

rotation, n. f.

[rotationnel : n. m.]

1976 - 1/4

rotationnel

Etym : mouvement de la roue (latin : "rota"), d'où le sens cinématique. Le sens géométrique en est issu, mais il doit en être soigneusement distingué. L'Analyse vectorielle a introduit le terme dérivé : *rotationnel*.

1. Les rotations en Géométrie euclidienne.

Les rotations sont ici des transformations d'un espace vectoriel réel euclidien (rotations vectorielles) ou d'un espace affine euclidien (rotations affines).

1.1. Rotations vectorielles.

E désigne ici un espace vectoriel réel de dimension fini non nulle n .

1.1.1. Définitions et propriétés générales : Un endomorphisme orthogonal ou isométrie vectorielle de E est dit *isométrie paire* (ou *positive*) ou *rotation vectorielle* (resp. *isométrie impaire* (ou *négative*) ou *retournement* ^(*)) si son déterminant est $+1$ (resp. -1).

On désigne par $O(E)$ (resp. $O^+(E)$, $O^-(E)$) l'ensemble des isométries (resp. rotations, retournements) de E . Pour la composition des applications, $O(E)$ est un groupe qu'on appelle *groupe orthogonal* de E et $O^+(E)$ en est un sous-groupe parfois appelé *groupe spécial-orthogonal* de E et noté $SO(E)$.

$\{O^+(E), O^-(E)\}$ est une partition de $O(E)$, et pour tout retournement σ de E , l'application $\rho \mapsto \sigma \circ \rho$ de $O^+(E)$ sur $O^-(E)$ est bijective (on traduit ce fait en disant que $O^+(E)$ est un sous-groupe d'index 2 de $O(E)$).

(*) L'utilisation du mot *retournement* pour désigner d'autres transformations, telles que les symétries-droite en dimension 3, est déconseillée.

Pour les isométries et rotations vectorielles, l'adjectif "vectorielles" est souvent omis quand aucune ambiguïté n'est à craindre.

On peut donner des rotations de E d'autres caractérisations :

- 1) ce sont les isométries conservant l'orientation ;
- 2) ce sont les endomorphismes de E tels qu'il existe au moins une base orthonormale de E dans laquelle la matrice associée est orthogonale directe ; il en est alors de même pour toute base orthonormale de E ;
- 3) ce sont les isométries de E dont le sous-espace des vecteurs invariants est de codimension paire dans E (on rappelle que la codimension d'un sous-espace F de E est $\dim(E) - \dim(F)$).

Le groupe des rotations est commutatif si et seulement si $n = 1$ ou $n = 2$. Si $n = 1$, $O^+(E)$ a pour seul élément l'application identique I de E , et $O(E) = \{I, -I\}$.

1.1.2. Cas d'un espace de dimension 2 : L'application qui à une rotation associe son angle-de-couple [ANGLE, 2.2.] est un isomorphisme de $O^+(E)$ sur le groupe des angles de E .

Si E est orienté, il existe un isomorphisme canonique du groupe des angles de R^2 sur celui de E ; on peut alors introduire la notion de rotation d'angle α , où α est un angle de R^2 . Dans toute base orthonormale directe, la matrice de la rotation d'angle α est $\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ (ce qui est une des façons de définir $\cos$ et $\sin$).

1.1.3. Cas d'un espace de dimension 3 : Si $n = 3$, une rotation autre que I est une isométrie dont le sous-espace des vecteurs invariants est une droite ; cette droite est dite *axe* de la rotation.

Une symétrie orthogonale par rapport à une droite est ici une rotation (*).

Supposons E orienté. Soit α un angle de R^2 , et d une demi-droite de E : on peut alors définir la rotation ρ d'angle α autour de d [DIÈDRE, 3.6.]. Si (i, j, k) est une base orthonormale directe de E telle que k soit le vecteur unitaire de d , la matrice de ρ dans cette base est : $\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. On peut d'ailleurs exprimer

(*) Le terme "demi-tour" pour nommer cette transformation est déconseillé : son sens littéral (moitié d'un tour) devrait réserver son usage mathématiques aux phases.

rotation, n. f.
[rotationnel : n. m.]

ρ à l'aide du produit scalaire et du produit vectoriel de E :

$$\rho(x) = (1 - \cos \alpha) (k|x)k + (\sin \alpha) (k \wedge x) + (\cos \alpha)x .$$

Deux rotations autres que I ne commutent que dans les deux cas suivants :

- elles ont même axe ;
- ce sont deux symétries par rapport à des droites orthogonales.

1.1.4. Cas des espaces de dimension au moins 4 : On peut représenter une rotation ρ à l'aide d'une décomposition en somme directe de certains sous-espaces stables par ρ et deux à deux orthogonaux :

- le sous-espace S des vecteurs invariants par ρ ;
- le sous-espace S' des vecteurs transformés par ρ en leurs opposés (ce sous-espace est de dimension paire) ;
- des plans $P_1, P_2, \dots, P_k$ tels que ρ induise dans chaque P_i une rotation d'angle ni nul ni plat.

Soit une base orthonormale de E constituée par des bases de $S, S', P_1, P_2, \dots, P_k$; soit θ_i l'angle-de-couple de la rotation induite par ρ dans P_i ; chaque P_i étant orienté par sa base, la matrice de ρ dans cette base de E est :

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & -1 & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & -1 & \\ & & & & & & & & \cos \theta_1 - \sin \theta_1 \\ & & & & & & & & \sin \theta_1 \cos \theta_1 \\ & & 0 & & & & & & \\ & & & & & & \cos \theta_2 - \sin \theta_2 \\ & & & & & & \sin \theta_2 \cos \theta_2 \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \cos \theta_k - \sin \theta_k \\ & & & & & & & & \sin \theta_k \cos \theta_k \end{bmatrix}$$

1.2. Les rotations affines.

$\mathcal{E}$ désigne ici un espace affine sur l'espace vectoriel réel euclidien E de dimension finie non nulle n . Si f est une transformation affine de $\mathcal{E}$, désignons par $\vec{f}$ l'endomorphisme de E associé à f .

1.2.1. Définitions et propriétés générales :

Une *isométrie paire* de $\mathcal{E}$ est une transformation affine f telle que $\vec{f}$ est une rotation de E ; une telle transformation s'appelle aussi *déplacement*.

Une *rotation* de $\mathcal{E}$ est une isométrie paire de $\mathcal{E}$ ayant au moins un point invariant.

L'ensemble des points invariants par une rotation g est un sous-espace affine dont la direction est le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants par $\vec{g}$.

Si n est pair, les isométries f telles que $\vec{f}$ n'a que 0 pour vecteur invariant ont un *centre*, c'est-à-dire un unique point invariant.

Dans une droite affine euclidienne, l'application identique est la seule rotation; les autres isométries paires sont des translations.

1.2.2. Cas d'un plan affine euclidien : Toute isométrie paire qui n'est pas une translation est une rotation. Une rotation autre que l'application identique a un point invariant et un seul. Elle est caractérisée par son centre et la rotation vectorielle associée. La rotation de centre A et d'angle θ est l'application g définie par :

$$g(A) = A, \text{ et pour tout } M \text{ autre que } A, \overbrace{(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{Ag(M)})} = \theta \text{ et } \|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{Ag(M)}\|.$$

1.2.3. Cas d'un espace affine euclidien de dimension 3 : Une rotation autre que l'application identique a pour sous-espace de points invariants une droite, qu'on appelle son *axe*; elle est déterminée par un point de son axe et la rotation vectorielle associée. L'espace étant orienté, soit Δ une droite, α un angle de $\mathbb{R}^2$ et d une des deux demi-droites de la direction de Δ , on définit la rotation g d'angle α autour de la droite orientée (Δ, d) de la façon suivante : M et $g(M)$ ont même projection orthogonale H sur Δ ; et si M appartient à Δ , $g(M) = M$; sinon, le dièdre

rotation, n. f.

[rotationnel : n. m.]

1976 - 3/4

rotationnel

$(d, \widehat{(\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{Hg(M)})})$ est représenté par α [DIÈDRE, 3.4.], et $\|\overrightarrow{Hg(M)}\| = \|\overrightarrow{HM}\|$.

Le produit de deux rotations n'est une rotation que dans les deux cas suivants :

- leurs axes sont concourants ;
- leurs axes sont parallèles et leurs angles non opposés.

1.3. Autres sens géométriques du mot "rotation".

On utilise parfois aussi le mot "rotation" dans le cas de structures qui généralisent celle d'espace réel euclidien (certaines propriétés pouvant être assez différentes). C'est le cas :

1) d'un espace vectoriel pseudo-euclidien : c'est un espace vectoriel sur un corps commutatif muni d'une forme quadratique non dégénérée ; les rotations y sont les endomorphismes qui conservent la forme quadratique et qui ont pour déterminant 1.

2) d'un espace vectoriel hermitien : c'est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, muni d'une forme hermitienne non dégénérée ; les rotations y sont les endomorphismes qui conservent la forme hermitienne et qui ont pour déterminant 1.

2. Les rotations en Cinématique.

2.1. Mouvement de rotation autour d'une droite.

Un solide est animé d'un *mouvement de rotation autour d'une droite* Δ si chaque point de Δ est un point fixe du solide. Etant données deux positions quelconques du solide, il existe une rotation (au sens géométrique) d'axe Δ qui transforme l'une dans l'autre.

Dans un mouvement de rotation autour d'une droite Δ , la trajectoire de chaque point du solide est un cercle, ou un arc de cercle, d'axe Δ .

Les points du solide non situés sur l'axe ont, à un instant, la même vitesse angulaire qu'on appelle la *vitesse de rotation* du solide à cet instant.

Orientons l'espace ; soit k un vecteur unitaire de Δ ; soit ω la mesure en radians de la vitesse de rotation du solide dans le plan vectoriel orthogonal de Δ orienté par le choix de k ; la vitesse d'un point M du solide est alors : $V_M = \omega k \wedge \overrightarrow{OM}$, où O est un point quelconque de Δ . Le vecteur ωk , indépendant du choix de k , s'appelle le *vecteur-vitesse de rotation instantané du solide*.

Un mouvement de rotation autour d'une droite est uniforme quand sa vitesse de rotation est constante.

2.2. *Mouvement de rotation autour d'un point.*

Un solide est animé d'un *mouvement de rotation autour d'un point* O si O est un point fixe du solide. Exemples : mouvement "à la Poincaré", mouvement de Lagrange et Poisson (mouvement du gyroscope, en particulier).

2.3. *Vitesse instantanée de rotation.*

A tout instant, le champ des vitesses des points d'un solide Σ est équiprojectif ; il définit donc un torseur dont le vecteur (ou résultante) Ω est le *vecteur-vitesse de rotation instantané* de Σ . Si M et N sont deux points de Σ , $V_N - V_M = \Omega \wedge \overrightarrow{MN}$.

Supposons maintenant Ω non nul. Le torseur des vitesses de Σ a un axe Δ , appelé *axe instantané* du mouvement de Σ .

Soit V_M la vitesse du point M de Σ et soit V'_M la projection orthogonale de V_M sur le plan vectoriel orthogonal de Ω . Soit Σ' le solide animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de Δ et dont le vecteur-vitesse de rotation est Ω . A l'instant considéré, V'_M est la vitesse du point de Σ' qui coïncide avec M ; la *vitesse de rotation instantanée* de Σ est la vitesse de rotation de Σ' .

Si le torseur est un glisseur, on dit que le mouvement est tangent à un mouvement de rotation et Δ est alors un *axe instantané de rotation* ; si O est un point quelconque de Δ , la vitesse de M est : $V_M = \Omega \wedge \overrightarrow{OM}$.

Certains mouvements sont tangents à tout instant à un mouvement de rotation. C'est le cas du mouvement de rotation autour

rotation, n. f.
[rotationnel : n. m.]

1976 - 4/4

rotationnel

d'une droite, ou autour d'un point. Les mouvements plan sur plan, c'est-à-dire tels qu'un plan lié au solide glisse sur un plan fixe, sont, à chaque instant, tangents à un mouvement de rotation ou à un mouvement de translation ; dans le premier cas, l'axe instantané de rotation Δ est orthogonal à ce plan et l'intersection de Δ avec ce plan est le *centre instantané de rotation* relatif à ce plan.

3. Rotation propre.

L'angle de *rotation propre* est un des trois angles d'Euler [DIÈDRE, 4.].

rotationnel : n. m.

Soit E un espace vectoriel réel euclidien, de dimension 3, orienté, et $\mathcal{E}$ un espace affine sur E .

Soit A un champ différentiable défini dans $\mathcal{E}$ et à valeurs dans E , et soit A' son application dérivée.

En tout point M de l'ensemble de définition D de A , la différentielle $A'(M)$ se décompose en somme d'une application linéaire auto-adjointe (ou : symétrique) et d'une application linéaire anti-auto-adjointe (ou : anti-symétrique) $\Lambda(M)$.

Il existe un et un seul champ U tel que pour tout point M de D et pour tout v de E , on ait : $2[\Lambda(M)](v) = U(M) \wedge v$. Ce champ s'appelle *rotationnel* de A et on le note $\text{rot } A$; sa valeur au point M se note $(\text{rot } A)(M)$.

Dans un repère orthonormé direct dans lequel x, y, z sont les coordonnées de M et X, Y, Z celles de A , celles de $\text{rot } A$ sont $Z'_y - Y'_z, X'_z - Z'_x$ et $Y'_x - X'_y$.

Supposons D simplement connexe ; si $\text{rot } A = 0$, il existe une fonction f définie sur D telle que A soit le gradient de f ; on dit alors que A est *lamellaire* (ou : *irrotationnel*).

Supposons maintenant que D est 2 — connexe, c'est-à-dire que toute surface contenue dans D et homéomorphe à une sphère est homotope dans D à un point ; alors, si un champ A défini sur D est tel que $\operatorname{div}(A) = 0$, il existe un champ B défini sur D tel que $A = \operatorname{rot} B$; on dit alors que A est *solénoïdal* (ou : à *flux conservatif*).