3

SUJETS D'EXAMEN

Sur un exercice de calcul des probabilités (suite)

par C. BLOCH, IREM de Poitiers

Dans le dernier Bulletin (N° 306) on a pu lire une défense et illustration de l'exercice de calcul des probabilités posé au baccalauréat C en juin 76 à Paris. A. Tortrat a prolongé, complété l'exercice et en donne un corrigé exemplaire : ainsi développé cet exercice pourrait être posé à un candidat à l'agrégation non spécialiste de probabilités. Les lecteurs assidus du Bulletin (Cf. N° 302) se souviennent qu'il en fut de même l'an dernier, à l'occasion cette fois du problème, toujours en réponse à des protestations de collègues.

Depuis quelque temps on s'inquiète dans diverses Académies du niveau des sujets de baccalauréat, jugés souvent trop longs, trop ambitieux et sortant volontiers d'un programme pourtant très lourd (certains disent "délirant") : les correcteurs sont amenés alors à distendre le barème, chacun à sa façon, ou à ne pas compter les questions traitées seulement par un nombre infime ou nul de candidats. Finalement que juge-t-on, que sanctionne-t-on ? Avant de proposer et de choisir les sujets il faudrait s'entendre sur ce qu'on attend des candidats, sur ce qu'on attend de l'examen lui-même, à la fois conclusion du cycle secondaire et seuil de l'enseignement supérieur, deux rôles qui se sont peut-être modifiés dans les dernières décennies ? — en tout cas il serait bon d'y réfléchir.

A propos de l'exercice de probabilités ci-dessus mentionné — et avant de connaître le plaidoyer de A. Tortrat — je me suis livrée à une petite expérience avec le concours bénévole de collègues enseignant en Terminale (C ou D) dans l'Académie de Poitiers. Je leur ai demandé de faire cet exercice, de noter le temps qu'ils y passaient, leurs étourderies éventuelles (auxquelles je m'attendais, les huit premiers cobayes les ayant tous faites sous mes yeux) et leurs observations en général. Une vingtaine de collègues m'ont livré sans complexes leurs états d'âme, je les en remercie collectivement ici.

Voici le texte tel que les élèves l'ont reçu — y compris les fautes de ponctuation — :

Deuxième exercice *(sur 5 points)*

Une urne contient n boules ; deux sont blanches, les autres sont noires. Elles sont, à part cela, identiques et on suppose que les tirages qui sont effectués donnent à chaque boule la même probabilité. On épuise l'urne en tirant les n boules, une à une, sans les remettre. On désigne par X la variable aléatoire égale au rang de la première boule blanche tirée.

1° Calculer la loi de X , c'est-à-dire, en fonction de n les diverses probabilités.

$$p_k = \mathrm{P}\ \{\mathrm{X} = k\} \quad k = 1,2,\ldots, n$$

2° *a.* Calculer le rang moyen ou espérance E(X) pour la loi obtenue. On rappelle que :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

b. Sachant que $\mathrm{E(X)} = \frac{n+1}{3}$, en déduire, par une considération de symétrie, l'espérance E(Y) du rang Y de la 2^e boule blanche tirée.

Et voici un résumé des observations faites par les professeurs ; étant donné leur concordance, la synthèse en a été facile.

Les collègues ont relevé d'abord quelques négligences dans la *rédaction* :

— ... donnent à chaque boule la même probabilité." (de faire quoi ?)

— "On désigne par X la variable aléatoire *égale* au rang ...", au lieu de : la v. a. qui prend pour valeur le rang....

— "... rang moyen ou espérance....", comme si les deux expressions étaient toujours synonymes (des collègues se sont posé la

question). L'auteur de l'énoncé était évidemment plus familier que les professeurs en général — et a fortiori les élèves — avec le langage des probabilités.
— "considération de symétrie" a paru "désuet" (?) et surtout trop vague ... d'autant plus que beaucoup de collègues n'ont vu cette symétrie que trop tard, après rédaction et réflexion.

Quant au *temps passé* sur cet exercice, il varie de 45 minutes à 1 h 15 ; or un candidat devrait normalement consacrer 1 heure à un exercice noté sur 5....

On signale ensuite les *difficultés purement techniques* :
— simplifier p_k (en admettant qu'on ait su l'écrire) ;
— calculer E(X) sans s'embrouiller dans les indices : les élèves (et même les étudiants) ne sont *pas du tout* rodés à ce genre de calcul;
— enfin, dans la dernière question, une bonne moitié des collègues qui ont vu la symétrie à temps (ou qui l'ont provisoirement admise) ont d'abord changé k en $n-k$ au lieu de $n-k+1$, puis se sont aperçus de leur erreur.

Les doutes et vérifications provoqués par ces calculs qui ont été jugés délicats expliquent en partie la durée du travail ; mais il y a plus grave, à savoir les *difficultés d'ordre méthodologique* :

Les élèves ne connaissent guère que les tirages avec remise où, si l'urne est "multicolore", la probabilité de tirer une boule d'une couleur donnée s'identifie à la proportion des boules de cette couleur, si bien que les individus boules n'ont pas l'occasion de se manifester, si je puis dire. Même dans ce cas, la loi (dite géométrique ou : de Pascal) du temps d'attente de la première boule d'une certaine couleur pose problème aux élèves qui voient du binomial partout et ont du mal à envisager le point de vue converse *. Donc, première difficulté : *définir l'événement* $\{X = k\}$, si paradoxal que cela puisse paraître.

Mais ici les tirages se faisaient sans remise. La plupart des collègues, en se servant d'un arbre ou autrement, ont fait le produit, de proche en proche, des probabilités conditionnelles... qui ne sont pas au programme. Et pourtant "comment ne pas en parler ?", j'en suis bien d'accord avec A. Tortrat — mais ceci est une autre histoire —. *Donc cette méthode n'était pas à la portée des candidats* ; restait à trouver un Ω convenable. Comme l'écrit A. Tortrat,

* Où la variable n'est pas un nombre de boules mais un nombre de tirages.

"il est immédiat que *si on épuise l'urne* on obtient une permutation des N premiers entiers strictement positifs (*les boules étant supposées numérotées* de 1 à N)..." — c'est moi qui souligne. Les candidats avaient donc à faire preuve d'initiative pour : (1) individualiser des boules indiscernables et (2) poursuivre les tirages au-delà de la sortie d'une boule blanche.

Le moins qu'on puisse dire, c'est que l'énoncé ne les y aidait pas ; il dit bien qu'"on épuise l'urne", *mais cette information est effacée par la première question* : celui qui fait l'exercice va jusqu'au tirage de la première blanche.... et s'arrête tout naturellement. Du même coup il ne verra pas la symétrie. Si ce blocage a été constaté chez les professeurs, on peut comprendre que les élèves n'aient même pas démarré. Il aurait fallu suggérer clairement un choix de Ω (plusieurs étaient possibles) qui mette en évidence *l'ensemble des tirages exhaustifs* de l'urne en question.

D'autre part, l'auteur du texte a peut-être pensé que faire figurer n (et non $n-1$) dans les formules inciterait à voir toujours globalement les n tirages (ce qui, on l'a vu, était indispensable pour la deuxième question). En fait c'était une cause supplémentaire de perplexité et d'erreur, p_n étant nul. Quand on avait scindé en deux morceaux $\Sigma\, k(n-k)$, il ne fallait pas s'aviser de calculer l'une des sommes de 1 à n et l'autre de 1 à $n-1$. Encore fallait-il connaître, ou retrouver, la somme des n (ou $n-1$) premiers naturels.

Cela dit, plusieurs collègues trouvent l'exercice intéressant et très possible à faire en classe, mais pas un jour d'examen sans aucune indication. *Convenablement guidé, un candidat moyen aurait pu faire la première question en un temps raisonnable pour un exercice*. Le 2° *a*. est un calcul relativement long pour qui n'est pas spécialiste de combinatoire (le "rappel" de la formule donnant la somme des carrés des n premiers naturels s'adressait aux correcteurs plus qu'aux candidats !). Nous aimerions savoir comment cet exercice a été noté, combien de copies ont abordé le 2° *b*. et ce qu'il en est résulté.

En principe, les exercices doivent être des applications immédiates du cours ; or les élèves ne connaissent guère que les tirages avec remise. On peut, et on doit, regretter qu'ils se trouvent désarmés devant une question aussi banale que le 1° de cet exercice, mais, dans l'énorme programme de Terminale, la partie Probabilités a un faible poids et les professeurs y sont pour la plupart autodidactes**... De tout cela, les candidats au baccalauréat ne sont pas responsables. Les auteurs de textes devraient en tenir compte et songer qu'un élève capable de se débrouiller honorablement dans les limites du programme mérite d'être reçu. Ce n'est pas honnête de lui en demander plus. Si le programme est mal fait, il faut le modifier, mais *sans l'allonger* et en le ramenant de hauteurs abstraites vers des productions plus concrètes : il est sûrement plus intéressant de découvrir les probabilités conditionnelles sur un arbre ou sur un diagramme de Carroll que de parler de tribu quand on n'a strictement rien à en faire.

Cependant la dernière partie de l'article de A. Tortrat me fait craindre l'apparition des espérances conditionnelles au programme de Terminale (sous prétexte que les barycentres y figurent), alors que les étudiants de maîtrise ne les trouvent pas-du-tout triviales.... et d'ailleurs ignorent tout des barycentres !

J'emprunterai la conclusion à l'un de mes correspondants : "Comment lutter contre l'inflation des difficultés en mathématiques, en particulier au bac. C (et même D) ? Après tout, qui pose les textes ? Qui les choisit ? N'y a-t-il pas des professeurs qui vivent au-dessus de leurs (élèves) moyens ? L'A.P.M. a du travail à faire dans cette lutte anti-inflation."

** Les manuels aussi, apparemment...