1

ECHANGES

Pour passer de l'arithmétique à l'algèbre : recherche de voies appropriées

par Jean SAUVY (équipe A.R.P.)

Voici deux ans environ des personnes de mon immeuble, sachant que je "m'occupais de mathématiques", m'ont demandé de donner quelques leçons de mathématique à leur fils qui était en train de perdre pied. J'ai accepté. Le garçon était en troisième. J'ai vite constaté que le langage de l'algèbre lui était tout à fait étranger. Il en connaissait un peu le maniement mais, ne l'ayant pas véritablement assimilé, il l'utilisait de façon déplorable et était incapable d'auto-contrôler ses résultats.

J'ai vite vu que c'était les bases concrètes qui faisaient défaut. J'ai essayé de les reprendre avec lui. Mais c'était une oeuvre de longue haleine et, au bout de quelques séances, il a trouvé que le jeu n'en valait pas la chandelle et a abandonné.

Depuis lors, j'ai souvent réfléchi à ce problème. Récemment, un article de la revue anglaise *Recognition* (dont c'était le 9ème et dernier numéro) est venu réactiver ces préoccupations, et j'ai ressenti le besoin de mettre par écrit quelques-unes de mes réflexions.

Mon élève occasionnel était particulièrement perdu quand il devait manipuler des formules du genre

(1) $(2a + b) \times x - 1 = c$.

Et pourquoi était-il perdu ?

Parce que, derrière ces signes et ces symboles, il ne mettait aucune "réalité" concrète, j'allais dire "charnelle". Il devait donc compter uniquement sur sa connaissance des "règles du jeu", tout à fait arbitraires pour lui. Il dépendait donc entièrement de sa mémoire, sans possibilité de jeter un oeil critique sur ce qu'il faisait.

Le double problème auquel est confronté le professeur de mathématique est de montrer à l'élève, ou plutôt de lui faire toucher du doigt :

- pourquoi on a été conduit à passer de l'arithmétique à l'algèbre ;
- quelle situation modélise une formule du type de la formule (1) ci-dessus.

Pour cela, il me semble qu'une méthode appropriée est celle dite "de la recherche-découverte".

Cette méthode, je vais essayer de la suggérer par un exemple que je vais développer avec quelques détails.

Supposons que nous ayons à ranger des livres sur les rayons d'une bibliothèque. Nous avons deux sortes de livres : des gros (G) et des petits (P). Il y a deux fois plus de gros que de petits. Aussi décidons-nous, pour des raisons esthétiques, de placer les livres par *groupes de trois* (*deux gros et un petit*) comme l'indique la *figure 1*.

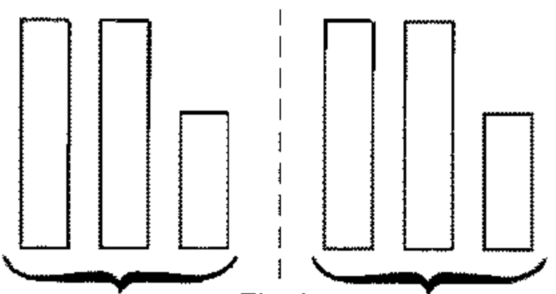

Fig. 1

Cette situation de base, je peux la *représenter* par le schéma de la *figure 1* ou la symboliser par l'écriture

G G P G G P G G P ...

Je place sur un des rayons quatre de ces "blocs" et je m'intéresse au *nombre* de livres ainsi placés.

Le symbolisme de tout à l'heure me permet de modéliser la situation par l'écriture

(2) G G P G G P G G P G G P

Comme à chaque symbole correspond un livre, j'ai autant de symboles que de livres. Je compte mes symboles et j'en déduis que j'ai douze livres.

Mais, étant paresseux, j'essaye d'éviter le décompte fastidieux unité par unité. La disposition graphique de l'écriture (2) me facilite la tâche. Je vois que j'ai quatre groupes de trois livres.

Je peux écrire

(3) Nombre de livres égal à quatre fois deux gros livres et un petit livre.

J'abrège l'écriture en décidant que

N signifie "Nombre total de livres" (sur le rayon).

La proposition (3) devient

(4) N égal à quatre fois deux gros livres et un petit livre.

Dans la mesure où je mets systématiquement deux gros livres et un petit, j'ai envie de faire apparaître dans mon écriture l'existence de ce "bloc". Je peux, par exemple, encadrer le tout, ou le placer entre parenthèses, ce qui me donnera l'une ou l'autre des écritures

$$\boxed{\text{deux grands et un petit}}$$

(deux grands et un petit)

Je retiens la deuxième écriture parce qu'elle est graphiquement plus facile à réaliser et je décide de remplacer "et" par "+".

J'obtiens alors l'écriture équivalente

$$(2G + 1P)$$

et ma formule (4) de tout à l'heure devient

(5) N égal à quatre fois (2G + 1P) .

Mais "égal" peut se symboliser par " = " et "quatre fois" par "4 ×" (c'est-à-dire "quatre que multiplie").

Je peux alors écrire (5) comme suit

(6) $N = 4 \times (2G + 1P)$.

En fait, si je m'intéresse au nombre de livres sans me soucier de leur taille, je n'ai pas besoin de conserver le détail de la parenthèse et j'écris

(7) $\qquad N = \underset{\text{(livres)}}{4 \times 3}$

Je continue à ranger mes livres. Sur un autre rayon, plus long, je peux placer 6 de mes blocs.

J'appelle N2 (N indice 2) le nombre de livres sur cette deuxième étagère et N1 le nombre sur la première.

J'ai

(8) $\qquad N1 = 4 \times (2G + 1P)$.

(9) $\qquad N2 = 6 \times (2G + 1P)$.

J'appelle N le nombre total de livres placés sur les deux rayons

(10) $\qquad N = N1 + N2$.

(11) $\qquad N = 4 \times (2G + 1P) + 6 \times (2G + 1P)$.

Il s'agit là d'une écriture détaillée qui distingue les deux étagères. Si je ne souhaite pas conserver cette distinction, je suis amené à considérer la situation sous un jour plus global, à savoir que j'ai "quatre + six" blocs. Ce qui me permet d'écrire

(12) $\qquad N = (4 + 6) \times (2G + 1P)$.

Les deux écritures ((11) et (12) étant équivalentes, il est licite que j'écrive

(13) $\qquad 4 \times (2G + 1P) + 6(2G + 1P) = (4 + 6) \times (2G + 1P)$.

Et ceci me met sur la voie de cette fameuse "mise en facteur" qui reste si mystérieuse pour tant d'élèves.

Cette "trouvaille" faite, il s'agit de la consolider en *faisant varier les données* et en prenant par exemple le cas d'un rayon sur lequel il y a trois blocs et un autre sur lequel il y en a sept.

Poursuivons nos rangements.

Sur un rayon j'ai *quatre* blocs, sur un autre *six*, sur un autre *sept*.

D'une étagère à l'autre, ce qui *varie*, c'est le nombre de blocs.

Pourquoi n'attribuerais-je pas un symbole spécifique pour désigner ce nombre de blocs ? Je vais l'appeler n , étant entendu que ce "n" (qui désigne le nombre de blocs par étagère) prendra la valeur

"3" s'il y a *trois* blocs

"4" s'il y a *quatre* blocs, etc...

Désormais l'écriture de la formule (8) devient

(14) $N1 = n \times (2G + 1P)$ avec $n = 4$

et la formule (9) s'écrit :

(15) $N2 = n \times (2G + 1P)$ avec $n = 6$

Avec cette nouvelle façon d'écrire, je vois bien que le nombre N de livres sur le rayon est fonction du nombre n de blocs sur ledit rayon.

Connaissant n, je déduis N. Par exemple :

si $n = 2$ je déduis $N = 2 \times (2G + 1P) = 4G + 2P$

si $n = 3$ $N = 3 \times (2G + 1P) = 6G + 3P$

si $n = 10$ $N = 10 \times (2G + 1P) = 20G + 10P$

Voici que j'arrive presque au terme de mon rangement. Il me reste 24 livres (soit 16 grands et 8 petits). Je veux les faire tenir sur un seul rayon, combien ce rayon doit-il pouvoir recevoir de blocs ? Autrement dit, quel est le n associée à $N = 24$?

La question se trouve exprimée dans la formule (16)

(16) $24 = n \times (2G + 1P)$

où n est *l'inconnu*.

Cette formule est une *équation*. Trouver la valeur de n, c'est "*résoudre l'équation*".

Pour trouver n, je n'ai pas à me préoccuper de la distinction entre grands et petits livres. En terme d'unités, le bloc (2G + 1P) "est égal" à 3, donc (16) donne

(17) $24 = n \times 3$

et $n = 8$.

Cependant je n'arrête pas là mes investigations, car je ne suis pas satisfait par la disposition précédemment adoptée : le dernier livre à droite est un petit livre et, pour des raisons de symétrie, je décide de terminer par un bloc tronqué d'où sera supprimé le dernier livre, comme le montre la *figure 2*, sur laquelle le livre qui manque est indiqué en pointillés.

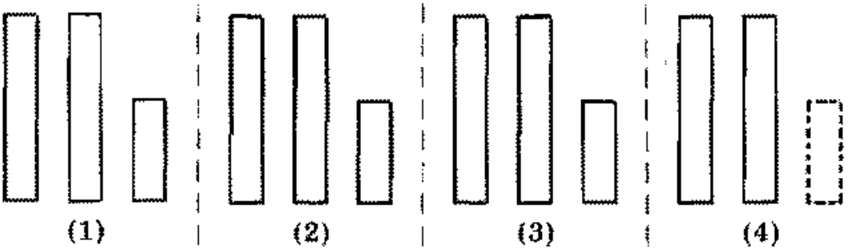

Fig. 2

J'appelle N3 le nombre de livres placés.

Comment décrire cette nouvelle situation ?

Comme tout à l'heure, mais avec un petit livre en moins, soit :

(18) $\quad N3 = 4 \times (2G + 1P) - 1P$

ou encore

(19) $\quad N3 = 3 \times (2G + 1P) + 2G$.

Si je généralise et appelle n le nombres de blocs (complets ou non), les expressions (18) et (19) deviennent respectivement

(20) $\quad N = n \times (2G + 1P) - 1P$

(21) $\quad N = (n - 1) \times (2G + 1P) + 2G$.

Si je ne distingue pas petits et grands, ces formules deviennent respectivement

(22) $\quad N = n \times 3 - 1$

(23) $\quad N = (n - 1) \times 3 + 2$.

Les deux formules (22) et (23) sont équivalentes, elles doivent conduire au même résultat, autrement dit je peux écrire

(24) $\quad n \times 3 - 1 = (n - 1) \times 3 + 2$.

Cela doit être vrai, *quel que soit* n, par exemple pour $n = 10$. Je fais la vérification en *explicitant le calcul*

$$10 \times 3 - 1 = 30 - 1 = 29$$

$$(10 - 1) \times 3 + 2 = 9 \times 3 + 2 = 27 + 2 = 29 .$$

Attardons-nous un peu sur l'écriture $n - 1$.

Les expériences que j'ai pu faire avec des adultes en recyclage m'ont montré que ce genre d'écriture faisait souvent difficulté. Certains d'entre mes élèves voyaient bien comment on passe de 10 à 9 en soustrayant 1 à 10 (9 c'est "la même chose" que 10 − 1).

Mais ils n'étaient pas à l'aise avec l'écriture $(n - 1)$ où n était un entier quelconque (non spécifié).

Sans doute dans ce genre d'affaires la difficulté provient-elle de ce que $(n - 1)$ intervient dans les formules comme un "tout" que symbolisent les parenthèses mais en même temps, dans les calculs, on le traite parfois comme quelque chose de dissociable en ses deux nombres : n et 1 et l'on écrit par exemple :

$$5 \times (n - 1) = 5 \times n - 5 \times 1 .$$

Les deux façons de traiter $(n - 1)$ impliquent deux points de vue distincts, et il semble qu'il faille de la souplesse et une certaine familiarité avec le maniement des formules pour opérer sans difficultés ce changement de points de vue.

Peut-être, là aussi, serait-il bon de faire visualiser les choses en utilisant, par exemple, un schéma tel que celui de la *figure 3* ?

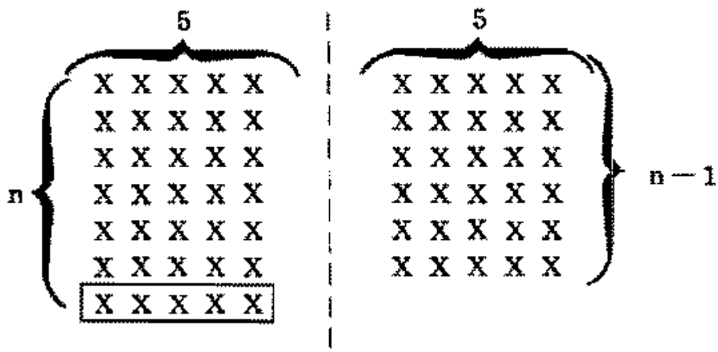

Fig. 3

Pour que j'aie le même nombre de croix sur les deux moitiés de ma feuille, il faut que je retire une rangée à la configuration de gauche (qui compte n rangées).

Après ce "retranchement" d'une rangée, mon résultat peut s'exprimer comme suit :

"n rangées de cinq moins une rangée de cinq"

et comme

"n rangées de cinq" = "n fois 5" = $n \times 5 = 5 \times n$

et

"une rangée de cinq" = cinq unités = 5

j'ai bien

$$5 \times (n - 1) = 5 \times n - 5 .$$

Les développements que je viens de présenter à propos de l'écriture $5 \times (n-1)$ illustrent la démarche inverse de celle utilisée au début de mon propos.

Je rappelle que *je suis parti d'une situation* (des livres rangés sur les rayons d'une bibliothèque) pour introduire progressivement un *langage nouveau*, le langage de l'algèbre, qui se révèle apte à exprimer une situation de caractère général dont les données concrètes peuvent varier. Ce langage, je l'ai construit pas à pas, en faisant bien apparaître au départ que les symboles utilisés n'étaient que des façons de s'exprimer et d'écrire plus brièvement.

En possession des rudiments de ce langage, je l'ai appliqué ensuite à des situations voisines de celle dont j'étais parti, voisines mais néanmoins différentes, on pourrait dire "de la même famille". J'étais là sur la voie de la *généralisation* et j'ai découvert que, moyennant une légère adaptation, mon langage pouvait s'appliquer non seulement à la situation particulière de départ mais à la "famille" toute entière. J'ai ainsi franchi un pas décisif dans l'abstraction, et je suis passé de l'arithmétique où tout est *spécifié* à l'algèbre où l'on raisonne sur *des éléments dont certains ne sont pas spécifiés.*

Dans mon exemple, le non-spécifié était le nombre de "blocs" de livres sur l'étagère de la bibliothèque. Ce nombre était une *variable*. J'ai donc introduit un symbole ("n") *libre* de prendre diverses valeurs et j'ai constaté que c'était possible avec mon langage et avec mon écriture, à condition de respecter les règles familières de l'arithmétique (commutativité, associativité) applicables aux nombres spécifiés.

Par la suite, à propos de l'écriture $5 \times (n-1)$, j'ai cru bon de rechercher une situation susceptible d'être modélisée par ladite écriture.

Autrement dit, après le

"Va" (de la situation à la formule),

je suis passé au

"Vient" (de la formule à la situation).

Ce type global de démarche, qu'on pourrait appeler de "Va-et-Vient", me paraît tout à fait essentiel si on veut

- d'une part légitimer aux yeux des élèves *l'introduction* du langage algébrique et des règles de réécriture correspondantes,

- d'autre part leur rappeler périodiquement que *les formules qu'ils manipulent sont plus que des jeux d'écriture*, qu'elles sont *enracinées dans des situations* ou, pour mieux dire, dans des "familles de situations".