lui faisant recommencer, au même rythme, toutes les branches.

IV. Les enseignants

1—Le contrat avec l'élève

Enseigner la mathématique ce n'est pas la présenter à un auditoire dans des exposés même magistraux. Enseigner la mathématique c'est en assumer l'apprentissage de la part des élèves en les guidant, les stimulant dans les meilleures conditions possibles.

On sait que les conditions matérielles : programmes, horaires, population des classes, matériel didactique, locaux... ne sont souvent pas idéales et parfois, il s'en faut de beaucoup ! Que faire ? Laisser tomber les bras ? Bâtir

un réquisitoire de critiques et de griefs, même fondés, pour transférer à d'autres la responsabilité d'une situation défavorable dès le départ ?

En dépit de tout, ne vaut-il pas mieux faire face, en pensant à l'avenir des élèves ? Ils pâtissent comme nous de la situation présente. Ils auront à vivre une vie déjà hypothéquée par elle.

Quelles que soient les actions menées en dehors de l'école pour la mettre à la hauteur de ses responsabilités, il reste pour chacun de nous, dans notre classe, à remplir le contrat que nous avons avec nos élèves, bien plus encore qu'avec la société. Le contrat est de les prendre par la main là où ils sont et humainement, de toutes nos forces, de tout notre coeur, de marcher avec eux, comme ils peuvent, le plus loin possible, dans la voie de leur formation d'homme.

2 — Le rendement du professeur

Comment apprécier notre rendement de professeur de mathématique ? Cette évaluation est très malaisée ([8]).

Suffit-il d'observer un professeur en action, du fond de sa classe ? Ce jugement fragmentaire pourra être très différent s'il est porté par un directeur, un inspecteur, un collègue. D'ailleurs, la présence de l'observateur étranger est un élément de perturbation dans le comportement des élèves et dans celui du professeur.

Cependant l'efficacité d'un professeur est une question capitale car beaucoup de décisions reposent ou devraient reposer sur elles quant à la formation, l'emploi, la promotion et le recyclage des enseignants, sans parler de la mise en oeuvre des programmes, de l'usage des manuels, etc...

A cause de l'importance du problème, le School Mathematics Study Group, l'une des équipes qui, aux Etats-Unis, a déployé le plus de moyens dans la modernisation de l'enseignement, a mené depuis 1962 une vaste enquête qui a duré cinq ans ([8]).

Puisque les jugements sur l'efficacité d'un professeur sont sujets à caution, il fut décidé de mesurer cette efficacité seulement en termes de l'acquis dont les élèves témoignent. Cet acquis fut apprécié sur deux points : la capacité au calcul et la compréhension de concepts mathématiques. Ces éléments, faut-il le dire, pour fondamentaux qu'ils soient, ne constituent qu'une faible partie des objectifs d'un enseignement de la mathématique.

Les comparaisons furent conduites selon toutes les règles du testing à l'américaine. Les résultats en furent décevants !

Dans chaque cas, il y eut des différences significatives et dans la plupart des cas, des variations très grandes dans l'efficacité des professeurs. Mais ces variations ne semblaient pas en corrélation avec ce qui était connu d'autre concernant les professeurs. Or, pour chacun de ceux-ci, une grande quantité d'informations avait été rassemblée. Ces informations étaient de deux espèces : la première était constituée de données de fait : âge, sexe, expérience de l'enseignement, formation au-delà du minimum requis pour la fonction, recyclage récent, etc. La seconde, dont on escomptait un effet sur le rendement des élèves, consistait en des renseignements sur la personnalité du professeur et ses attitudes vis-à-vis de l'enseignement de la mathématique et des élèves. Cette dernière information avait été extraite des réponses du professeur à de longs questionnaires.

L'analyse de régression montra que dans tous les cas, cette quantité étendue d'information relative aux professeurs ne rendait compte que d'une faible fraction de la variance, dans la plupart des cas moins de 10%, dans l'efficacité d'un enseignant.

Constatons que les résultats décevants de cette large enquête, obtenus à l'aide de moyens considérables, ne portaient que sur l'habileté des élèves en calcul et sur la compréhension de concepts mathématiques. Or les objectifs de l'enseignement sont beaucoup plus vastes car ils couvrent toute la formation aux connaissances et aux méthodes de la mathématique proprement dite et aussi les capacités d'application des modèles mathématiques au monde réel. De plus, au-delà des objectifs précédents qui lui sont spécifiques, la mathématique participe de façon importante à des objectifs généraux de l'éducation qui concernent la formation intellectuelle, esthétique et morale de la jeunesse. De tous ces objectifs nombreux et variés, seuls les plus sommaires peuvent faire l'objet d'une épreuve de contrôle : examens ou tests. Tous les autres objectifs plus complexes et plus élevés ne se laissent pas saisir à l'aune d'une mesure aussi rudimentaire. Leur évaluation toute qualitative se fait à plus longue échéance.

3 — Les bons juges

Qui peut être bon juge du rendement et de la qualité d'un enseignement ? D'abord le professeur lui-même, s'il a, vis-à-vis de son travail, suffisamment d'esprit critique, de bon sens, d'exigence et de conscience pour ne pas se mentir à lui-même.

Les meilleurs juges restent nos élèves ; ils nous voient vivre sous leurs yeux, dans nos bons comme dans nos mauvais jours et, derrière le professeur que nous leur présentons, ils savent, avec une intuition d'enfant, parfois impitoyable, découvrir l'homme ou la femme que nous sommes. En ce qui me concerne — le moi est haïssable — lorsque j'étais professeur des classes de "scientifique" où l'horaire est de sept, huit, voire dix heures de cours de mathématique par semaine, pour honorer un programme diluvien préparant aux "Grandes Ecoles", je me suis demandé quel sobriquet mes disciples m'avaient décerné. J'appris que je n'avais pas de surnom mais que j'étais, selon les jours et le climat de la classe, désigné par trois appellations différentes et significatives. A la fin de certains jours, j'étais "Servois" très sèchement. Il m'arrivait en des temps meilleurs d'être "Willy". Puis je devenais "le père" avec toute l'affection et le sens psychanalytique que ce nom peut avoir dans une tête d'adolescent. J'ai fait de moi mieux pour être souvent "le père".

Le jugement sur nous-mêmes et sur notre action éducative se précisera et se fixera dans l'esprit de nos élèves quand ils deviendront à leur tour des adultes. Alors leurs avis seront sans appel comme sont nos opinions d'hommes sur ceux qui furent nos maîtres.

4 — Témoins de l'homme

Enseigner est un métier difficile, peut-être impitoyable, car nous ne pouvons donner à nos élèves que ce que nous sommes.

Le meilleur de notre enseignement, c'est, en fin de compte, l'humanité qui est en nous.

Si nous ne proposons rien d'humain, notre rôle est dérisoire.

Ecoutez plutôt : ([1] p. 50)

E — *“Par exemple, M. X..., pour moi, c'est pas M. X..., c'est un livre. J'aimerais bien le connaître à l'extérieur de son cours, de sa petite craie et de sa blouse blanche...”*

N — *“Qu'est-ce qui vous en empêche ?”*

E — *“Eh bien ! ça doit être cela : le fait que je le considère comme un livre, pour moi, il n'est devenu qu'un livre, j'ai effacé sa personnalité qui était derrière le livre. Pour moi, c'est un livre ambulant, c'est tout.”*

Pour enseigner la mathématique, il convient certes de bien la connaître. Mais cette condition nécessaire est loin d'être suffisante si l'on veut apporter dans son métier l'humanité sans laquelle on ne fait qu'un travail sec, desséchant et improductif.

5 — Tact d'adaptation

Sur le plan du contenu même de l'enseignement, il faut être assez psychologue pour adapter ce que l'on fait aux capacités réelles des élèves. Voici ce que disent les instructions pédagogiques belges : ([9])

“Le professeur tirera parti de la liberté pédagogique qui est sienne pour organiser les matières dans un ordre qui se prête le mieux à l'acquisition conceptuelle et pratique des notions mathématiques.”

“Il veillera à montrer, par des applications bien choisies, l'intérêt et la portée de la théorie. En ce qui concerne celle-ci, bien que les possibilités d'abstraction des élèves soient plus grandes que les années précédentes, le professeur nuancera ses exigences quant à la connaissance des démonstrations. Si certaines d'entre elles peuvent être trouvées par les élèves, d'autres, plus subtiles tout en étant compréhensibles, ne doivent pas être mémorisées. Enfin, des développements théoriques que le professeur présenterait pour apaiser ses scrupules mathématiques, seront remplacés plus utilement par des travaux où l'activité des élèves a la meilleure part.”

De telles précautions psychologiques sont de mise pour éviter que des professeurs, par narcissisme, commettent dans leur cours “le péché théorique” en perdant de vue que la mathématique est d'abord un savoir-faire qui ne s'acquiert que par l'engagement personnel.

6 — La formation psychologique

Il est indispensable que les enseignants, en particulier ceux responsables de la mathématique, aient une formation psychologique adaptée à leur rôle et à leur responsabilité.

Nous y verrions d'abord des notions suffisantes de psychologie générale mais surtout de psychologie différentielle. Tandis que la première permet de comprendre le développement génétique des adolescents des points de vue affectif, intellectuel et moral, la seconde donne la base de connaissances caractérologiques nécessaires à l'approche et à la compréhension humaine des êtres dans leur individualité propre.

7 — La caractérologie

Est-il nécessaire de souligner l'intérêt de l'étude du caractère dans l'exercice quotidien de l'enseignement ?

En premier lieu, il importe que le professeur connaisse son propre caractère. C'est d'abord une manière de préciser la part de subjectivité psychologique qui se manifeste dans tous les jugements portés sur les élèves et sur les matières enseignées.

Il suffit d'assister à un conseil de classe pour remarquer combien les appréciations relatives à un même élève varient d'un professeur à l'autre. Certes, les disciplines enseignées peuvent révéler des aspects différents, mais il faut compter dans toute appréciation une part importante due à la projection du caractère du professeur sur l'élève.

Imaginez un professeur de français qui soit un colérique, un professeur de mathématique flegmatique et un professeur de musique nerveux. Voici leur avis à propos du même élève.

— *"Elève intelligent, consciencieux mais plutôt scolaire dans ses analyses littéraires où il manque de tempérament."*

— *"Elève très doué en mathématique, d'un esprit logique qui dépasse son âge, très ouvert à l'abstraction. D'un naturel doux, il n'aime guère être chef d'équipe."*

— *"Elève quelconque, pâle, qui n'a rien dans le ventre."*

Pour celui qui connaît le profil caractériel complet de l'élève en question (1) ces trois avis de professeurs s'expliquent en partie par le fait que chacun d'eux valorise, dans le caractère du jeune homme, les traits qui sont propres à son caractère personnel et rejette les autres.

Dans l'ensemble des professeurs de mathématique se trouvent naturellement surtout du point de vue caractérologique des passionnés et des flegmatiques, quelques sanguins, et un peu de colériques et d'apathiques, ces professeurs sont en opposition de caractère avec les élèves nerveux, amorphes ou sentimentaux. Cela explique nombre de tensions dans les classes. D'autant plus que la plupart des professeurs ayant été d'assez bons élèves en mathématique, ils ne sont pas les mieux placés pour comprendre sans effort ceux de leurs élèves qui n'ont pas les mêmes dispositions naturelles.

Adaptation des conduites

Le professeur doit se connaître et connaître l'élève individuel pour mieux s'adapter à ce dernier en vue d'un rendement meilleur. Une remarque, un encouragement, on le sait, ne doivent pas être les mêmes pour tous les élèves.

Un sentimental, un flegmatique sont sensibles à une remontrance ou à un encouragement d'ordre moral qu'ils prolongent et méditent longuement.

Un colérique aimera être soulevé par une remarque un peu vive.

Un nerveux sera sans cesse à reprendre et à encourager ; il pourra se durcir sous une avalanche de reproches ; s'il est large et par conséquent content de lui, il tiendra tête et se parera d'un prestige aux yeux de toute la classe. Sous la même avalanche, l'amorphe restera impassible et sourira doucement. Il faudra lui parler de notes et de résultats.

Adaptation des groupes

La même diversité se montrera dans la réussite de l'enseignement individuel ou collectif.

Les flegmatiques, les sentimentaux travaillent et jouent seuls comme les apathiques.

(1) Comprendent en plus des trois facteurs fondamentaux E, A, S, six facteurs complémentaires : ampleur du champ de conscience, passion intellectuelle, polarité, tendresse, intérêt sensoriel, avidité [10].

Les colériques et les amorphes aiment les équipes, les premiers pour les mener, les seconds pour y trouver un courant qui les porte.

Les passionnés peuvent tour à tour être solitaires ou dominateurs.

Les sanguins tireront parti des autres avec opportunisme.

Adaptation des épreuves

Nos méthodes d'appréciation, suivant leur nature, favorisent l'un ou l'autre type.

Les flegmatiques et les amorphes ont la longue patience nécessaire aux examens écrits où les passionnés rongent leur frein et où les nerveux doivent être rappelés à l'ordre.

Les colériques et les sanguins étonneront par leur aisance dans les examens oraux qui sont des séances de torture pour les sentimentaux.

Les tests qui déconcertent certains flegmatiques par leur nouveauté, présenteront aux nerveux un jeu original auquel ils pourront s'appliquer un court moment. On comprend que, indépendamment des aptitudes, les tests, les examens écrits ou oraux ne peuvent donner des résultats concordants.

Pronostics caractériels

Les tests d'aptitudes intellectuelles, dans la mesure où ils détectent l'intelligence nue, ne peuvent fournir que des pronostics hasardeux puisqu'ils s'agit toujours, dans le travail intellectuel, de l'intelligence investie dans un caractère et subordonnée à lui : à ce point de vue, P. GRIEGER a relevé des corrélations significatives entre l'intelligence et le caractère [6].

La caractérologie permet peut-être un pronostic plus sûr parce qu'il est basé sur des manières de sentir, d'agir et de réfléchir qui sont des attitudes profondément ancrées dans l'individu.

8 - La psychanalyse

Plus profonde que la description caractérologique des manières habituelles de se comporter d'un individu est l'explication psychanalytique de ce comportement.

Dans ce domaine aussi l'enseignant doit avoir une information adéquate qui lui explique les racines subconscientes d'attitudes, parfois étranges, de maints élèves.

Dans les sciences positives, surtout en mathématique, une sorte d'hygiène rationnelle consiste à mettre hors-circuit, consciemment, les aspects psychologiques et affectifs. Mais une telle attitude d'exclusion, de grande commodité méthodologique apparente, n'abolit pas les éléments perturbateurs : elle les refoule dans les profondeurs du subconscient. Notamment en mathématique, comme le souligne J. NIMIER [1], il y a lieu d'y prêter attention pour dépister des raisons d'échecs, de refus ou de haine.

Par sa nature contraignante, impersonnelle, la mathématique apparaît à certains individus comme une discipline aliénante et dominatrice qui alimente en eux les fantasmes de l'imaginaire.

Les enseignants de la mathématique qui ont, comme les élèves doués, réglé assez tôt les problèmes subconscients, croient souvent que leur discipline se situe entièrement au niveau de la conscience dans la lumière de la raison.

Cependant des pulsions subconscientes se manifestent déjà par des questions de vocabulaire.

Cet professeur est soulagé lorsqu'il parle "de factoriser un polynôme" plutôt que de le "décomposer en facteurs". La décomposition ayant en lui un relent macabre.

Que dire de la voracité des éléments absorbants déjà ressentie comme telle par les élèves !

Le terme si paisible d'élément neutre d'une opération ne donne-t-il pas dans l'action le verbe neutraliser qui a dans certains contextes une connotation homicide comme liquider. Dans la résolution des équations, il suffit de voir avec quelle agressivité les élèves font disparaître un terme dans un membre en le neutralisant par addition de son opposé aux deux membres de l'équation. De même ils neutralisent un facteur non nul en multipliant les deux membres par l'inverse de ce facteur. Au demeurant, cette neutralisation est plus suggestive et moins mécanique que le passage d'un terme d'un membre à l'autre avec changement de signe.

Il convient que les professeurs de mathématique soient avertis des jeux souterrains du subconscient. La question n'est pas d'en faire des psychanalystes amateurs : ce serait les transformer en apprentis sorciers.

Pareillement les éléments de psychologie différentielle, de technique de groupes ne visent pas à en faire des psychologues au petit pied.

Ce qui importe est de leur fournir des informations pratiques, utilisables dans leur métier. Il est indispensable que les outils psychologiques que l'on mettra à leur disposition, et dont certains sont des instruments puissants de conditionnement et de manipulation, ils puissent s'en servir avec pureté et générosité, pour le bien de la jeunesse, dans le respect des personnalités en devenir.

9 — Psychologie de l'intelligence

Dans ce vaste domaine, ce qui est le plus important pour le professeur de mathématique est la partie qui touche à sa branche.

L'oeuvre de PIAGET, de BRUNER et d'autres apporte des éléments utiles ([11], [12], [13]).

Des travaux menés à partir de la mathématique, en heuristique par G. GLAESER ([14]) et en langage mathématique par J. ADDA ([15]), sont directement utilisables.

Enfin des recherches de rééducation en mathématique faites par F. JAULIN-MAMONI ([16]) l'ont amenée à souligner toute l'importance de l'inconscient logico-cognitif.

Il explique que la démarche que le sujet accomplit pour atteindre la compréhension d'une structure s'efface lorsque celle-ci est instaurée. Ainsi le professeur qui a compris une notion oublie le cheminement qu'il a suivi. Par suite, il ne sait pas comment l'enfant peut parvenir à comprendre cette notion puisque lui-même a oublié la démarche qui l'y a conduite.

V. Education mathématique ouverte

Tout ce que nous venons de voir ensemble doit nous convaincre d'une vérité évidente : l'enseignement de la mathématique a beaucoup à gagner à être plus humain.

L'enseignement, qu'il soit traditionnel ou moderne, souffre d'une même indigence : il est réduit à proposer une mathématique désincarnée, ruminant sur elle-même. Elle a ses programmes, purement internes, qu'il faut couvrir en ignorant trop souvent les enfants que le professeur est réduit à conditionner au plus vite en tenant peu compte de leur affectivité et de leur développement personnel.

Comment améliorer pareil état de choses qui ne peut nous satisfaire ?

Le changement ne viendra pas de nouvelles réformes car il ne peut venir que des hommes et des femmes que nous sommes. Nous devons, avant tout, faire fond sur nous tous et sur chacun de nous. Une révolution peut être faite par notre seul vouloir généreux. Les grandes lignes de progression sont devant nous. Vous les voyez vous-mêmes dans ce que vous pouvez faire et changer dans votre action de tous les jours. Nous en indiquerons quelques-unes. Vous en trouverez, à la réflexion, d'autres.

1 - Avoir un bon contact psychologique adapté à chaque élève

Si la mathématique faite est un édifice logique, l'apprentissage de la mathématique et son enseignement sont d'abord affaire de psychologie.

Le professeur, en adulte, doit être conscient de son caractère et de celui de ses élèves. Il doit dépasser les oppositions caractérielles, comme ne pas se laisser séduire par les concordances agréables, afin d'éviter de se conduire en adolescent atardé parmi de jeunes pubères en croissance.

La maturité doit lui permettre de tenir compte des réactions affectives de ses élèves, de leurs emballements, de leurs craintes et de leurs refus. Il doit accueillir et respecter les personnalités en devenir de ses élèves. Sans être protecteur, il doit savoir les sécuriser pour les aider à devenir les meilleurs eux-mêmes possible. Il doit mettre beaucoup d'affection à faire partager la mathématique comme un bien offert à tous les jeunes. Sachant que l'amour de la mathématique, qui est la joie de la faire, ne peut s'imposer par la force, il mettra tout le tact qu'il peut pour pressentir les blocages affectifs et tenter de les dénouer.

Mais, direz-vous, il ne faut pas être naïf et idéaliser trop la réalité de nos élèves parmi lesquels certains dépassent toutes les limites.

Il est vrai, les temps ont changé et ils changent. Les professeurs, comme la mathématique, sont remis en question.

Les adolescents rebelles dont certains contestent, même à vide, désespérément jusqu'à l'absurde, ne sont-ils pas pour la plupart des mal aimés ? Ont-ils été déjà si malmenés par la vie qu'ils ont franchi pour toujours ces grilles de non-retour qui rendent tout dialogue et toute entente désormais impossibles ?

N'est-il pas trop rudimentaire et trop brutal de les affronter avec une répression coercitive alors que tant d'entre eux demandent et appellent une écoute accueillante, ouverte, sans critique, sans idée de récupération pour le système.

Nous devons écouter pour entendre et prendre le risque d'être parfois dupes pour ne pas être, à coup sûr, inhumains.

2 - Assurer un apprentissage par la compréhension

Il faut que la mathématique soit pour chaque élève une construction personnelle vécue.

La mathématique n'est pas comme certaines sciences un ensemble de connaissances extérieures que l'on organise, elle est un système de pensée cohérente que l'on construit en soi.

Il faut bien distinguer activité mathématique extérieure et compréhension.

Ecoutez ce témoignage véhément ([1] p. 31) :

— *"Mes mathématiques, je les faisais parce qu'il fallait. Je comprenais pas. Je ne cherchais pas à comprendre ; je les faisais. Bon, ben ! J'avais de bonnes notes. J'apprenais mes leçons, je faisais mes devoirs, j'avais des résultats et c'était bon.*

Mais finalement je ne comprends pas.

C'est ça que je n'admets pas. Je n'admets pas que les autres élèves puissent faire ce que moi j'ai fait, c'est-à-dire faire des choses sans comprendre ce qu'on fait.

L'enseignement qui remplace la compréhension réelle, profonde par des réflexes routiniers obtenus par conditionnement, est considéré par R. SKEMP ([17] p. 117) comme une injure à l'intelligence.

L'enseignement qui remplace la compréhension réelle, profonde par des réflexes routiniers obtenus par conditionnement, est considéré par R. SKEMP ([17] p. 117) comme une injure à toute l'intelligence.

— *"Essayer de comprendre quelque chose implique l'accommodation de nos schémas. Dans la mesure où ce qui est communiqué n'est pas intelligible, celui qui reçoit essaie d'accommoder ses schémas pour assimiler quelque chose de dépourvu de sens. Le faire équivaudrait à la destruction de ces schémas c'est-à-dire à l'équivalent mental d'une injure corporelle."*

"Vu de cette façon, on commence à comprendre pourquoi certains étudiants acquièrent non seulement un manque d'enthousiasme pour la mathématique, mais une répulsion positive. Ce qui plus est, ils ont, dans ces circonstances, tout à fait raison d'agir de la sorte parce qu'une de leurs facultés les plus hautes, leur intelligence en développement, est exposée à une influence pernicieuse."

Il y a des élèves qui s'accommodent fort bien de ne pas comprendre en profondeur ce qu'ils font en mathématique, il est plus facile et plus économique pour eux de s'en tenir à l'application mécanique de règles.

Pendant un certain temps, ils peuvent donner le change au professeur lorsque celui-ci ne gratte pas sous le vernis des mots. Cependant lorsque les matières se compliquent, la mémoire et la reproduction aveugle ne peuvent suffire. Alors se découvrent des incompréhensions réelles si étendues qu'il devient impossible de combler ces lacunes.

En mathématique, la compréhension doit être profonde. On ne peut se contenter d'entendre avec intelligence ce qui est dit ni de saisir nettement ce qui est fait, il faut comprendre pourquoi cela est dit et ceci est fait.

C'est ce qu'exprime une élève ([1] p. 128) :

"C'était pareil. On n'avait pas plus compris la deuxième fois. Il ne voyait pas non plus ce qu'on ne comprenait pas. Il disait : mais c'est facile, il faut savoir ça !

"Je crois qu'on cherche toujours à approfondir une question où on dit c'est comme cela, il n'y a pas à chercher à comprendre : c'est un symbole. Mais nous on veut toujours savoir au-delà. On veut savoir pourquoi il y a ça ? pourquoi il faut dire ça ? pourquoi ? Parce qu'on nous le dit ! Mais c'est peut-être pas vrai !"

"Comment le démontrer ? Alors, il nous disait toujours : mais c'est tel que ça, il faut l'accepter tel que c'est. Nous ça nous suffisait pas, encore pas maintenant. Pourquoi que c'est comme ça ? pourquoi que c'est ça ? Ça m'embête... On peut pas chercher l'origine de tout ça, on ne peut pas. C'est-à-dire, en classe, on pourrait peut-être approfondir, chercher vraiment, mais il faudrait remonter trop loin ! Mais en classe, on nous dit : voilà telle formule, il faut l'accepter..., mais on ne nous dit pas comment elle a été formée, cette formule !"

L'exemple de comportement de ce professeur est-il rare, exceptionnel ?

Ne comprend-il pas ce qu'il y a à comprendre ? A-t-il atteint un niveau où il ne se souvient plus du cheminement qu'il a dû faire ? ([16])

Peut-être la classe offrait-elle l'occasion de faire comprendre qu'on ne peut remonter indéfiniment et qu'il faut admettre des points de départ, des axiomes ?

Personne ne croit que les élèves en construisant en eux la mathématique vont refaire à eux seuls le travail de plus de deux mille ans !

Mais les professeurs armés des idées éclairantes modernes peuvent les guider pour comprendre la mathématique par "le dedans".

De ce point de vue, les cours traditionnels ou nouveaux contiennent trop de parachutages de définitions, de démonstrations, c'est-à-dire de présentations abruptes qui pour être logiquement correctes ne sont pas, du même coup, intelligibles dans le contexte d'une construction mathématique qui ne donne aucune raison pour faire comprendre.

Il suffit de se rappeler la présentation ancienne des logarithmes à l'aide des progressions arithmétique et géométrique étrangement "mises en regard". Tout y était mystère et magie. Que dire de l'introduction nouvelle par l'intégrale.

$$\int_1^{+\infty} \frac{k}{t} dt \quad \text{tombeant du ciel !}$$

Il est cependant possible d'amener cette intégrale par la recherche d'un isomorphisme dérivable entre les groupes (\mathbb{R}^*, \cdot) et $(\mathbb{R}, +)$.

Nous avons montré comment une problématique, au sein de la théorie mathématique élémentaire, peut amener avec naturel ces notions et d'autres. ([18])

Nous ne voudrions prendre ici qu'un exemple, celui des cas d'isométrie des triangles.

Les fameux "cas d'égalité" ont été si décriés, si ridiculisés que des programmes n'osent même plus en faire mention. Or, dans les isométries du plan, ils ont une signification profonde.

On sait, en effet, qu'une isométrie est déterminée lorsque l'on donne les sommets d'un triangle et leurs images respectives et que, d'autre part, tout triangle n'est pas isométrique à tout autre. Il est donc parfaitement naturel de se demander sous quelles conditions un triangle est isométrique à un second. Les cas d'isométrie répondent à cette question à l'aide des invariants fondamentaux longueurs et angles.

Les cas de similitude répondent à une question analogue pour le groupe des similitudes du plan. ([19] II et III).

Dans les affinités du plan, tout triangle est équivalent à tout triangle et la question n'a pas d'intérêt.

Dans toutes les situations où intervient un cas d'isométrie ou de similitude de triangles, on peut s'en passer en construisant à l'aide de translations, de rotations, de symétrie, d'homothéties celle de ces transformations qui est requise. C'est un jeu agréable de composition. Mais les physiciens n'ont ni le temps, ni le goût de s'y livrer. Peut-être est-ce la raison pour laquelle ils emploient l'outil simple et commode que leur offrent les "cas" qu'il est donc nécessaire de leur préparer.

3 — Tirer un parti favorable de l'erreur

Nous apprenons surtout par nos erreurs : elles nous obligent à réfléchir.

Nous sommes si indulgents à l'égard de nos erreurs, quel qu'en soit le prix !

Pourquoi ne pas être aussi bienveillants vis-à-vis des erreurs de nos élèves ? Ce serait souvent déculpabiliser les plus vulnérables et les plus scrupuleux.

Il y a une pédagogie bien intentionnée qui essaie qu'un élève fournisse à coup sûr, à toute question, une réponse exacte. L'erreur est traquée, pour être dénoncée, effacée, extirpée le plus rapidement possible, comme une faute impure. Il arrive que ce culte de la bonne réponse conduise à un conditionnement qui est un véritable dressage. En mathématique, il ne suffit pas d'avoir, sous un stimulus, une réponse exacte, encore faut-il comprendre la raison de la réponse que l'on donne.

Aussi longtemps qu'un élève ne nous alerte pas par une réponse erronée, nous n'avons qu'une présomption de compréhension correcte. La réponse ou l'assertion inexacte d'un élève peut venir simplement de ce qu'il a dit n'importe quoi qui lui passait par la tête. Toute autre est l'affirmation erronée qui provient de ce que l'élève a une compréhension ou un cadre de pensée différents des nôtres. Dans ce cas, saisir le pourquoi de ce qu'il dit est comprendre comment il a pensé.

Très tôt je me suis servi des erreurs des élèves pour arriver à mieux comprendre, eux et moi.

En voici quelques exemples.

1°) Dans une discussion, un élève dit avec une conviction tranquille : "zéro n'est pas un nombre".

On peut rester pantois, hausser les épaules, traiter son affirmation d'ânerie, la lui reprocher en le sanctionnant par une mauvaise note. Il est plus utile d'exploiter l'erreur.

Le scénario était bien connu de mes élèves.

"Vous avez entendu ce que dit votre camarade ?"

"Prenez une feuille de papier, inscrivez la question : zéro est-il un nombre ? Réfléchissez-y. Dans les prochains jours, remettez-moi sur cette feuille votre point de vue personnel... avec les indications utiles : dates, âge et classe et votre nom si vous voulez."

Ils savaient bien pourquoi. Je leur avais dit : je cherche à améliorer l'enseignement mathématique. Vous pouvez m'aider en m'expliquant ce que vous pensez librement. Ce n'est pas un devoir écrit, il ne sera pas noté. C'est entre nous.

Le jour venu, je lisais les réponses une à une devant toute la classe, sans citer les auteurs qui signaient tous.

Nous avons appris des choses !

Par exemple à propos de zéro, toute une pathologie :

- "Depuis que je suis petit, on m'a dit : "zéro c'est rien du tout."
- "Quand on ajoute zéro à un nombre c'est comme si on ajoutait rien du tout."
- "Quand on multiplie un nombre par zéro, ça fait zéro."
- "On ne peut pas diviser par zéro."
- "Zéro sur zéro ça ne veut rien dire."

Je leur ai demandé : que veut dire la question : "zéro est-il un nombre ? Comment montrerait-on oui ou non qu'il en est un ?

Après discussion ; en calculant avec lui et les autres nombres.

La conclusion a été : zéro est un nombre mais il est bizarre."

2°) Un jour la curiosité m'a pris de leur demander :

"Quand au cours de géométrie, je prononce le mot "espace", de quoi croyez-vous que je parle ?"

Le dépouillement des réponses a été étonnant.

"L'espace avec ses étoiles et les nébuleuses."

"L'intérieur de la classe."

"Quelque chose qu'on pense dans sa tête."

3°) Ayant découvert et convenu qu'il s'agissait de l'espace abstrait inventé à partir de l'espace physique, nous avons étudié la translation.

Nouvelle question : "Peut-on faire une translation de l'espace ?"

L'espace sidéral est rentré en scène pour une brève apparition, avec son cortège de nébuleuses.

Un excellent élève, bon logicien, m'a dit d'un air définitif : "c'est impossible".

J'ai argumenté : étant donné une translation,

1. Si je prends un point de l'espace, son image par la translation est-elle un point de l'espace ?
2. Si je prends un point de l'espace, est-il l'image, par la translation, d'un point de l'espace ?

Il m'a arrêté tout net. "je vois, dit-il, vous voulez me faire le coup des lieux géométriques."

"Je vous comprends mais j'y crois pas."

"Avec une droite, ça va. Je peux faire comme ça."

Il a mis ses index l'un contre l'autre et les a écartés en les gardant parallèles. "Mais si je fais comme ça" a-t-il ajouté en faisant glisser ses index l'un le long de l'autre "que se passe-t-il à l'infini ?"

Il a recommencé avec des plans, en écartant les paumes des mains puis en les faisant glisser l'une contre l'autre.

"Mais avec l'espace, je n'ai pas de place pour écarter. Qu'est-ce qui se passe à l'infini ?"

J'ai posé la question :

"Comment peut-on démontrer que l'on peut faire une translation de l'espace abstrait ?"

Il est resté sans rien dire et est parti, le visage fermé. Le lendemain, il souriait : "j'ai compris".

Une réponse, une question d'élève qui nous déconcertent sont rarement idiotes.

C'est un jeune enfant qui m'a fait comprendre que la définition classique du triangle isocèle n'était pas bonne.

Comme je lui demandais : "un triangle équilatéral est-il isocèle ?", sa réponse a été nette : "non" — "Pourquoi ?" — "parce qu'il a trois côtés égaux".

C'est pourquoi j'ai pris la définition : "un triangle isocèle est un triangle qui a, au moins, deux côtés égaux". — comme on disait en ce temps-là.

Depuis j'aime la définition : "un triangle est isocèle s'il a, au moins, un axe de symétrie."

Il y aurait beaucoup plus à dire sur nos manières de nous exprimer, que nos élèves comprennent malgré tout :

"Construire un triangle, connaissant les trois côtés"; mais alors le triangle est donné !

4 — Donner une alimentation mathématique équilibrée

La mathématique, par la conscience que nous en donnons les vues modernes, peut être présentée d'une façon unifiée et claire. Il n'est pas nécessaire de se perdre dans mille détails pour introduire et utiliser les idées maîtresses concernant les méthodes et les structures.

Chaque élève, dans toute la mesure où il peut l'assimiler, doit recevoir une nourriture mathématique balancée. C'est le meilleur moyen pour que chacun y trouve ce qui lui plaît et qui convient le mieux à son type d'intelligence.

Parfois, suivant des instructions ou leurs goûts personnels, des professeurs donnent une matière qui est trop algébrique, trop géométrique ou trop numérique, trop logique ou trop intuitive. Perdant de vue l'unité foncière de la mathématique, on arrivera à rompre, par une présentation unilatérale, la symbiose entre l'algèbre et la géométrie en faisant jouer à celle-ci un rôle d'imagerie ou en la présentant uniquement sous l'aspect vectoriel ou analytique. Ainsi peuvent s'installer des carences qui laissent des lacunes et qui peuvent engendrer des répulsions et des dégoûts.

Les élèves ne doivent pas être seulement entraînés à reproduire et à chercher des démonstrations de théorèmes, à apprendre des définitions et à résoudre des problèmes tout faits. Pour avoir un rôle plus créateur, il est important qu'ils apprennent aussi à trouver des énoncés de propositions, à exprimer des définitions, à circonscrire et à formuler des problèmes. Le professeur ira avec ses élèves en exploration mathématique pour leur apprendre à expérimenter sur des exemples, à bâtir un contre-exemple, dans le cas d'un énoncé douteux.

Abandonnant les exposés rectilignes, le maître donnera à ses disciples le goût de la randonnée dans les bois de la mathématique, comme le braconnier qui sait atteindre une proie par plusieurs détours.

Les sources : manuels et ouvrages de référence doivent être variés pour permettre des choix et des comparaisons.

Chaque programme doit être approprié par une pondération, qui lui est propre, des diverses composantes indispensables. De ce point de vue, il convient de noter que les programmes des sections supérieures à horaire réduit ont à faire une bonne place aux éléments d'analyse et de probabilités.

Les programmes doivent rester flexibles à partir d'une ossature de thèmes importants. Ils sont des guides et non des oeillères ou des obstacles pour l'enseignement.

Voici ce qu'en dit un élève ([1] p. 93) :

— Il y a un mot que je n'aime pas justement, c'est "programme". Beaucoup de professeurs disent : "Bon, ça c'est le programme, ça, ça ne l'est pas." On s'arrête.

— "Et je n'aime pas tellement parce que, évidemment, il faut bien se limiter à quelque chose. On va pas déborder n'importe où, mais qu'on s'arrête systématiquement quand on arrive à la limite du programme, ça me gêne un petit peu. J'aime bien qu'on aille jusqu'au bout de certains trucs..."

N — Quelle gêne ressentez-vous ?

E — Ben, justement, quand on ferme la porte quoi ! Quand on referme les mathématiques, c'est là que je suis gêné.

N — Qu'est-ce qui se passe ?

E — Ben.. C'est un peu comme un homme qu'on met en prison, quoi ! Quand il perd sa liberté, la liberté qu'il a, il n'est pas content. Moi, j'aime les mathématiques, justement parce que tout est lié, parce qu'en fin c'est libre.

Et si on commence à enfermer les mathématiques, ça va plus, les mathématiques perdent leur liberté."

5 — Développer un esprit démocratique

La difficulté inhérente à la mathématique en fait une toise pour mesurer une forme d'intelligence et pour classer les élèves, comme elle peut assurer une suprématie dominatrice du maître.

Au lieu d'être une société, en petit, qui reproduit des différences et des hiérarchies, la classe mathématique doit être une communauté de travail, démocratique.

Il ne peut s'agir pour le professeur, comme on lui conseille, de marcher avec la moyenne de la classe, il doit veiller à ce que chacun progresse par rapport à soi avec l'aide de tous.

Les groupes de travail ne peuvent se réduire à de petites formations créées au hasard et qui remplissent des fiches autour d'une même table. Ils doivent être des équipes d'élèves qui se sont mutuellement choisis pour mener à bien des tâches dont ils ont pris la responsabilité. Là les plus forts aident les plus faibles et ceux-ci rendent des services à leur taille.

Le maître qui n'est plus le dispensateur unique de science est le coordinateur, le guide, le conseiller, l'autorité reconnue pour son efficacité. Bon animateur, il sait amener tout l'effort de la classe, en convergence, sur un problème rétif. Il sait aussi encourager les cheminements divers de l'imagination qui cherche dans des voies divergentes.

On apprend à discuter, à pratiquer une logique en acte avec la référence, non de l'autorité du maître, mais de la preuve mathématique. On dépiste des arguments boiteux dans les démonstrations comme dans la publicité ou l'information. On s'exerce à déduire du probable tout autant que du certain.

Le professeur ne craint pas de se risquer, de se montrer en situation de recherche en reconnaissant simplement ses erreurs, à propos desquelles ses disciples peuvent devenir très vigilants.

En mathématique, plus que dans une autre branche où les contacts humains sont plus affectifs, le maître doit veiller à entretenir un climat de coopération fraternelle où chacun doit se sentir plus aimé, plus valorisé, plus libre. Dans une telle atmosphère, les élèves sentent d'instinct ce que la raison peut apporter de mesure et d'équité dans les relations humaines.

6— Stimuler l'épanouissement personnel

A l'école secondaire, les adolescents, parfois les plus farouches, sont très intéressés par l'affirmation et l'épanouissement d'eux-mêmes. C'est pourquoi, lors d'un échec, ceux qui ont une bonne idée de leur personne laissent souvent tomber la mathématique.

Dans tous les cas, il convient que les élèves réussissent. Il ne s'agit pas de leur donner des notes mensongères, mais de leur faire éprouver la joie de la trouvaille, ne fût-ce que d'un problème simple adapté à leurs moyens. Quand un élève éprouve du plaisir dans sa propre activité mathématique, cela lui donne la meilleure motivation pour son travail. Dans ces conditions, résoudre un problème devient un défi avec soi-même. Le choix personnel d'un travail mathématique est aussi un facteur d'intérêt.

Pour donner au cours de mathématique toute sa portée, le professeur ne peut se borner à donner une formation en mathématique théorique et appliquée. Il doit participer à l'épanouissement humain plus large de ses élèves. A chaque occasion, il encouragera dans le travail ou le comportement d'un enfant ou d'un adolescent l'apparition de qualités qui ressortissent aux objectifs généraux de l'éducation mais que la mathématique aide beaucoup à acquérir. C'est une manière de montrer que l'éducation mathématique dépasse de toutes parts l'instruction mathématique au sens étroit, et contribue à la formation générale de la personnalité par le développement d'attitudes intellectuelles, du goût de la beauté et de traits moraux. Ces objectifs de nature qualitative sont susceptibles de transfert. Ils doivent être atteints progressivement au cours des études, en même temps que les buts spécifiques qui leur servent de supports.

a) Formation intellectuelle

1. Exercer au jugement, distinguer le vrai du faux (applicables aux faits réels), le démontré, le non-démontré (applicables à un énoncé au sein d'une théorie déductive.)
2. Entraîner à l'organisation logique de la pensée. Ordonner les idées, reconnaître les hypothèses, les conséquences, les causes, les moyens, les effets.
3. Apprendre à réfléchir aux divers aspects d'une situation, dégager l'essentiel de l'accessoire, affiner l'esprit d'analyse, renforcer le pouvoir de synthèse;
4. Développer l'activité mentale et favoriser ainsi l'imagination, l'intuition et l'invention créatrices.
5. Faire acquérir un sens critique constructif.
6. Former à l'esprit scientifique : objectivité, précision, goût de la recherche.

b) *Formation esthétique*

1. Éveiller et assurer le goût de la beauté mathématique présente dans certaines relations, formules, figures, démonstrations et théories.
2. Cultiver le goût dans l'expression de la pensée : clarté, ordre, concision, élégance.
3. Faire apparaître et apprécier les liens entre la mathématique et la beauté formelle dans les arts :
 - équilibre architectural,
 - composition des arts plastiques (dessin, peinture, sculpture),
 - rythme et structures dans les arts temporels (musique, cinéma).Rendre sensible à la beauté de formes et d'organisation dans la nature et la technique.

c) *Formation morale*

1. Goût de la vérité, de l'objectivité, de l'équité.
2. Besoin de la rigueur, du discernement et de la clarté dans les vérifications et les preuves.
3. Souci de connaître et de comprendre les principes des choses, les fondements et les a priori des doctrines et des opinions.
4. Habitude de rechercher les pré-supposés et les justifications des affirmations.
5. Probité et lucidité à l'égard de ses propres observations, de ses ignorances, de ses opinions et de ses déductions personnelles.
6. Capacité d'attention, de concentration et d'effort.
7. Volonté d'achèvement et de perfectionnement.

7 — *Maintenir tous les liens avec la vie*

Les élèves vivent dans un environnement où coexistent, souvent comme des concurrents ou des antagonistes, un univers naturel et un monde créé par l'homme. L'histoire est là pour attester toute la part de la mathématique dans la découverte, la compréhension et la maîtrise partielles de l'univers ainsi que dans l'invention et la réalisation du monde technologique.

Dans l'enseignement secondaire, la mathématique, le plus puissant de nos instruments à penser, est souvent réduite, pendant trop d'années, à ne servir à penser à rien en dehors d'elle-même. Pour tous les élèves attirés par la vie, elle est présentée comme une langue morte sans lien significatif avec le monde. On a beau leur dire "*cela servira plus tard !*". Par manque d'appétit, par crainte, par découragement, beaucoup de jeunes ont déjà plus ou moins laissé tomber la mathématique quand arrivent, après coup, les applications significatives. La puissance de la mathématique, dont on parle tant, est pour eux une promesse qui reste trop longtemps à se réaliser. Il y a là un déphasage dont les cours de Sciences sont les premiers à pâtir. Pour supprimer ce retard il est possible d'initier en même temps aux sciences et à la mathématique, comme le fait l'enseignement rénové belge dans une voie que le Docteur DECROLY a ouverte depuis tant d'années ([20]).

Pour humaniser l'enseignement de la mathématique, il ne suffit pas de lui donner comme champ d'action les branches scientifiques : physique, chimie, biologie, géographie, informatique. Il faut le connecter avec l'enseignement de la langue maternelle.

Plus largement c'est avec toute la vie que la mathématique est en relation. Comme le montre l'œuvre pédagogique de Emma CASTELNUOVO ([21]), la vie est la meilleure motivation de l'enseignement de la mathématique et la source inépuisable de thèmes pédagogiques variés captivants pour de jeunes élèves qui découvrent en même temps les faits et leur mathématisation.

Un des mathématiciens qui a consacré le plus de lui-même à l'éducation mathématique, H. FREUDENTHAL ([22]), dans son dernier exposé "*Mathematical instruction in the year 2000*", s'exprime en ces termes ;

— "Vous pouvez découvrir des mathématiques partout, avec votre oeil nu et votre bon sens, la mathématique est justement la seule chose qui est si évidente que, sans effort de votre côté, chacun sera convaincu qu'elle vaut la peine d'être connue, apprise, enseignée.

Comme la mathématique est si vraie et si convaincante, je suis sûr qu'elle sera enseignée à l'avenir. Mais, en même temps et pour la même raison, c'est la sorte de chose que l'on ne peut enseigner comme un sujet séparé. Elle doit sortir de l'action comme la lecture, l'écriture, le bricolage, le dessin, le chant, la respiration, dans une éducation intégrée. Il y aura plus de mathématique apprise dans l'éducation générale que jamais auparavant, cependant, elle ne sera pas enseignée comme une branche séparée, excepté, évidemment, à un niveau d'âge plus élevé, dans l'éducation spécialisée, qui en fait pourra comprendre plus d'élèves qu'aujourd'hui. Mais ne demandez jamais combien de mathématique un enfant peut apprendre. Demandez plutôt combien de mathématique peut, dans l'éducation, contribuer à la dignité humaine de l'enfant." ([23]).

Bibliographie

- [1] Jacques NIMIER, *Mathématique et affectivité* — Stock 1976.
- [2] Willy SERVAIS, "Présentation de la Caractérologie", *Mathematica & Paedagogia* 7 (1955-1956).
- [3] R. LE SENNE, *Traité du caractère* P.U.F. (9 et suivantes).
- [4] G. BERGER, *Analyse du caractère*, P.U.F. (1952).
- [5] André LE GALL, *Caractérologie des enfants et des adolescents*, P.U.F. (1951).
- [6] Paul GRIEGER, *L'intelligence et l'éducation intellectuelle*, P.U.F. (1950).
- [7] R. VERDIER, *La caractérologie dans l'enseignement secondaire*, P.U.F. (1957).
- [8] E. G. BEGLE, "The role of research in the improvement of mathematics education" *Actes du Premier congrès international de l'Enseignement mathématique (1969)*, D. Reidel publishing Company. Dordrecht.
- [9] W. SERVAIS, "L'enseignement de la mathématique diversifié dans les classes supérieures des écoles secondaires", *Educacion matematica en las americas* — IV (1975) Unesco.
- [10] W. SERVAIS, "Tendances caractérielles" *Mathematica & Paedagogia* 8 (1955-1956).
- [11] P.C. WASON, P.N. JOHNSON-LAIRD, *Thinking and reasoning* (1968) Penguin Books.
- [12] J. BRUNER, J. GOODNOW, G. AUSTIN, *A study of thinking*. Science Editions, inc New-York (1962).
- [13] Robert BLANCHE, *Le raisonnement*, P.U.F. (1973).
- [14] Georges GLAESER — IREM de Strasbourg, *Le livre du problème*. Cedic (1973).

Bulletin de l'APMEP n°307 - Février 1977

- [15] Josette ADDA, *Initiation au langage mathématique*. Régionale parisienne de l'Association des Professeurs de Mathématique (A.P.M.) 1975.
- [16] F. JAULIN-MANNONI, *Le pourquoi en mathématique*, Ed. ESF (1975).
- [17] R. SKEMP, *The psychology of learning mathematics*, Penguin Books 1971.
- [18] W. SERVAIS "Problématique dans l'apprentissage de la mathématique", *Educational studies in mathematics*. Vol. 7, n° 1/2, 1976, D. Reidel Publ. Company.
- [19] W. SERVAIS et al *Mathématique 2* Ed. Labor (1971)
Mathématique 3 Ed. Labor (1976).
- [20] A. PELTIER, *A la découverte de la physique expérimentale*, Ed. Labor.
- [21] E. CASTELNUOVO et M. BARRA, *Mathematica Nella Realtà*, Paolo Boringhieri (1976).
- [22] H. FREUDENTHAL, *Mathematics as an Educational Task*, D. Reidel Publ. Company (1973).
- [23] H. FREUDENTHAL, Allocution prononcée à Utrecht le 14 août 1976 à l'occasion de son départ de l'UWO.