

**Association des professeurs de mathématiques
de l'enseignement public**
29, rue d'Ulm - PARIS (5e)

BUREAU NATIONAL ET COMMISSIONS DE L'APMEP 1975-76

Bureau National	Commissions et leurs Responsables
Président : M. DE COINTET Secrétaire Général : P.L. HENNEQUIN Secrétaire Général Adjoint : C. PELE Secrétaires : Organisation Générale : M. CHOUCHAN Régionales : R. CREPIN ; O. RENAUT Vie Scolaire : H. BAREIL Vice-Présidents : Elémentaire et Maternelle : A. FABRE Premier Cycle : R. HEBENSTREIT ; R. METREGISTE Second Cycle : D. REISZ C.E.T. : C. PAGANO Lycées Techniques : N. EHRLICH Enseignement post-baccalauréat : G. GRIBONVAL Formation des maîtres : A. MYX ; A. ROUCHIER Trésorier : R. LEBoulLEUX Trésorier-Adjoint : F. DUCROCQ Directeur des Publications : L. DUVERT	Dictionnaire : J. CHASTENET DE GERY ; M. ARNOULD MOTS : L. DUVERT Elémentaire et Maternelle : A. FABRE Premier Cycle : R. METREGISTE Second Cycle : D. REISZ Enseignement Post-Baccalauréat : G. GRIBONVAL Enseignements Techniques courts : J. BLION Formation des maîtres : P.L. HENNEQUIN, A. MYX, A. ROUCHIER Formation Permanente : D. POISSON, J. MARIA Manuels Scolaires : H. BAREIL Publications : M. DE COINTET, L. DUVERT
Secrétaire Administratif : A. BLONDEL Service "Publicité du Bulletin" : J. BORNENS	

Sommaire

1. Editorial

M. DE COINTET : Inquiétudes	15
-----------------------------------	----

2. Dans le Second Cycle Classique et Technique

M. DE COINTET : Introduction	19
J. MONIER : La classe de seconde	19
H. CARTAN : Note sur l'introduction éventuelle des "filtres" dans l'enseignement du second degré	23
G. GLAESER : La didactique de l'analyse	25

3. Les angles

J. LELONG-FERRAND : La notion d'angle	41
J.M. CHEVALLIER : Tour d'horizon	47

4. Les rubriques de l'A.P.M.E.P.

G. WALUSINKI : Matériaux pour une bibliographie	57
Ch. AUQUE : Rubrique des problèmes de l'A.P.M.	64

5. C.E.T.

J. BLION : Les Mathématiques dans l'enseignement professionnel	67
--	----

6. Etudes

E. EHRHART : Sur la représentation d'un naturel par la somme de deux carrés	79
J. GADREY : Modèles logico-mathématiques dans les connaissances mathématique	84
M. VIVET et J.P. LAURENT : Démonstration mathématique de théorèmes et enseignement des mathématiques	93

7. Echanges : Les catégories

1. B. CHARLES : Réponse à J. Fourastie	107
2. A. BOUVIER : A propos de catégories	109
3. J. FOURASTIE : Réponse à B. Charles et A. Bouvier	112

8. Examens et Concours

A. TORTRAT : Sur le problème de T. C., Paris, juin 1975	115
REGIONALE PARISIENNE : Rapport sur ce problème	121
C. BLANCHARD : A propos de l'oral du CAPES	124

9. Tribune libre

G. WALUSINSKI : Enseignons plutôt en Béotie	127
G. CURNY : Lettre (sur une expérience en troisième)	129
Compte rendu collectif du stage d'analyse de Lyon	130

10. Dans nos classes

A. EHRLICH : Jeux de déduction	133
O. SAWADA : Arithmétique à l'emporte-pièce	139
M. THUILLIERE : Un peu d'espace	142
E. ANGLES : Indicateur d'Euler et fonction partie entière	145
P. MAHAUT : Des points et des nombres	151

11. Vie de l'Association

Motion du Comité sur les horaires	167
Commission Formation des maîtres et Motion du Comité	168
Commission Formation Permanente	177
Conférence des Présidents : lettre au Ministère	192
Préparation des Journées de Rennes	193
Vie des Régionales : Section de la Seine-Saint-Denis	196
Limoges	197
Dijon	197
Lyon	199
Errata	195

Les annonceurs :

CEDIC 206-207 — VUIBERT 208-209 et 4e de couverture — HERMANN 210 —
MAGNARD 211-212.

Les Régionales de l'A.P.M.E.P.

Dans chaque académie, il existe une section régionale de l'A.P.M.E.P. qui organise diverses activités pédagogiques et qui s'organise elle-même librement. En particulier, il existe des sections départementales qui se constituent à l'intérieur de la Régionale à laquelle elles sont rattachées.

Les lecteurs du Bulletin sont invités à prendre contact avec les animateurs de ces sections régionales ou départementales, voire locales. A la dispersion géographique de ses adhérents qui correspond à leurs fonctions, l'A.P.M.E.P. propose un remède : la constitution d'équipes de maîtres qui enseignent des mathématiques "de la Maternelle à l'Université", en dehors de toute hiérarchie administrative, par dessus les barrières artificielles des divers degrés d'enseignement. Elle propose à chacun et de conserver l'autonomie de son action et de sa réflexion, conditions indispensables d'un enseignement libéral, d'une éducation libératrice, et de coopérer au travail collectif sans lequel aucun ouvrage n'est plus possible à l'échelle de nos sociétés. Elle reprendrait donc volontiers à son compte la devise des coopérateurs : "tous pour un, un pour tous" pour le seul profit, ici, de l'enseignement mathématique et de la formation de la jeunesse.

Liste des sections régionales ou départementales.

Pour chaque section, nous donnons l'adresse d'un animateur à qui les Collègues s'adresseront pour avoir des informations supplémentaires sur l'activité de sa section. Entre crochets [], nous donnons les numéros des départements qui sont du ressort de la régionale. Entre doubles parenthèses (()) le numéro de chèque postal quand il y a lieu (sauf avis contraire, l'intitulé du compte est "Régionale A.P.M.E.P. de ...").

AIX-MARSEILLE [04, 05, 13, 84]

Pierre NOE, 49 rue Daumier, 13008-Marseille ((Marseille 28-94-82)).

AMIENS [02, 60, 80]

Jean CAPRON, 12 rue A. Chénier, Les Primevères, 80000-Amiens.
Tél. (22) 92.16.79 ((Lille 862-04)).

Janine PROTIN, résidence de l'Abbaye, A36, rue du Dr Calmette, 60200-Compiègne.

BESANCON [25, 39, 70, 90]

Martial THIRIOT, I.U.T., 30 avenue de l'Observatoire, 25000-Besançon ((Dijon 2505-45 V)).

Section du Jura : Mile COULON, 12 rue de la Colette, 39000-Lons-le-Saulnier.

Section de Belfort : J. DAUTREVAUX, 41 rue du Château-Essert, 90000-Belfort.

BORDEAUX [24, 33, 40, 47, 64]

Pierre LOUQUET, 47 cours de la Somme, 33000-Bordeaux ((Bordeaux 3902-91)).

Section de la Dordogne : Mile MARCHIVIE, 12 rue des Vaures, 24100-Bergerac.

Section de la Gironde : TEXTIER, Boutus, Beychac et Caillau, 33-Saint-Germain-du-Puch.

Section des Landes : LAVIGNE, 40-Aire-sur-Adour.

Section du Lot-et-Garonne : DE LATAULADE, 1 rue Claude Rivemale, 47-Villeneuve-sur-Lot.

Section des Pyrénées-Atlantiques : CELHAY, allée de la Forêt, 64600-Anglet.

CAEN [14, 50, 61]

Jacky COCHEPIN, rue de la Chasse, 14290-Mathieu ((Rouen 1084-56 M)).

CLERMONT-FERRAND [03, 15, 43, 63] ((Clermont 1569-75))

André HENNETON, Sauvagnat Ste Marthe, 63500-Issoire.

DIJON [21, 58, 71, 89]

O. RENAUT, 38 bd. de l'Université, 21-Dijon ((Dijon 1751-05 V)).

Section de l'Yonne : D. REISZ, 11 rue du Saule, 89610-Vincelles.

- Section de la Saône-et-Loire* : MICHELOT, 32 avenue Boucicaut, 71100-Chalon-sur-Saône.
- Section de la Nièvre* : PUISSEGUR, 2 place de la Résistance, 58000-Nevers.
- Section de Mâcon* : Mlle DOMINIQUE, rue du Lavoir Charnay, 71000-Mâcon.
- GRENOBLE** [07, 26, 38, 73, 74]
C. BENZAKEN, 17 avenue du Vercors, 38240-Meylan ((Grenoble 349-49 U)).
- Section de Chambéry* : COMPAIN, Lycée Technique, 1 avenue du Colombier, 73000-Chambéry.
- Section de Vienne* : CHARNAY, Establin, 38780-Pont-Evêque.
- Section d'Annecy* : VIDIANI, B.P. 316, 74000-Annecy.
- LILLE** [59, 62]
MAS, Lycée Faidherbe, rue A. Carrel, 59-Lille ((Lille 4242-55)).
- Section du Pas-de-Calais* : LAURENT, 15 rue Albert-1er, 62-Arras.
- LIMOGES** [19, 23, 87]
UER des Sciences, 123 rue Albert Thomas, 87100-Limoges ((Limoges 117-66 P)).
- Section de la Creuse* : Mme MEIGNAL, 41 rue Alfred Géraud, 23000-Guéret.
- Section de la Corrèze* : M. BOUTEILLER, 7 bis avenue Roosevelt, 19100-Brive.
- LYON** [01, 42, 69]
Gilbert CROS, 86 avenue Jean Jaurès, 69007-Lyon ((Lyon 7081-18)).
- Section de Saint-Etienne* : M. BOUTEILLE, Residence de l'Hippodrome, Bât. D4, 42390-Villars.
- Section de Bourg* : R. CHARNAY, E.N., 40 rue du Gal Delestreint, 01000-Bourg-en-Bresse.
- MONTPELLIER** [11, 30, 34, 48, 66]
Mme FUCHS, 10 rue des Glaieuls, 34000-Montpellier ((Montpellier 385-25 W)).
- Section du Gard* : J. CHABRIER, 10 rue de Loye, 30000-Nîmes.
- Section des Pyrénées Orientales* : GALTIE, 16 rempart Villeneuve, 66-Perpignan.
- Section de l'Aude* : Mlle CABANEL, Lycée Lacroix, 11100-Narbonne.
- NANCY** [54, 55, 57, 88]
MIRGAUX, 76 rue G. Moulleron, 54-Nancy ((Nancy 1394-64 S)).
- Section de la Moselle* : E. SAUVADET, 17 rue du Fort, Longeville-les-Metz, 57000-Metz.
- NANTES** [44, 49, 53, 72, 85]
Mme PEYROT, 41 Les Hauts de l'Erdre, 44240-La Chapelle/Erdre.
- Section de la Sarthe* : KLAEYLE, 2 impasse Fizeau, 72100-Le Mans.
- NICE** [06, 20, 83] ((Marseille 5758-43))
J. MARIA, 5 ter rue Edith Cavell, 06000-Nice.
- Section du Var* : M.J. PAPAIZIAN, La Colle d'Artaux, 83500-La Seyne.
- ORLEANS-TOURS** [18, 28, 36, 37, 41, 45]
P. MONSEILLER, Département de Mathématiques, Université d'Orléans, 45045-Orléans Cedex ((La Source 1440-09)).
- Section de Tours* : Monique GODICHEAU, Appt. 235, 14 rue Léonard de Vinci, 37170-Chambray-lès-Tours.
- Section de Montargis* : KISTER, 52 rue des Vignes, 45120-Chalette.
- PARIS** [75, 77, 78, 91, 92, 93, 94, 95]
J. ADDA, 10 rue Vandrezanne, 75013-Paris.

Section de la Seine-Saint-Denis : M. LOI, 68 rue des Ecoles, Bât. A 318, 93300-Aubervilliers.

((Régionale Parisienne de l'A.P.M.E.P. Paris 25 108 63)).

Bulletin de la Régionale : Gilbert GRIBONVAL, 129 avenue du Général Leclerc, 91120-Palaiseau.

POITIERS [16, 17, 79, 86]

J. BOROWCZYK, 1 rue de Provence, 86000-Poitiers ((Bordeaux 38-52-59)).

Section des Deux Sèvres : FROMENTIN, 29 avenue de Nantes, 79000-Niort.

Section de la Charente : MARRON, CES La Grande Garenne, rue Pierre Aumâtre, 16000-Angoulême.

Section de la Charente Maritime : Y. DARDANT, 25 rue Philippe Vincent, 17000-La Rochelle.

REIMS [08, 10, 51, 52]

THIERUS, 57 rue David, 51100-Reims ((Châlons-sur-Marne 1262-80 L)).

Section des Ardennes : ZILLI, 8 Le Grenet Riglemont, 08100-Charleville Mézières.

Section de l'Aube : HAUBRY, 16 A rue Jules Didier, 10120-Saint-André-les-Vergers.

Section de la Haute-Marne : Mlle GODON, 8 rue de Lorraine, 52000-Chaumont.

Section de la Marne : SCHACHERER, 26 rue du Moulin à Vent, 51200-Epernay.

RENNES [22, 35, 56]

LEVEILLEY, 28 avenue des Vignes, Châtillon-sur-Seiche, 35230-St-Erblon ((Rennes 1707-29)).

ROUEN [27, 76]

Michèle CHOUCHAN, 16 rue du Bailliage, 76000-Rouen ((Rouen 1350-13 D)).

STRASBOURG [67, 68]

SILVESTRE, 17 rue Grimling, 67200-Strasbourg

Section du Haut-Rhin : LEVASSORT, 27 rue Georges Sand, 68-Mulhouse-Dornach.

Section de l'Allemagne Fédérale : G. TOUYET, S.P. 69.037 F.F.A.

TOULOUSE [09, 12, 31, 32, 46, 65, 81, 82]

Line MAILHOS, Université Paul Sabatier, 31077-Toulouse Cedex ((Toulouse 2035-51)).

Section de l'Ariège : Mme GALY, 96 avenue V. Pilhes, 09400-Tarascon-sur-Ariège.

Section de l'Aveyron : SCHIOPETTO, CES La Penderie, 12000-Rodez.

Section du Gers : Mlle BORIES, 29 rue de Metz, 32000-Auch.

Section des Hautes-Pyrénées : TARBOULIER, 36 rue M. Lamarque, 65000-Tarbes.

Section du Tarn-et-Garonne : FOURNIE, CES Bourdelle, boulevard Herriot, 82000-Montauban.

Section du Lot : Mme PICARD, E.N., av. Henri Martin, 46000-Cahors.

Section du Tarn : Christine MANDIRAC, Lycée de Carmaux, 81400-Carmaux.

ANTILLES

Mme LAMOTTE, 1 km 700 route de Schoelcher, voie n° 6, 97200-Fort-de-France.

Le Comité national de l'A.P.M.E.P.

Organisme élu par l'ensemble des adhérents et qui a la responsabilité de l'action de l'A.P.M.E.P. dans l'intervalle des assemblées générales. Celles-ci ont lieu annuellement, au printemps le plus souvent ; chaque assemblée renouvelle par quart le Comité dont l'effectif a été porté à 40 membres (vote de juin 1969).

Le Comité se réunit trois fois par an. Il élit le Bureau national à qui il délègue ses pouvoirs de façon permanente. La composition du Bureau et la liste des Commissions sont rappelées sur la page 2 de la couverture du Bulletin.

Les Régionales peuvent se faire représenter aux réunions du Comité par un membre de l'Association non membre du Comité et alors avec voix consultative.

Sortants en 1976 : Monique CHAUSSIER (*I.D.E.N.*, Beauvais) ; Michel DE COINTET (*Lycée*, Sélestat) ; Claude HAMEAU (*Instituteur*, Paris) ; Robert LEBoulleux (*Lycée Saint-Louis*, Paris) ; André MYX (*E.N. de garçons*, Lyon) ; Colette PELE (*Lycée Gabriel Fauré*, Paris) ; A. PFEIFFER (*Lycée Thiers*, Marseille) ; Charles PISOT (*Faculté des Sciences*, Paris) ; Paul SEBAH (*Lycée Technique*, Marseille) ; Jacques SIROS (*Lycée Louis-le-Grand*, Paris).

Sortants en 1977 : Jean BLION (*P.E.G. C.E.T.*, ENNA Lyon) ; Jean CHABRIER (*C.E.S.*, Remoulins) ; Michèle CHOCHAN (*Lycée des Bruyères*, Rouen) ; André DELEDICQ (*Université*, Paris 7e) ; Nicole DERETZ (*Institutrice*, Aubervilliers) ; Daniel DUCLOS (*Université*, Lyon) ; Louis DUVERT (*Lycée J. Moulin*, Lyon) ; Nicole EHRlich (*Lycée technique*, Cachan) ; Paul-Louis HENNEQUIN (*Université*, Clermont) ; Marie-Jeanne PAPAZIAN (*Lycée*, Toulon).

Sortants en 1978 : Jean AYMES (*Lycée Michelet*, Montauban) ; Roger CREPIN (*Inspecteur-Professeur*, *E.N.F.*, Limoges) ; Rachel HEBENSTREIT (*C.E.S. Maurice d'Ocagne*, Paris) ; Viviane LECLERCQ (*Lycée*, Mérignac) ; Mme LEHOUCHE (*Institutrice*, Vincennes) ; Pierre MAHAUT (*C.E.G.*, Saint Martin de Fontenay) ; Claude PAGANO (*C.E.T. Paul Langevin*, La Seyne-sur-Mer) ; Daniel REISZ (*Lycée J. Amyot*, Auxerre) ; Michel REYNET (*C.E.S.*, Egletons) ; André ROUCHIER (*Université*, Orléans).

Sortants en 1979 : Henri BAREIL (*C.E.S.*, Toulouse-Bellevue) ; Lucien CHAMBADAL (*Lycée Saint-Louis*, Paris) ; Nicole CHOCHAN (*C.E.S.*, Clichy-sous-Bois) ; Francis DUCROCQ (*Instituteur*, Remilly-sur-Tille) ; André FABRE (*Instituteur*, Francheville-le-Haut) ; Gilbert GRIBONVAL (*Lycée Lakanal*, Sceaux) ; José MARIA (*Lycée Estienne d'Orves*, Nice) ; Guy MEHL (*Lycée Marie Curie*, Strasbourg) ; René METREGISTE (*C.E.S. Argonne*, Orléans) ; Olivier RENAUT (*E.N.F.*, Dijon).

Membre de droit : E. CAMY-PERRET.

NOMS et ADRESSES des MEMBRES du BUREAU ET DES COMMISSIONS DE L'A. P. M. E. P.

M. ARNOULD, 44 av. Albert Thomas, 93320-Les-Pavillons-sous-Bois (Tél. 848.35.52)

C. AUQUE, Maître assistant de Mathématiques, B.P. 45, 63170-Aubière

H. BAREIL, 7 rue des Pivoines, 31400-Toulouse (Tél. (61) 52.74.53)

C. BLANZIN, 150 avenue Félix Faure, 75015-Paris (Tél. 250.16.41)

J. BLION, 25 rue Antoine Roibet, 69740-Genas

A. BLONDEL, 154 avenue Marcel Cachin, 92320-Châtillon-sous-Bagneux (Tél. 253.18.32)

G. BONNEFOY, La Cure, St Cyr le Chatoux, 69870-Lamure-sur-Azergues

J. BORNENS, 86 rue de l'Abbé Groult, 75015-Paris (Tél. 828.73.47)

J. CHASTENET de GERY, 4 rue des Capucins, 92190-Meudon-Bellevue (Tél. 027.48.48)

M. CHOUGHAN, 16 rue du Bailliage, 76000-Rouen (Tél. (35) 98.00.25)

F. COLMEZ, 12 rue Léo Delibes, 92330-Sceaux (Tél. 702.39.38)

R. CREPIN, 94 avenue de Locarno, 87000-Limoges (Tél. (55) 33.46.68)

M. DE COINTET, 62 rue Dieweg, 67600-Sélestat (Tél. (88) 92.10.61)

A. DELEDICQ, 3 allée C. Marot, 91400-Orsay (Tél. 590.27.06)

F. DUCROCQ, Instituteur à Remilly-sur-Tille, 21110-Genlis

L. DUVERT, 21 bd. des Castors, 69005-Lyon (Tél. (78) 25.03.17)

N. EHRLICH, 4 allée des Renardeaux, 94260-Fresnes (Tél. 350.85.47)

A. FABRE, Ecole Elémentaire, 93 Grande Rue, 69340-Francheville (Tél. (78) 34.02.78)

M. GLAYMANN, 14 rue de Chavril, 69110-Sainte-Foy (Tél. (78) 52.03.37)

A. GOURET, 32 rue des Essarts, 69-Bron (Tél. 69.98.33)

G. GRIBONVAL, 129 av. du Général Leclerc, 91120-Palaiseau

R. HEBENSTREIT, 277 rue de Vaugirard, 75015-Paris (Tél. 532.36.58)

P.L. HENNEQUIN, 15 rue du Pavin, 63000-Clermont (Tél. (73) 93.10.44)

R. LEBoulLEUX, 3 rue des Chênes, 92160-Antony (Tél. 666.15.78)

V. LECLERCQ, 18 rue Levieux, 33000-Bordeaux (Tél. (56) 48.15.51)

J. LECOQ, 16 rue du Plateau Fleuri, 14000-Caen (Tél. (31) 81.04.77)

J. MARIA, 5ter rue Edith Cavell, 06000-Nice (Tél. (93) 81.53.64)

R. METREGISTE, 22 rue Georges Le Comte, 45400-Fleury-les-Aubrais (Tél. (38) 62.05.29)

F. MONNET, 8 allée Louise Labbé, 75019-Paris (Tél. 202.24.52)

A. MYX, 9 bis allée E, rue du Capitaine Ferber, 69300-Caluire

C. PAGANO, Route de Janas, 83500-La-Seyne-sur-Mer (Tél. (94) 25.20.85)

C. PELE, 16 rue Fagon, 75013-Paris (Tél. 337.69.73)

D. POISSON, 49/52 rue Claude Perrault, 59200-Tourcoing

D. REISZ, 11 rue du Saule, 89610-Vincelles (Tél. (86) 53.21.93)

O. RENAUT, 38 boulevard de l'Université, 21-Dijon (Tél. (80) 30.20.55)

A. ROUCHIER, 39 Petite Rue du Port, 45110-Châteauneuf-sur-Loire (Tél. (38) 63.22.16, poste 638)

G. WALUSINSKI, 26 Bérangère, 92210-Saint-Cloud (Tél. 771.69.09)

Adresses des différents I.R.E.M.

AMIENS

48, Rue Raspail BP 619 - 02322 SAINT QUENTIN CEDEX

BESANCON

Faculté des Sciences, La Bouloie — 25000 BESANCON

BORDEAUX

351 cours de la Libération — 33405 TALENCE. Tél : (56) 80.74.42

BREST

Université de Bretagne occidentale, avenue V le Gorgeu — 29200 N BREST. Tél : (98) 80.16.94 (poste 690)

CAEN

Université, Esplanade de la Paix — 14000 CAEN

CLERMONT-FERRAND

Complexe Scientifique des Cézeaux, B.P. 45 — 63170 AUBIERE. Tél : (73) 92.22.26 (poste 33 97)

DIJON

Université de Dijon, B.P. 138 — 21004 DIJON CEDEX. Tél. : (80) 41.00.34 (postes 641 (secrétariat), 647 (M. ARBAULT), 648 (M. MARCHIVIE))

GRENOBLE

B.P. 41 — 38401 SAINT MARTIN D'HERES. Tél. : (76) 54.61.45 (poste 502)

LILLE

Faculté des Sciences et Techniques — B.P. 36 — 59650 VILLENEUVE D'ASCO. Tél : (20) 56.92.00

LIMOGES

U.E.R. Sciences Exactes et de la nature, 123 rue Albert Thomas — 87000 LIMOGES. Tél. : (55) 77.57.15

LYON

Université Claude Bernard — LYON I — 43 bld. du 11 Novembre 1918 — 69621 VILLEURBANNE. Tél : (78) 52.03.37

MARSEILLE

U.E.R. de Marseille Luminy, 70 route Léon Lachamp — 13009 MARSEILLE. Tél : (91) 41.39.40

MONTPELLIER

Faculté des Sciences, Place Bataillon — 34000 MONTPELLIER. Tél : (67) 63.42.14

NANCY

Boulevard Charlemagne, Locaux de l'I.U.T. — 54001 NANCY. Tél : (28) 27.38.99 ou (28) 27.38.99

NANTES

Université de Nantes — U.E.R. Mathématiques, 2 chemin de la Houssinière, B.P. 1044 — 44037 NANTES CEDEX. Tél. : (40) 74.50.70 et 74.77.01 (poste 398, Mlle PELTIER)

NICE

Département de Mathématique, Parc Valrose -- 06034 NICE CEDEX. Tél. : (93) 84.60.29 (poste 372)

ORLEANS

Université -- Domaine Universitaire de la Source -- 45045 ORLEANS CEDEX. Tél. : (38) 63.22.16 (poste 638)

PARIS

Université Paris VII -- 2 place Jussieu, Tour 56 -- 75005 PARIS. Tél. : (1) 336.25.25 (poste 53 84)

PARIS NORD

Université Paris Nord -- Place du 8 Mai 1945 -- 93200 SAINT-DENIS. Tél. : (1) 243.20.90

POITIERS

Faculté des Sciences, 40 avenue du Recteur Pineau -- 86022 POITIERS. Tél. : (49) 46.26.33 (poste 405)

REIMS

Faculté des Sciences, B.P. 347 -- 51062 REIMS CEDEX. Tél. : (26) 47.82.61 (poste 208)

RENNES

Université, B.P. 25 A -- 35031 RENNES CEDEX. Tél. : (99) 36.48.15

ROUEN

B.P. 27 -- 76130 MONT SAINT AIGNAN. Tél. : (35) 70.42.73

STRASBOURG

Département de Mathématiques, 10 rue du Général Zimmer -- 67084 STRASBOURG. Tél. : (88) 61.48.20

TOULOUSE

Université Sabatier, 118 route de Narbonne -- 31400 TOULOUSE. Tél. : (61) 52.14.14

Sections de l'A.P.M.E.P. à l'étranger

Les Collègues ou lecteurs résidant dans les pays indiqués ci-dessous sont invités à prendre contact avec les animateurs dont nous vous donnons les adresses.

Cambodge : GUYOT, Conseiller pédagogique, Ambassade de France, Phnom-Penh, Cambodge.

Colombie : Manuel Humberto ALVAREZ, Instituti de Ciencias, Avenida 22, Bogota D.E., Colombie.

Côte d'Ivoire : MATHURIN, B.P. 20694, Abidjan, Côte d'Ivoire. (Il s'agit de l'Association Ivoirienne, qui travaille en liaison étroite avec l'A.P.M.E.P.). Section locale à Bouaké.

Cuba : Olga MASCORT del BUSTO, Ministerio de Educación, Obispo y Mercaderio, La Habana.

Laos : GAGNEUX, S.P. 50.056/C, Paksé, Laos.

Liban : Rafic EIDO, Centre d'études mathématiques, Beyrouth, Liban.

Maroc : G. SAVARY, Lycée Lyautey II, 13 place de Reims, Casablanca.

Sénégal : Seyni NIANG, Lycée Van Valenhoven, Dakar.

Syrie : Albert MAHE, Centre de Documentation Pédagogique, B.P. 3557, Damas.

Togo : Komi OLLANLO, Ecole Normale Supérieure, Atakpamé, Togo.

Tunisie : Antoine VALENZA, Faculté des Sciences de Tunis.

U.S.A. : Gilles THOMAS, chef du département de mathématiques, Ecole Française Internationale de Washington, 9600 Forest Road, Bethesda-Maryland, 20014 U.S.A.

LE COIN DU TRÉSORIER

Adresse : APMEP, 29 rue d'Ulm, Paris 5ème, C.C.P. Paris 5708-21

Prix du numéro du Bulletin	15 F
Abonnement annuel au Bulletin	80 F
Cotisation valable pour l'année civile, du 1er janvier au 31 décembre, donnant droit au titre de membre de l'Association APMEP.	
Tarif pour l'année civile 1976	

(Pour l'admission en qualité de membre, consulter l'article 3 des statuts)

A) { Membres instituteurs	10 F
{ Membres retraités	
B) Membres dont l'indice de traitement * est inférieur ou égal à 350 ..	20 F
C) Membres dont l'indice de traitement * est supérieur à 350	30 F
Tarif réduit pour l'abonnement au Bulletin, valable pour l'année civile, du 1er janvier au 31 décembre, pour tous les membres de l'APMEP.	
Tarif pour l'année civile 1976	35 F
Les adhérents sous les drapeaux bénéficieront d'un abonnement gratuit d'un an.	

La cotisation seule ne donne pas droit au service du Bulletin.

Supplément pour expédition "par avion", variable suivant votre résidence : renseignez-vous en écrivant au siège de l'association.

Pour l'abonnement complémentaire, par les adhérents, à la revue de la Société Belge des professeurs de mathématiques d'expression française "Mathematica et Paedagogia", le tarif pour 1976 est de 33 F.

Cas des "maîtres polyvalents"

Tarif pour l'année civile 1976

Cotisation assurant l'affiliation simultanée aux deux associations	
APBG — APMEP	30 F
Abonnement aux Bulletins des deux associations	40 F

Mais attention : cette cotisation n'est pas à verser au compte de l'APMEP (voir ci-dessous : adhésions nouvelles)

L'importance du nombre des adhérents nous oblige à utiliser un fichier automatique. La bonne tenue de ce fichier exige que chacun de nous se conforme strictement aux règles suivantes :

1° ADHESIONS NOUVELLES, ABONNEMENTS NOUVEAUX : adresser au siège de l'APMEP, sous enveloppe timbrée, une fiche rose dûment remplie, et un chèque postal (3 volets) à l'ordre de l'APMEP, Paris 5708-21. Si vous enseignez aussi les sciences naturelles, et désirez bénéficier de notre formule d'adhésion groupée APBG — APMEP, remplissez une fiche jaune (bulletin d'adhésion "maîtres polyvalents"). Joignez-y votre coupon détachable et un chèque postal (3 volets) de 70 F à l'ordre de 96-APBG-Math. PA Source 3140145, et adressez le tout, sous enveloppe timbrée, à : APBG-Math, INRDP, 29 rue d'Ulm, Paris 5ème.

Note du Secrétariat : utilisez de préférence un chèque de virement à notre CCP ou, à la rigueur, un chèque bancaire. Nous renverrons à son expéditeur tout autre mode de paiement.

2° RENOUELEMENT DES COTISATIONS ET ABONNEMENTS :
vous recevrez un appel pour ce renouvellement dans le courant de janvier ; cet appel porte un *coupon détachable* qu'il faut joindre au titre de paiement (voir ci-dessous la note du Secrétariat).

L'appel lui-même doit être conservé. Vous y trouverez, chaque fois que vous en aurez besoin, le numéro de votre fiche dans notre répertoire. Vous y joindrez le talon de votre chèque et ce couple constituera votre carte d'adhérent.

Note du Secrétariat : si vous aviez renouvelé votre cotisation et votre abonnement avant d'avoir reçu l'appel, veuillez nous adresser le coupon détachable qui nous est indispensable, en rappelant la date et la nature de votre premier envoi, cela pour éviter toute erreur dans la tenue de votre compte.

Vous trouverez, joint à l'appel de cotisation, une fiche qui vous permet de choisir parmi des publications de l'APMEP. Après l'avoir soigneusement remplie, vous adresserez cette fiche directement au siège de l'association, en respectant les délais indiqués.

3° CHANGEMENT D'ADRESSE (OU D'ETAT CIVIL) : porter sur une feuille, et non au dos d'un chèque, l'ancienne adresse (ou l'ancien état civil), rappeler le numéro de votre carte APMEP, puis donner les renseignements nouveaux : envoyer cette feuille sous enveloppe timbrée au siège de l'APMEP.

Note du Secrétariat : impossible de retrouver rapidement et sans erreur votre fiche si vous n'indiquez pas votre numéro A.P.M. (lequel est rappelé sur la bande ou l'étiquette-adresse du Bulletin) ; un changement d'adresse inscrit au dos d'un chèque a toutes les chances de se perdre.

Merci à tous nos adhérents et abonnés, dont la bonne volonté est indispensable à la bonne marche de notre association.

* Indice figurant sur le bulletin de paye.

**SI VOUS CHANGEZ D'ADRESSE,
SIGNALÉZ-LE DES QUE POSSIBLE A**

I'A. P. M. E. P.

(29, rue d'Ulm, 75005 PARIS)

**SANS ATTENDRE L'APPEL DE
COTISATION**

EDITORIAL

Inquiétudes

par Michel DE COINTET

C'est en février 1975 que le Ministre de l'Education a publié ses "Propositions de modernisation du système éducatif français". Le Bureau National de l'A.P.M.E.P. en a fait une analyse dont il a fait part au Ministre et qui a été publiée par le Bulletin n° 298. L'A.P.M.E.P. a participé au groupe de travail ministériel sur les Contenus de l'Enseignement des Mathématiques au printemps 1975 ; le rapport en a été publié dans le Bulletin n° 300. Le 11 juillet 1975, le Président de la République a promulgué la loi sur l'Education que l'on connaît. "C'est en 1976 que vont être rédigés les textes d'application de cette loi et que de nouvelles dispositions seront prises dans le domaine de la formation des maîtres" (René Haby, le Courrier de l'Education, 5.1.76).

* * *

Les contenus (et les horaires qui leur sont liés) seront, à notre connaissance, soumis au Conseil de l'Enseignement Général et Technique et au Conseil Supérieur de l'Education, à la fin de cette année scolaire pour les classes de Sixième et de Seconde, et au

début de la prochaine année scolaire pour les autres classes. "Le Courrier de l'Education" nous informe régulièrement de la volonté du Ministre d'une large concertation et plus récemment d'une large consultation des enseignants. Mais, en ce qui concerne les Mathématiques, rien n'est encore prévu sur les formes de cette consultation, rien n'est arrêté sur les horaires, ce qui interdit toute prévision sérieuse des contenus, et nous ne savons rien de ce qu'il adviendra des suggestions de l'A.P.M.E.P. et du rapport du groupe de travail ministériel. Dans ce contexte, rien n'est venu dissiper nos inquiétudes quant aux dispositions d'horaires prévues dans les propositions du Ministre qui tendaient à réduire notablement le temps scolaire consacré aux Mathématiques dans l'enseignement obligatoire et à en accentuer les différences entre les nombreuses options des lycées. Si nous avons demandé un horaire de Mathématiques de quatre heures hebdomadaires (dont une dédoublée) dans chaque classe du Premier Cycle, ce n'est pas pour "conserver l'acquis", mais bien parce que nos élèves, dans leur quasi-totalité, ont besoin de TEMPS — de temps passé avec leur professeur — pour comprendre les notions et les principes de base, pour révéler intuition et imagination, pour acquérir méthode et rigueur de pensée : temps d'appréhension, de réflexion, de maturation ; temps fait de recherches, d'essais, de rapprochements, de mises au point, d'agencements. Les contenus de notre enseignement devront tenir mieux compte de ce besoin et de ceux des autres disciplines, pour que les différents enseignements ne constituent pas une nouvelle encyclopédie du savoir minimum, mais participent à une réelle formation des élèves. Mais de quel temps disposeront ceux qui seront chargés de définir ces contenus ? Pourront-ils être expérimentés ?

*
* *
*

Les inquiétudes exprimées en mars 75 par le Bureau National quant à la formation des maîtres sont, hélas, confirmées par les récentes initiatives du Ministre, à savoir :

- 1) L'intégration dans le corps des P.E.G.C. d'instituteurs, de maîtres enseignant dans la voie III, et de maîtres auxiliaires, sans que soient prévus les moyens qui leur permettraient d'acquérir les compléments de formation qu'eux, et les élèves que l'Administration pourra leur confier, sont en droit d'attendre.

- 2) Les conventions passées avec trois Universités pour la formation des professeurs de Second Cycle de lycée — à l'exclusion de tous autres —. Seule la formation propre à la discipline serait pour le moment confiée à l'université. La formation à la didactique de la discipline, limitée à des stages, serait coupée de la recherche que les universités ont pu développer dans ce domaine. La formation initiale serait isolée de la formation continue.

L'A.P.M.E.P. ne cessera de revendiquer pour tous les maîtres une formation initiale et continue digne de ce nom.

P.S. Tous se sont réjouis d'apprendre la mise en liberté de Léonid PLIOUCHTCH. C'est une très bonne nouvelle de ce début d'année.

Une ancienne brochure de l'A.P.M.E.P. :

L'ENSEIGNEMENT DE LA MECANIQUE

reste disponible : l'exemplaire 2 F (franco 3,50 F)

Au sommaire de cette brochure de 40 pages :

Paul GERMAIN : Principes et notions fondamentales de la mécanique classique.

R. MAZET : Les méthodes de la mécanique vibratoire des structures déformables.

J. KAMPE DE FERIET : Les équations fondamentales de la mécanique des milieux continus.

P. GERMAIN : Pour l'introduction d'éléments de dynamique dans le programme de Mathématiques de la classe de Mathématiques Élémentaires.

POUR VOTRE BULLETIN

Envoyez des articles, vos suggestions, vos critiques, à

Louis DUVERT
21 Boulevard des Castors
69005 LYON

Nous essayons d'appliquer le processus suivant :

Chaque article est lu attentivement par deux ou trois collègues, dont un membre de la Commission des Publications (voir sa composition ci-dessous); celui-ci rend compte de ces lectures devant la Commission ; c'est elle qui décide :

- soit d'accepter l'article tel quel
- soit de faire demander à l'auteur des modifications
- soit de procurer l'article à tous les membres de la Commission
- soit de refuser l'article.

L'auteur est informé de cette décision, dans un délai qui risque d'être assez long (le nombre de pages du Bulletin et le nombre de réunions de la Commission sont forcément limités...).

Notre tâche est notablement facilitée

- si l'article est dactylographié écrit très lisiblement)
- si vous l'envoyez en quatre exemplaires (photocopies ou autres)
- si vous exécutez vous-même les dessins à l'encre de Chine sur papier calque.

La Rédaction

Commission des Publications :

Président : M. DE COINTET

Directeur : L. DUVERT

Responsables :

Vie de l'Association : M. CHOUCHAN

Problèmes : C. AUQUE

Dictionnaire : M. ARNOULD

Mots : J. LECOQ

Bibliographie : G. WALUSINSKI

Régionales : O. RENAUT

Analyse des Manuels Scolaires : H. BAREIL

Tribune Libre : M. DE COINTET

Elémentaire : A. FABRE

Premier Cycle : V. LECLERCQ

Second Cycle : D. REISZ

Enseignements Techniques courts : J. BLION

Enseignements Post-Baccalauréat : G. GRIBONVAL

Interdisciplinarité : F. COLMEZ

Histoire des Mathématiques : G. BONNEFOY

Autres Membres : M. GLAYMANN, A. GOURET, P.L. HENNEQUIN,
F. MONNET.

DANS LE SECOND CYCLE CLASSIQUE ET TECHNIQUE

Introduction

Les récentes journées consacrées à l'Analyse et organisées par l'Inspection Générale dans chaque Académie, ont soulevé de nombreuses questions relatives à l'enseignement des Mathématiques dans les classes du Second Cycle Classique et Technique ; non seulement quant à son contenu, mais surtout quant à ses *objectifs* et ses *méthodes*, dans les nombreuses sections de ce cycle.

Puissent les articles qui suivent nous aider dans notre recherche pédagogique de tous les jours, avide de trouver des activités mathématiques propres à révéler et développer les capacités de nos élèves, *tels qu'ils sont*.

Michel DE COINTET

La classe de seconde

par Jean MONIER

"Le malentendu commence avec la pédagogie, cette situation intime et particulière où une génération offre ses expériences de l'art et de la vie à une autre génération".

Nous nous trouvons, au début du second cycle, devant un milieu qui n'est pas homogène, ni cohérent.

Comment en sommes-nous arrivés là ?

Au départ, depuis la classe préparatoire, nous avons introduit le langage des ensembles et tout s'est bien passé. Pourquoi ?

L'enfant était en train de mettre en place sa langue maternelle ; nous lui avons présenté une expérience du même genre, mais avec une certaine nouveauté, d'où une réceptivité joyeuse pour une curiosité toujours en éveil. C'est bien un langage que nous lui avons enseigné ; le signe verbal ou écrit toujours proche du référent. Un langage qui colle au réel donc un enseignement concret.

Puis, peu à peu, nous l'avons initié au parler de "la Mathématique". Les mots, les structures, les moyens et les fins se précisèrent et, insensiblement, un certain besoin de rigueur apparut. Comme nous avons tenu compte, à chaque étape, des possibilités intellectuelles de l'enfant, en général tout continue à se passer très bien jusqu'à la fin du cycle d'observation.

Là, nous sommes devenus présomptueux. Notre désir : aller du "langage" vers la "langue". Il fallait trouver un passage entre la langue courante (mots au sens "relativement" clair et à syntaxe pauvre) et une langue formelle (aux symboles "arbitraires" et à syntaxe riche). Le "langage" de la géométrie (mots dont le sens est donné par l'intuition spatiale et pourtant une syntaxe assez riche) offrait une tentation et tout le monde s'est plongé dans une "géométrie formalisable loin de l'intuition recommandée".

Nous croyons que, pédagogiquement, l'introduction de la géométrie, à ce stade, était utile et nécessaire, mais à la condition de bien distinguer la géométrie "physique" et la géométrie "formelle".

La première aurait permis le passage souhaité, la seconde restait dans l'axe des études du cycle d'observation.

L'erreur commise, la plupart des résultats heureux de la période précédente disparurent, d'où un nouveau milieu de départ très hétérogène.

Y a-t-il des remèdes ?

Explorons "un" programme officiel qui "donne de nombreuses occasions de revoir les notions relatives aux relations, applications, structures; aucune révision systématique n'est à faire à leur sujet."

Pour ceux qui sont déjà dans le "bain", c'est évidemment inutile, il faudra pourtant préciser leur vocabulaire, approfondir

leurs connaissances, s'efforcer que leur savoir-faire ne devienne une pure technique. Mais pour les autres, le plus grand nombre, il s'agit d'une véritable nouvelle initiation.

Attention, nos partenaires, s'ils ne sont pas encore des adultes, ne sont plus des enfants. Alors notre comportement : séduire ; notre attitude : une invitation à rentrer, avec nous, dans un merveilleux royaume, "celui de la recherche dans la joie". Découvrir un langage adéquat et le découvrir avec eux. C'est le temps de la patience.

Essayer d'éliminer les blocages : la fable de la "bosse", l'anxiété, l'appréhension, le poids des habitudes. Ils ont déjà une "image de marque" qu'il ne faut pas attaquer de front, mais contourner, jouer sur le désir d'une certaine logique, sur le besoin de clarté et même sur... l'utilité possible.

Susciter une nouvelle prise de conscience, stimuler, trouver de nouvelles motivations et, pour cela, n'ayons pas peur de devenir "pluridisciplinaires". Montrer que les problèmes actuels demandent, pour leurs résolutions, les mêmes qualités et les mêmes efforts que les Mathématiques.

Exemple : maîtriser l'information — non pas seulement recevoir et accumuler des informations —, mais apprendre à les choisir, à les classer, à les organiser rationnellement sans oublier pourtant le sens critique et l'intuition.

Le départ sera donc très, très lent, pour permettre, à la fois, l'accommodation et l'assimilation, qui entraînera l'apparition d'un intérêt croissant.

Approfondir le vocabulaire, revoir les symboles de base, s'aider d'un "certain" concret avec les figures et les diagrammes.

Le milieu sera presque "homogénéisé" lorsque chacun aura compris :

d'une part : que le langage des ensembles a été privilégié parce qu'il n'a que deux termes primitifs (*élément* et *ensemble*) et une règle du jeu unique — le système dichotomique du *oui* et du *non* fait la force mais aussi la faiblesse de la "Mathématique";

d'autre part : que "l'objet" considéré est unique mais que les symboles qui peuvent le représenter sont multiples, donc que toutes les égalités mathématiques ayant lieu entre signes représentatifs sont pratiquement des relations de langage.

Les symboles s'éloignent peu à peu de l'objet comme le signe linguistique du référent — le "langage" devient une "langue" et a tendance à se formaliser — Ne pas oublier que dans "les mathématiques", l'objet est plus proche, ce qui permet parfois une approche presque expérimentale ; exemple : la géométrie physique.

Il faut maintenant songer au message : toute science a un contenu.

Il y a lieu de distinguer "la Mathématique", vocabulaire et syntaxe de la langue ensembliste, base d'un langage de communication — qui permet d'exprimer effectivement ce que l'on veut dire — mais qui, de plus, indique le point de vue dont on envisage le concept considéré ; donc une méthodologie dont seuls les résultats ont besoin d'être explicites.

Cette base élaborée va nous aider à aborder et à créer un lien d'unité entre "les Mathématiques appliquées" : théorie des nombres, analyse, statistique, probabilités, géométrie, trigonométrie, topologie...

Comment transmettre le message ? Question cruciale : reproduire ou inventer. Proposer des problèmes très ouverts pour entretenir le souci d'agir et d'entreprendre, activité libre et inventive à laquelle l'adulte accède très rarement parce que cette attitude fondamentale n'a pas été cultivée — donc la voie royale est le "maternage" (la mère *incite* l'enfant à marcher), sans pourtant négliger "l'apprentissage" (le maître *travaille* devant l'apprenti), ni même "l'enseignement", si décrié, par le discours oral ou écrit. Mais attention, les manuels présentent les "démonstrations" d'une manière si raisonnable, qu'ils cachent ou évacuent tous les échecs, tous les retours, toutes les difficultés et aussi toutes les joies de la recherche.

Notre tâche est à la fois difficile et contradictoire. Nous voulons apprendre à communiquer des valeurs universelles et impersonnelles ; pour cela, nous privilégions le "on" mais nous ne voulons pas sacrifier le "je" qui doit assumer "le dit" du "on" et rester le vecteur de la recherche.

Nous voulons apprendre à communiquer, mais nous ne voulons pas que la puissance magique du mot masque sa pure valeur de signifiant. Certains de nos élèves parlent pour parler, captifs du

flux verbal, d'un certain ronron esthétique mais souvent, aussi, d'un certain infantilisme (le bambin, en apprenant le nom d'une chose, "acquiert" le moyen de l'obtenir).

Heureusement, notre problème mathématique est tel que "les chimères que celui même qui les avance n'entend pas, ne pourraient être écrites en ces caractères".

Notre message est présenté ainsi sous une forme toute nouvelle :

- . mise en évidence de structures significatives (comprendre)
- . leur insertion dans des structures plus vastes (expliquer)
- . distinction nette entre comprendre et savoir (posséder des informations)
- . incitation à la recherche dans l'enthousiasme.

Nous entraînons nos disciples vers une connaissance plus parfaite.

Co-naître, sans doute, une des routes du bonheur.

Notes sur l'introduction éventuelle des "filtres" dans l'enseignement du second degré

par Henri CARTAN

Au moment où certains songent à introduire la notion de *filtre* dans les classes de mathématiques du second degré (donc avant le baccalauréat), qu'il me soit permis de donner mon opinion en tant qu'enseignant.

Je voudrais dire pourquoi cette introduction me semble *tout à fait déraisonnable*. Certes la notion de filtre permet de formuler la notion de limite dans toute sa généralité, et c'est bien pourquoi il a fallu l'inventer. Mais, comme tant d'autres notions en mathématiques, elle ne prend d'intérêt pour un individu que lorsque celui-ci a déjà eu l'occasion de rencontrer (expérimentalement, si j'ose dire) des cas où elle est susceptible de s'appliquer. L'enseignement actuel, dit des "mathématiques modernes", est déjà trop

encombré d'une série de notions qui ne peuvent guère éveiller l'intuition de l'élève, pour la simple raison que celui-ci ne connaît pas assez d'exemples où elles s'appliquent.

C'est ainsi qu'il n'est pas bon de donner la définition générale et abstraite d'un *groupe* lorsque l'élève n'a encore rencontré que des groupes commutatifs (il est d'ailleurs facile de lui présenter des exemples de groupes non commutatifs, et cela me semble indispensable).

Pour en revenir aux filtres, il m'est arrivé, voici quelques années, de recevoir un appel téléphonique d'une jeune élève de première dans un lycée de la banlieue parisienne qui, ayant à traiter un petit exercice sur les filtres, espérait qu'en s'adressant à l'inventeur des filtres elle allait se faire donner la solution de son petit problème, sans autre effort de sa part. Il n'en fut hélas rien. Je tentai de lui faire dire quels *exemples* de filtres avaient été donnés dans le cours ; réponse : "le filtre des voisinages d'un point dans un espace topologique". C'est une réponse qu'elle n'aurait pas pu inventer toute seule ; je ne poussai pas la cruauté jusqu'à lui demander ce qu'est un espace topologique, et quels exemples elle en connaissait. D'autres exemples de filtres, point. On n'avait même pas mentionné le filtre des complémentaires des parties finies d'un ensemble infini. Dans ces conditions, je me demande ce que la notion de filtre pouvait bien éveiller dans l'esprit de cette élève, et comment elle aurait pu être capable d'en faire un usage intelligent.

Je crois que l'on devrait surtout, dans l'enseignement secondaire, s'attacher à bien faire comprendre la notion de limite d'une *suite* de nombres réels, ainsi que celle de continuité d'une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles ; à donner des *contre-exemples*, et aussi à apprendre à *calculer explicitement des limites* dans des cas simples où elles existent.

Certes, je comprends bien quelle pourrait être la satisfaction intellectuelle du professeur qui découvre la notion de filtre et se convainc qu'il a là l'outil le plus approprié pour la notion de limite. Mais, de grâce, que l'on veuille bien ne jamais oublier que l'enseignement n'est pas fait pour la satisfaction des enseignants, mais pour la formation des élèves !

5 décembre 1975

La didactique de l'analyse

(Conférence de Georges GLAESER au stage d'analyse de Strasbourg organisé par l'Inspection Générale)

I Le principe de l'enseignement en spirale

Des notions mathématiques particulièrement complexes ne peuvent pas être entièrement comprises en un seul instant, à un moment précis de la scolarité.

A leur propos, on peut opposer deux façons d'enseigner.

L'une d'elles, favorisée par la rédaction actuelle des programmes, consiste à *exposer en une seule fois* tout le contenu supposé de la matière à enseigner (par exemple : c'est en Quatrième que "l'on fait" les nombres réels et en Première que "l'on fait" la continuité). Mais comme la compréhension complète n'est jamais acquise d'emblée, on procède chaque année à des *révisions* du même exposé, en misant sur l'efficacité de la répétition. On pourrait croire que les élèves exceptionnellement doués comprennent dès la première fois. En fait, les enfants exceptionnellement curieux apprennent une foule de choses en dehors de l'école. Souvent, le premier cours du maître n'est qu'une synthèse d'une riche expérience vécue depuis longtemps.

L'autre méthode s'appuie sur une analyse préalable des difficultés à surmonter, sur une description *des seuils que l'élève doit franchir* pour accéder à une compréhension complète.

L'assimilation s'étend alors sur plusieurs années : à chaque reprise le niveau progresse ; on essaie de surmonter de nouveaux obstacles. C'est le principe de *l'apprentissage en spirale*.

Nous allons esquisser ici l'application de ce principe à l'étude des notions de limite, continuité, etc...

II Un peu d'histoire

Une première approche de la notion de limite était familière aux Grecs cinq siècles avant J. C. (Zénon d'Elée — cf. aussi les *Éléments* d'Euclide).

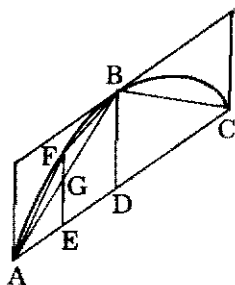
En tout cas, la compréhension explicite de cette notion est définitivement acquise dans l'oeuvre d'Archimède (né en 287 avant J. C.). Reportez-vous à ses travaux sur l'aire et la longueur du cercle, sur la quadrature de la parabole, la détermination de la

tangente à la spirale, etc. L'idée y est clairement et *rigoureusement* exposée. (Archimède — Les oeuvres complètes, traduites par P. Ver Eekes — A. Blanchard 1960 Paris). (Cf. aussi "Mathématiques et mathématiciens, DEDRON et ITARD — Magnard, Paris 1959).

"Cette démonstration lui paraissant manquer de rigueur, Archimède la reprend dans la *quadrature de la parabole* en remplaçant les lignes en nombre infini menées parallèlement au diamètre par des trapèzes et en démontrant ainsi que le triangle CAF n'est ni inférieur, ni supérieur au triple du segment.

Cependant, comme il fait encore appel à la mécanique, ce procédé ne le satisfait pas pleinement. Dans la seconde partie du traité sur la quadrature, calquant sa démarche sur celle d'Eudoxe dans la cubature de la pyramide, Archimède inscrit dans le segment ABC le triangle ABC ayant pour sommet B le sommet même du segment.

Il constate que ce triangle est plus grand que la moitié du segment, en le comparant au parallélogramme de base AC, dont la base supérieure est la tangente en B à la courbe.



Le segment comprend le triangle ABC et deux petits segments comme AFB. Dans chacun d'eux il inscrit, par le même procédé, un triangle comme AFB. Or,

$$\text{triangle AFB} : \text{triangle ABD} = \text{FG} : \text{BD}.$$

$$\text{Mais } \text{GE} = \frac{1}{2}\text{BD et } \text{FE} = \frac{3}{4}\text{BD, donc } \text{FG} : \text{BD} = \frac{1}{4}.$$

Le triangle AFB est donc $\frac{1}{4}$ du triangle ABD ou $\frac{1}{8}$ du triangle ABC.

Les deux nouveaux triangles inscrits sont donc, au total, $\frac{1}{4}$ du triangle ABC. Prenons ce dernier pour unité ; en continuant le procédé nous obtenons les sommes :

$$1 ; 1 + \frac{1}{4} ; 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} ; 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} \text{ etc...}$$

qui mesurent des aires de plus en plus proches de l'aire cherchée, et qui pourront s'en approcher d'une quantité moindre que toute grandeur donnée.

On retrouve là la méthode même d'Eudoxe. Cependant Archimède ne la développe pas exactement comme fait Euclide au livre XII. Il remarque que $\frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$ donc que

$$\frac{1}{4^n} + \frac{1}{3 \times 4^n} = \frac{1}{3 \times 4^{n-1}}.$$

A la somme

$$S_n = 1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^n},$$

ajoutons $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4^n}$. Il vient :

$$\begin{aligned} S_n + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n} &= 1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} + \frac{1}{3 \cdot 4^{n-1}} \\ &= 1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^{n-2}} + \frac{1}{3 \cdot 4^{n-2}}, \text{ etc...} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

On peut maintenant démontrer par l'absurde que le segment de parabole a pour mesure $\frac{4}{3}$, ou est les $\frac{4}{3}$ du triangle inscrit.

Sinon il est soit supérieur, soit inférieur à $\frac{4}{3}$. Qu'il soit d'abord supérieur. Désignons-le par Σ , et posons $\Sigma = \frac{4}{3} + U$.

Inscrivons dans le segment une suite de triangles telle que $\Sigma - S_n < U$, ce qui est toujours possible. Alors $\Sigma < S_n + U$.

Mais $S_n < \frac{4}{3}$, donc $\Sigma < \frac{4}{3} + U$, ce qui est absurde.

Supposons donc Σ inférieur à $\frac{4}{3}$ et posons $\Sigma = \frac{4}{3} - V$.

Inscrivons dans le segment une suite de triangles telle que le

dernier terme ajouté, $\frac{1}{4^n}$, soit inférieur à V . Alors, comme
 $\Sigma + V = \frac{4}{3}$, S_n étant inférieur à Σ , $S_n + V < \frac{4}{3}$, ou
 $\frac{4}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{4^n} + V < \frac{4}{3}$, ou etc ...”

Cependant il a fallu attendre 2000 ans pour que l'humanité puisse digérer correctement ces découvertes. L'élaboration du calcul différentiel et intégral, reprise sous la Renaissance, s'effectue au 17^{ème} siècle. (*Cavalieri, Fermat, Newton, Leibnitz*, etc.).

Puis, au XVIII^{ème} siècle, les mathématiciens exploitent intensivement l'instrument (Bernoulli, Euler, Lagrange, Laplace, etc...). Ainsi, on avait déjà parfaitement compris les notions fondamentales d'analyse bien *avant d'être capable de les énoncer*.

Cette dernière étape linguistique n'a été franchie qu'au XIX^{ème} siècle, notamment par *Cauchy*, grâce à ses formulations en ϵ .

Cet aperçu historique prouve que la compréhension de la notion de limite ne se réduit pas à une question de langage.

Il est souhaitable que nos élèves aient *compris* ce qu'est une *limite* bien avant d'assimiler les formulations à la Cauchy.

III L'analyse épistémologique de la notion de limite

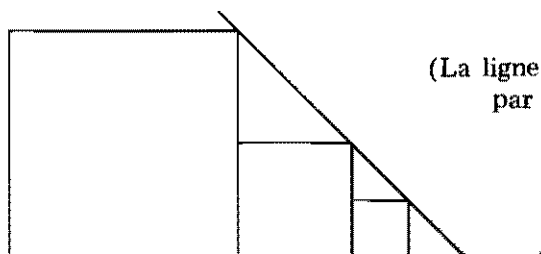
Sans prétendre à un inventaire exhaustif, signalons quelques seuils que l'élève devra franchir*.

A “S'approcher de la limite d'aussi près que l'on voudra”

Nous avons eu la chance d'écouter un exposé, à la Régionale de l'A.P.M., où un jeune instituteur racontait la découverte de la notion de limite par des écoliers du Cours Moyen.

* D'autres considérations sur l'enseignement de l'analyse se trouvent dans H. FREUDENTHAL — Mathematics as an Educational Task — Reidel Dordrecht 1973.

Le thème proposé par Madame Gilberte PEROT était l'étude de la figure :



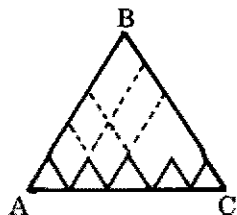
(La ligne oblique a été inventée par les enfants eux-mêmes)

Les écoliers ont parfaitement saisi ce que d'Alembert explique dans le texte que nous citons maintenant :

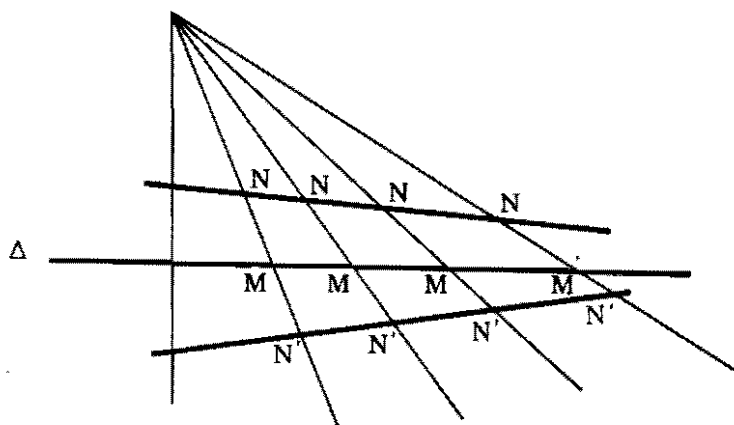
"Supposons cette suite de nombres fractionnaires à l'infini, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16},$ &c. & ainsi de suite en diminuant toujours de la moitié : les Mathématiciens disent & prouvent que la somme de cette suite de nombres, si on la suppose poussée à l'infini, est égale à 1. Cela signifie, si on veut ne parler que d'après des idées claires, que le nombre 1 est la *limite* de la somme de cette suite de nombres c'est-à-dire, que plus on prendra de nombres dans la suite, plus la somme de ces nombres approchera d'être égale à 1, & *qu'elle pourra en approcher aussi près qu'on voudra*. Cette dernière condition est nécessaire pour compléter l'idée attachée au mot *limite*. Car le nombre 2, par exemple, n'est pas la limite de la somme de cette suite, parce que, quelque nombre de termes qu'on y prenne, la somme à la vérité approchera toujours de plus en plus du nombre 2, mais ne pourra en approcher aussi près qu'on voudra, puisque la différence sera toujours plus grande que l'unité."

Un exercice instructif de niveau comparable est l'étude de la suite des "dents de scie" dessinée ci-dessous.

La suite des lignes brisées "tend, en un certain sens, vers le segment AC". Mais la longueur reste constante : elle est égale à $AB + AC = 2AC$.



Une autre manipulation précoce concerne le tracé de la *conchoïde de Nicomède*.



M décrit la droite Δ et les segments MN (resp. MN') gardent une même longueur.

Lorsque M s'éloigne sur la droite, la distance de N à Δ tend vers 0 sans jamais s'annuler.

Un jeune enfant peut constater tout seul que le point N s'approche indéfiniment de la droite Δ sans jamais l'atteindre.

La découverte du phénomène des *asymptotes*, si surprenant pour celui qui n'est pas encore initié, est une expérience très importante.

Elle peut précéder de plusieurs années l'aptitude à exprimer ce phénomène dans les formes requises, bien avant l'étude de la fonction homographique.

B Une suite n'a pas nécessairement une limite

Nos élèves ne tirent aucun bénéfice des définitions comportant la locution "*si elle existe...*" s'ils n'ont pas acquis au préalable un stock de souvenirs concernant l'existence ou l'inexistence. On fera donc étudier beaucoup d'exemples analoges à

$$U_n = \frac{2 + (-1)^n n}{n + 1}$$

Je signalerai ici une expérience pédagogique que j'ai renouvelée avec des élèves du DEUG (option heuristique).

“Soit x un nombre réel fixe tel que $0 < x < 1$. On demande de décrire l'ensemble des nombres $(1 - x^n)^m$ où n et m décrivent l'ensemble des nombres entiers”.

En une heure et demie, ces étudiants ont découvert, par eux-mêmes, les phénomènes de *densité*, de *bornes* (supérieures et inférieures) dont on ne leur avait pas encore parlé en cours.

Les connaissances préalablement requises ne dépassent pas la familiarité avec la suite géométrique. Cet exemple de pédagogie paradigmatique (“Das Exemplarische Unterrichts” inspiré de Martin WAGENSCHN) montre comment on peut préparer les élèves à comprendre une synthèse magistrale.

C L'éducation de la rigueur

L'élève doit être mis très tôt en présence de situations élémentaires où les propriétés algébriques des sommes finies ne s'étendent pas à des sommes infinies.

Voici un merveilleux exercice dû à CARATHEODORY.
Observons le tableau numérique infini suivant :

0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	...	...
$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	...	...
$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	...	...
$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	...	...
...	...	...	...	...	...	...

On demande d'étudier la somme de tous ces nombres.

L'élève doit découvrir qu'en opérant d'abord par lignes (resp. par colonnes) puis en sommant les résultats, il trouvera $+2$ (resp. -2). D'autres groupements “diagonaux” fournissent une somme nulle.

Bref, on se trouve dans une situation où l'associativité est en défaut.

Cette étape (éventuellement avec d'autres exercices) est indispensable à la plupart des individus pour l'éducation de la rigueur : si l'élève constate que des résultats plausibles, mais non

démontrés, sont fréquemment faux, il admettra la nécessité de procéder à des démonstrations méticuleuses.

Par contre, le parachutage de la rigueur dont la nécessité n'est pas ressentie par les élèves est une faute pédagogique grave.

Heureusement, nous disposons de tout le matériel didactique nécessaire pour l'éviter (*). Un soin particulier sera apporté aux exemples où l'élève n'utilise qu'une partie d'un double-théorème dont l'énoncé comporte la locution "Une condition nécessaire et suffisante..." (ou "il faut et il suffit..." etc...).

Il faut apprendre à distinguer un énoncé de sa réciproque.

D Majorer et minorer

La compréhension de l'analyse exige une familiarité avec le mode d'emploi de la *valeur absolue* et de l'*inégalité du triangle*.

L'emploi de majorations et de minorations permet d'expliquer *rigoureusement* des phénomènes d'approximation *sans aucune phraséologie savante* :

Exemple 1 :

Remarquons que
$$\frac{2x+5}{x+1} = 2 + \frac{3}{x+1}$$

Or $(x > 3000) \Rightarrow \left(\frac{3}{x+1} < \frac{3}{x} < \frac{1}{1000} \right)$

Donc 2 est une valeur approchée à moins de $\frac{1}{1000}$ près de la fraction $\frac{2x+5}{x+1}$ dès que $x > 3000$.

Exemple 2 :

Le nombre e défini par la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ est irrationnel.

(Ce théorème est dû au mathématicien alsacien Lambert).

En effet, s'il était de la forme $\frac{p}{q}$ (avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^+$) alors on aurait :

$$q! \frac{p}{q} - q! \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} = q! \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Le premier membre serait un entier et le second membre inférieur à l'unité, comme le montre une majoration facile.

(*) Cf. Le livre du Problème — Fascicule 4 — La convexité

On peut alors dégager la méthode suivante :

En analyse, on découpe souvent les expressions E que l'on veut étudier en deux termes :

$$E = D + R$$

D est le "*développement*" qui se prête à un calcul aisé et R est le "*reste*" qui est "compliqué" mais "petit".

Le développement se *calcule*, mais le reste R (ou l'erreur) ne se calcule pas : *on le majore*.

A ce propos, on insistera sur la grande marge de manoeuvre dont on dispose pour majorer lorsque l'objectif est d'obtenir un résultat aussi simple que possible.

Mais parfois, il arrive que l'estimation a été trop grossière et que l'on ne peut plus conclure. Il faut alors "rectifier le tir" grâce à une estimation plus fine.

Ce genre d'aptitude ne s'acquiert qu'en décortiquant complètement des exemples types : c'est la vertu de "L'exemplarische Unterricht" de Martin WAGENSCHNIEDER déjà cité.

A titre d'exemple, on pourra chercher la limite de la suite de la somme des inverses des coefficients du binôme :

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} + 1 \quad , \quad S_3 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 1 \quad , \quad S_4 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + 1$$

Dans certaines majorations, il faut apprendre à conserver avec soin certains termes significatifs, quitte à opérer des estimations très grossières de toutes les autres parties de l'expression.

Exemple 3 :

Pour démontrer la continuité de la fonction dans [2,3]

$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$, on majore l'expression

$$\left| \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \right| = \frac{|\sqrt{a^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1}|}{\sqrt{(x^2 + 1)(a^2 + 1)}} = \frac{|a^2 - x^2|}{\sqrt{(x^2 + 1)(a^2 + 1)} (\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{a^2 + 1})}$$

en prenant soin de ne pas détruire "*la poule aux oeufs d'or*" $|a^2 - x^2|$ (ou $|a - x|$), pour aboutir à une estimation de la forme $K \times |a - x|$. Majorer $|a - x|$ par 6 serait correct, mais inutilisable.

E Le nécessaire et le suffisant

C'est généralement en Analyse que nos élèves sont confrontés avec un mode de raisonnement qui leur cause de grandes difficultés ; c'est le *raisonnement par raison suffisante*.

Je reproduis ici quelques lignes de mon livre "Mathématiques pour l'Elève-Professeur" 2ème édition.

"Il s'agit de jeter un pont de moyens termes entre l'hypothèse $\mathcal{H}$ et la conclusion C .

On peut, pour cela, *raisonner par conditions nécessaires*, c'est-à-dire rechercher systématiquement des conséquences de $\mathcal{H}$: $\mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{N}_1 \Rightarrow \mathcal{N}_2$, etc. On peut aussi analyser le problème à l'envers... $\mathcal{S}_2 \Rightarrow \mathcal{S}_1 \Rightarrow C$ et *raisonner par conditions suffisantes*.

Evidemment la meilleure méthode est de tenter ces investigations par les deux extrémités.

On a observé que nos élèves abordent moins spontanément la recherche des raisons suffisantes et y réussissent moins bien. Que l'on songe cependant au rôle de la technique de majoration en analyse mathématique et l'on comprendra qu'un effort pédagogique particulier s'impose pour développer l'aptitude à raisonner par conditions suffisantes.

Exercice 2.VII.5. Analyser une démonstration typique d'analyse comportant quelques majorations successives et un découpage judicieux des ϵ . Mettre en évidence la recherche des conditions suffisantes.

Exercice 2.VII.6.

Au jeu du piquet de cheval, chaque joueur ajoute alternativement un nombre entier strictement positif, inférieur ou égal à 10, au total obtenu. Le gagnant est celui qui dit 100. Pour pouvoir dire 100 (resp. 89 resp. 78) *il suffit* de dire 89 (resp. 78 resp. 67...) "

Par exemple, pour que $|U_n + V_n|$ soit inférieur à $\frac{1}{100}$ il suffit que chacun des $|U_n|$ et $|V_n|$ soit inférieur à $\frac{1}{7000}$.

Cette technique de découpage des ϵ , dans laquelle le mathématicien dispose d'une grande marge de manoeuvre, cause beaucoup de difficultés au débutant.

On pourrait préparer les jeunes élèves beaucoup plus tôt à ce genre de situation en leur faisant pratiquer des jeux où *il suffit* de

trouver de “bons coups” pour gagner sans que la stratégie gagnante soit forcément unique.

Citons encore l'exercice relatif à la limite de la suite $U_n = \frac{\cos n}{\sqrt{n}}$.

Pour que U_n soit inférieur à $\frac{1}{1000}$, il suffit que n soit supérieur à 1 000 000. Or, $\cos 1\,000\,000$ est difficile à calculer : il se peut que, par hasard, $\frac{\cos 1\,000\,000}{1\,000}$ soit beaucoup plus petit que ce qu'on a exigé.

Inutile de la calculer : il suffit de connaître le résultat grossier :

$$|\cos 1\,000\,000| < 1$$

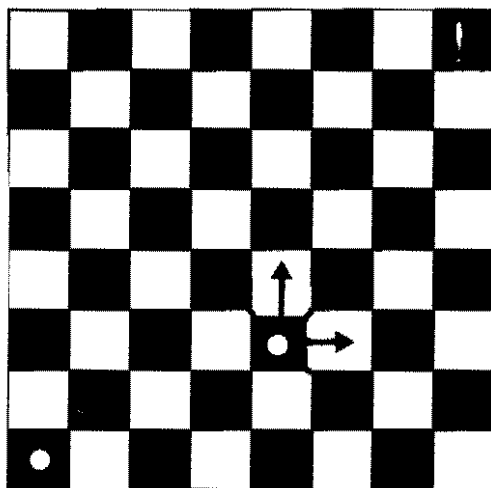
Autrement dit, il faut apprendre à l'élève à *perdre volontairement de l'information* : c'est une démarche fondamentale en mathématique qui ne s'acquiert pas toujours spontanément.

L'enchaînement au maniement des conditions suffisantes est une étape indispensable de l'éducation mathématique. La pratique du cours magistral masque complètement cette difficulté pédagogique. Pour que la leçon soit correcte, il suffit que le professeur ait compris et que les élèves répètent docilement.

A la demande des participants du stage, nous donnons encore deux exemples qui s'analysent aisément “à l'envers” (c'est-à-dire “par conditions suffisantes”).

Exemple 1 : (traduit du russe, d'après KBAHT n° 1 — 1971)

Un pion se trouve initialement sur la case en bas et à gauche d'un échiquier. Deux joueurs déplacent ce pion alternativement. Le gagnant est celui qui parvient à placer ce pion sur la case diagonalement opposée, en haut et à droite. Les seuls coups autorisés sont désignés par les flèches du dessin ci-dessous :



Comment doit jouer le premier joueur pour gagner contre toute défense ?

Exemple 2 :

“Trois personnes jouent ensemble. A la première partie, la première personne perd au profit des deux autres autant d’argent que chacune d’elles en possède. A la deuxième partie, la deuxième personne perd au profit des deux autres autant d’argent qu’elles en ont à présent. Enfin, à la troisième partie, la première et la deuxième personnes gagnent chacune sur la troisième autant d’argent qu’elles en avaient avant. La partie se termine alors et les joueurs découvrent qu’ils ont tous une somme égale, soit 24 louis chacun. On demande combien chacun avait d’argent en venant jouer” (Euler).

F La quantification

L’expérience révèle que l’on éprouve des difficultés à comprendre des situations en $\forall \epsilon \quad \exists \alpha$.

Un bon maniement des quantificateurs repose sur une familiarité avec les nuances linguistiques traduites par des locutions telles que “Pour tout...” “Quel que soit...” “Aucun...” “Nul...” “N’importe quel...” “Toujours...” “Jamais...” “Parfois...”

La symbolisation de ces nuances à l’aide des signes $\forall$ et $\exists$ apporte une aide efficace à condition que ces signes soient vraiment “opérationnels pour l’élève”.

Il s'agit donc de *s'en servir* souvent, efficacement et d'éviter d'en parler d'une façon pédante et inutile. Signalons que si les quantificateurs représentés par des signes apparaissent déjà chez le logicien Georges BOOLE en 1847 (avec d'autres signes typographiques), leur usage dans des articles de recherche en analyse ne se répand qu'à partir de 1960 comme on le constate en feuilletant des numéros du bulletin de la S.M.F.

G La situation ludique

La dialectique des $\forall \epsilon \exists \alpha$ s'apparente à une situation de jeu. "Mon adversaire exige une précision inférieure à $\frac{1}{100}$ près ; à moi de jouer ! Je dois donc trouver un α qui relève le défi.

Si mon adversaire avait "joué" $\frac{1}{1\,000\,000}$, et j'aurais dû trouver un α plus raffiné.

Ainsi, la notion de limite introduit la découverte d'une riposte appropriée, *contre toute défense de l'adversaire*.

La compréhension de la situation ludique est hautement favorisée par une pratique du calcul numérique approché. Elle peut se développer dès la Quatrième à propos des encadrements de nombres réels.

H Heuristique de la limite

La démonstration d'un théorème sur les limites se présente, dans la pratique, sous trois formes.

- Parfois, il est indiqué de *deviner* la valeur de la limite (ce qui s'obtient généralement par des manipulations numériques ou encore par l'observation intelligente d'une courbe représentative). Ce n'est qu'ensuite qu'il convient de prouver le résultat.
- Dans d'autres cas, on applique des formules algébriques connues, pour déduire des limites à partir de résultats précédents.

Par exemple : si l'on sait que les suites U_n et V_n tendent respectivement vers 2 et 3, on pourra *calculer* la limite de

$$W_n = \frac{\sqrt{U_n} - \sqrt{V_n}}{\sqrt{U_n} + \sqrt{V_n}}.$$

- Enfin, les élèves néophytes sont surpris lorsque l'on démontre l'existence d'une limite sans chercher à connaître au préalable la valeur de cette limite : c'est ainsi que l'on introduit des

nombres réels nouveaux, grâce à des intervalles emboîtés, des coupures ou des suites de Cauchy.

La compréhension de cette approche exige une éducation mathématique adaptée.

IV La formulation

Un élève qui aurait franchi la plupart des obstacles qui viennent d'être décrits n'éprouvera pas de difficulté à décrypter la formulation de Cauchy. Celle-ci n'est hermétique que pour ceux qui ne savent pas d'avance de quoi il s'agit !

Mais, au contraire, le "parachutage" prématuré de l'énoncé définitif sera un grave handicap qui gênera la compréhension de l'élève. En plus des difficultés énumérées au paragraphe précédent, il aura à vaincre des subtilités de langage.

Lorsque l'élève aura compris la définition (à la Cauchy) de la limite d'une suite, il sera confronté à un *problème trivial* lorsqu'il passera à la description des *fastidieuses variantes* : passage de la limite à la continuité, limite vers $+\infty$, limite lorsque x tend vers x_0 , par valeurs réelles, rationnelles, à gauche, à droite, par valeurs différentes de x_0 , etc.

L'emploi du *langage des filtres* apporte un *soulagement certain* au professeur, qui veut s'éviter de répéter cette liste fastidieuse et reprendre essentiellement les mêmes résultats dans des contextes légèrement différents. Mais *ce langage n'est d'aucun secours pour les élèves*. Aucun des obstacles que nous avons énumérés précédemment n'est levé par l'emploi des filtres : à de *véritables difficultés* s'ajoute l'apprentissage d'une terminologie inhabituelle.

V Faut-il utiliser des filtres ?

Avant d'en parler, on pourrait peut-être s'interroger sur les motifs qui ont amené Henri Cartan et Bourbaki à introduire les filtres en 1937.

Assurément, ce n'était pas pour permettre d'exposer l'Analyse en termes savants ! En fait, l'introduction des filtres résout des problèmes précis, qui interviennent dans la topologie des espaces qui ne sont pas métrisables. La situation la plus élémentaire, où l'on peut exhiber l'insuffisance du passage à la limite par des suites dénombrables, se présente à propos de la "convergence simple" des fonctions : elle est liée à la théorie des classes de Baire.

Il est donc impossible de présenter à des étudiants des premiers cycles de l'Université des exemples qui illustrent la supériorité des filtres sur les suites. A plus forte raison, la maîtrise du langage des filtres ne permettra à aucun lycéen de résoudre un problème qu'il ne pourrait résoudre plus simplement. Faut-il lui faire acquérir un outil dont il n'aura jamais l'occasion de se servir ? Ce serait *encourager un pédantisme* de mauvais aloi.

Seuls quelques analystes professionnels ont quelquefois l'occasion d'exploiter cet outil : en ce qui me concerne, cela m'est arrivé trois fois, en vingt cinq ans de recherche mathématique.

Bien entendu, chaque professeur est libre du choix de sa pédagogie.

Soyons donc tolérants vis-à-vis de toutes les innovations qu'un enseignant expérimente de bonne foi.

Mais je ne suis pas le seul à trouver saugrenu d'introduire — toute affaire cessante — les filtres dans l'enseignement secondaire, tout comme je trouve ridicule d'utiliser les *tribus* pour présenter les rudiments de calcul des probabilités sur des ensembles finis, ainsi que d'essayer d'enseigner le *langage des catégories* à l'école élémentaire. Ce n'est pas uniquement en raffinant le langage que l'on rénovera l'enseignement de l'Analyse : c'est une meilleure connaissance des mécanismes de compréhension des élèves qui permettra de franchir le pas décisif.

3

LES ANGLES

La notion d'angle

par Jacqueline LELONG-FERRAND

*"Hic mihi praeter omnes angulus
ridet" (Horace)*

*(Cet angle me plaît plus que tous les
autres).*

A l'origine le mot "angle" a un sens ensembliste : c'est celui que l'on trouve déjà dans le vers d'Horace cité ci-dessus, où il désigne ce que nous appellerions aujourd'hui "un petit coin tranquille". Mais, par la suite, l'angle a été considéré comme une "grandeur" analogue à la "longueur". En mathématiques, comme dans le langage courant, le mot "angle" désigne donc plusieurs réalités différentes, ce qui peut être assez déroutant ; et il pouvait sembler nécessaire d'y mettre un peu d'ordre. Mais la terminologie imposée par les programmes actuels n'est pas satisfaisante : elle s'écarte à la fois du langage courant et de celui que continuent à employer les utilisateurs et les mathématiciens ; elle introduit des pléonasmes artificiels tels que "l'écart angulaire d'un secteur angulaire" ; et elle est d'une lourdeur paralysante (pour désigner un angle orienté de $\frac{2\pi}{3}$, il faut dire : l'angle dont un représentant de la mesure est $\frac{2\pi}{3}$). Enfin, les programmes actuels font de l'angle une sorte de tabou dont on évite de prononcer le nom, et qu'on se refuse à utiliser : l'étude des "angles orientés" s'arrête d'ailleurs au moment où elle aboutirait à la seule notion importante : celle de "mesure". En classe de troisième, les triangles n'ont plus d'angles, et il faut s'exercer à parler d'un triangle (ABC) rectangle en A, en se gardant de dire qu'il a un angle droit : cela tient plus du dressage ou de l'acrobatie verbale que d'une saine pédagogie.

Exposer la notion d'angle à des élèves n'est pas un problème de pure axiomatique ; c'est une véritable oeuvre pédagogique, qui doit partir des notions intuitives acquises par l'enfant, pour aboutir au problème mathématique de la mesure, et de la définition des fonctions trigonométriques. Quelle que soit la tentation de faire une belle théorie, il faut être persuadé que la notion d'angle est une notion utile, qui doit rester simple, et que le problème de sa définition n'est pas en but en soi : de toute façon, on ne peut d'ailleurs faire une théorie rigoureuse tant qu'on n'a pas défini l'exponentielle complexe, ce qui est du niveau universitaire.

Après avoir analysé la situation actuelle, je ferai quelques suggestions en vue d'une simplification.

Analyse de la notion d'angle dans les programmes actuels.

Sixième : Le programme comporte : cercle, longueur, arcs de cercle et secteurs angulaires ; il n'est pas question de "mesure" de ces secteurs. Les commentaires, qui insistent longuement sur le repérage des points d'une ville, sont muets sur la question de la mesure des angles ; les mots "rapporteurs" et "mesure des angles" figurent cependant dans le § intitulé "travaux pratiques" (p. 47). Cela me paraît déroutant pour le professeur : si la mesure des angles n'est pas bannie des programmes, il faut le dire explicitement, et préciser quelles unités on utilise (degrés, grades, radians ?). En tous cas, on en a besoin pour définir la longitude et la latitude, comme il est demandé dans ce même programme.

Cinquième : Le programme de géométrie ne parle absolument pas d'angle ni de secteur angulaire. Pourtant l'étude de quelques polyèdres qui est suggérée s'accompagnerait fort bien d'une mesure de leurs angles. Comment d'ailleurs distinguer un pavé oblique d'un pavé droit si l'on ne sait ce qu'est un "angle droit" ?

Quatrième : Le programme traitant uniquement de géométrie affine ignore évidemment la notion d'angle.

Troisième : On définit "l'angle géométrique" comme classe d'équivalence de couples isométriques de demi-droites de même origine ; ensuite on définit le "repérage" d'un point sur un demi-cercle, et on utilise cette "mesure" pour définir l'écart angulaire de deux directions orientées. Enfin on définit les lignes trigonométriques d'un "écart angulaire".

Les Commentaires (p. 87) précisent que l'on commence par définir les "angles géométriques", puis "l'écart angulaire d'un

angle géométrique” pour aboutir, si l’on veut, à “l’écart angulaire de deux directions” ; ils font remarquer à juste titre que cet écart a les propriétés d’une distance ; puis ils reconnaissent que ce vocabulaire s’écarte assez sensiblement du vocabulaire utilisé jusqu’ici ; et le commentateur prétend, à tort, que les mathématiciens réservent le mot “angle” pour désigner les “angles orientés”.

En présence de ces programmes on peut se demander si cette notion bien lourde d’angle géométrique est nécessaire : point n’est besoin de classes d’équivalence pour voir que deux couples isométriques de demi-droites ont le même “écart”. D’autre part, il nous paraît choquant d’employer le mot d’écart pour désigner la mesure d’une grandeur, et l’expression “écart angulaire d’un angle géométrique” est un non-sens, qui est aussi peu naturel que peu scientifique. Si l’on appliquait le même purisme aux longueurs et distances, l’analogue de cette expression serait “distance métrique d’un segment géométrique”, dont l’absurdité n’est pas à démontrer.

Classe de Seconde : Bien qu’on dispose déjà des lignes trigonométriques le programme insiste encore sur le “rapport de projection orthogonale”, notion essentiellement provisoire et même inutile. Rien de nouveau en ce qui concerne les angles. Visiblement c’est un outil dont on se méfie : le rapport de projection orthogonale de deux vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$, est noté $\cos(\vec{i}, \vec{j})$, sans que l’on explique ce que signifie le symbole $(\vec{i}, \vec{j})$.

Classe de Première. L’angle de deux demi-droites D, D' est l’unique rotation vectorielle amenant D sur D' . On définit le “grand cosinus” et le “grand sinus”, puis on admet l’existence de l’application canonique de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{U}$ et on introduit enfin le “petit cosinus” et le “petit sinus”.

Terminale. On revient sur la notion “d’angle rotation”, et on définit l’angle de deux droites. Il n’est pas question de “mesure” des angles de demi-droites et de droites. Le professeur en parle s’il veut.

Réflexions sur les programmes de Première et Terminale

Mathématiquement, il n’y a pas d’inconvénient à identifier le groupe additif des angles orientés avec le groupe des rotations $SO(2)$ (ou le groupe multiplicatif $\mathbf{U}$), puisque ces groupes sont isomorphes. Mais la démarche pédagogique consiste plutôt à les définir séparément, et à constater ensuite leur isomorphisme.

Est-il bien nécessaire d'introduire ce grand cosinus et ce grand sinus qui font sourire tous les mathématiciens, et qui sont des préciosités propres à l'enseignement secondaire français ? Les lignes trigonométriques des "angles" compris entre 0 et π ont été déjà définies en troisième. Pourquoi y revenir en changeant de notations ?

Ce qui est sûr, c'est qu'on oublie l'essentiel : la mesure des angles orientés, qui est laissée à l'initiative du professeur, mais qu'il ne peut traiter sans une lourdeur de langage paralysante, puisqu'on l'oblige à parler des "représentants de la mesure de l'angle". N'est-ce pas tourner en rond que de définir l'angle d'une rotation comme étant encore une rotation, et à quoi sert une telle trivialité ? C'est imposer aux professeurs un pédantisme stérile, dont il faut les libérer en introduisant les abus de langage nécessaires.

Malheureusement, les Commentaires officiels des programmes ont créé une telle psychose de purisme, qu'il est bien difficile à l'enseignement du second degré de revenir aux notions usuelles : on peut s'en rendre compte en lisant la rubrique "angles" récemment mise au point dans le Dictionnaire de l'A.P.M. : pour être en accord avec les programmes, cette rubrique distingue les "angles de paires", les "angles de couples", "l'angle de couple d'une rotation plane" et les "invariants métriques d'une rotation plane" ; elle introduit encore de nouvelles notations telles que $\text{Co}\tilde{\text{s}}$ et $\text{Si}\tilde{\text{n}}$, et ne nous semble guère éclairer les problèmes pédagogiques. De même, certains candidats à l'agrégation ne savent plus parler d'angle sans introduire une bonne demi-douzaine d'isomorphismes.

En fait, il me semble que le problème des angles a été artificiellement compliqué par le refus de reconnaître les diverses acceptions réelles de ce mot, et par une algébrisation outrancière qui a prétendu réserver le nom de "mesure" à un isomorphisme de groupes. Pourtant la mesure des angles, au sens le plus élémentaire, n'est qu'un cas particulier de la mesure de Haar sur un groupe localement compact.

Je vais donc essayer de donner un plan progressif et constructif de l'étude des angles, conforme à l'usage qu'en font aussi bien les mathématiciens que les navigateurs, les astronomes, les dessinateurs et tous les ingénieurs.

Pour cela, je distinguerai trois notions, correspondant à trois étapes de la vie scolaire, et qui se complètent sans se détruire : ce sont les notions de secteur angulaire, d'écart angulaire de deux demi-droites, et d'angle orienté.

Première étape (enseignement du premier degré, sixième, cinquième)

La notion la plus concrète semble bien être celle de *secteur angulaire* conçu comme partie du plan limitée par deux demi-droites de même origine : elle correspond au sens étymologique du mot "angle", rappelé ci-dessus. Pour les élèves de sixième, c'est un excellent exemple d'ensemble, permettant d'illustrer les opérations d'intersection et de réunion ; ils peuvent apprendre à mesurer les secteurs au moyen d'un rapporteur, et constater la proportionnalité de l'angle avec la mesure de l'arc de cercle intercepté ; enfin, ils doivent se familiariser avec les changements d'unité, en liaison avec les applications. La "mesure" ainsi introduite est d'ailleurs bien une mesure, au sens mathématique du terme : c'est la mesure de Haar sur le groupe $SO(2)$, et il n'y a pas lieu d'introduire le terme barbare de "mesurage" pour la désigner.

En cinquième les élèves peuvent s'exercer à mesurer les faces d'un trièdre ou d'un polyèdre, et constater certaines égalités, ou inégalités. En quatrième, ils pourraient utilement comparer les secteurs angulaires limités par des demi-droites parallèles : ce serait l'occasion d'introduire une notion métrique, et de s'évader de la monotone structure affine.

Deuxième étape (troisième, seconde) Lorsqu'on aborde sans dogmatisme la géométrie métrique, c'est la notion d'*écart angulaire de deux demi-droites* de même origine qui s'introduit naturellement : cet écart est la mesure du secteur saillant ou plat limité par ces demi-droites, et il vérifie l'inégalité triangulaire : dans le plan, la démonstration en est immédiate ; dans l'espace, cette inégalité traduit les "inégalités entre les faces d'un trièdre" que l'on étudiait autrefois sans bien en comprendre l'intérêt. C'est donc bien un "écart" au sens mathématique du terme ; et, sur l'ensemble des demi-droites d'origine donnée, c'est une distance : nous avons ainsi un exemple naturel d'espace métrique borné.

Les angles d'un triangle peuvent alors être définis comme écarts angulaires de ses côtés, pris deux à deux.

Chose curieuse, c'est cette notion élémentaire d'angle qui a été bannie des programmes, alors que c'est peut-être la plus utilisée : elle est en effet valable dans l'espace, alors que la notion d'angle orienté est propre au plan. En fait, c'est une notion de géométrie hilbertienne ; et l'on définit couramment l'angle de deux vecteurs unitaires a, b d'un espace préhilbertien comme étant l'unique réel θ vérifiant $0 \leq \theta \leq \pi$ et $\cos \theta = a \cdot b$, ce réel

pouvant être noté $\widehat{a, b}$. Bien entendu, cette définition suppose une connaissance préalable des fonctions trigonométriques, mais il est à la portée d'un élève de troisième de concevoir l'angle de deux demi-droites comme l'analogue de la distance de deux points, et de le mesurer en radians ; les lignes trigonométriques sont alors définies comme fonctions d'une variable numérique, sur l'intervalle $[0, \pi]$: cela évite les notions provisoires de "grand sinus" et de "grand cosinus" et introduit d'emblée les fonctions utiles.

Troisième étape (classe de Première et Terminale)

La dernière étape est celle d'*angle orienté* (de demi-droites, puis de droites). On peut définir l'angle orienté comme classe d'équivalence de couples de demi-droites, et démontrer ensuite l'existence d'un isomorphisme avec le groupe des rotations vectorielles. Mais l'essentiel est d'admettre les propriétés de l'exponentielle $x \mapsto e^{ix}$, pour aboutir à la mesure des angles et des rotations dans un plan orienté, et de prolonger à $\mathbb{R}$ les fonctions sinus et cosinus. Tout en conservant le principe que la mesure d'un angle orienté est une classe modulo 2π , on peut convenir que chaque élément de cette classe est "une mesure" de cet angle ; et il est nécessaire que les élèves puissent comprendre et utiliser l'expression courante "angle θ " ou "rotation d'angle θ ", où θ désigne un réel (1). En vue de la Physique et de la Mécanique, il faut également introduire la notion de "rotation d'angle θ (réel) autour d'un axe" en faisant une convention d'orientation des plans orthogonaux à cet axe (pour voir les difficultés introduites en Mécanique par l'abandon de cette convention, voir le livre de Mécanique de M. Brousse).

De façon générale, il faut admettre, en les expliquant, tous les abus de langage nécessaires : ces abus sont utilisés sans inconvénient depuis bien des années ; ils consistent essentiellement à identifier la notion d'angle non orienté avec un réel compris entre 0 et π , et celle d'angle orienté avec une classe de réels (modulo π ou 2π selon qu'il s'agit d'angles de droites ou de demi-droites).

Pour terminer, j'insisterai sur l'analogie entre les angles et les longueurs. Cette analogie devrait nous servir de garde-fou, et nous éviter de nous créer des complexes à propos des angles, alors que la

(1) Notons que le sujet de baccalauréat de TE donné à Paris en 1975 comportait l'expression "rotation d'angle θ ", où θ désignait un réel. J'ignore s'il y a eu des protestations, mais il faut féliciter les auteurs de ce sujet de ne pas s'être laissés influencer par les Commentaires des programmes.

notion de longueur nous paraît toute naturelle, et que nous identifions sans peine les longueurs avec leurs mesures.

Segment	Secteur angulaire
Longueur du segment	Mesure (ou ouverture) du secteur
Distance de deux points	Ecart angulaire de deux demi-droites
Mesure algébrique AB	Mesure de l'angle orienté (u, v)

Tour d'horizon

par J.M. CHEVALLIER

Au cours des récents mois un certain nombre de textes concernant les angles et les questions connexes viennent de paraître. D'une part, outre la notice déjà ancienne SECTEUR (n° 279), la Commission du Dictionnaire a publié dans les numéros 299, 300, 301 les notices ANGLE, DIEDRE, PHASE, la dernière accompagnée d'un texte d'introduction de Chastenet de Géry et d'une importante annexe due à Tissier et Zirah. D'autre part, deux collègues font connaître leur sentiment soit au sujet de textes d'examens portant sur les angles, soit au sujet des notices elles-mêmes : à savoir Mme Lelong-Ferrand dans le présent numéro et Siros dans le n° 301 page 793. Enfin le "*Savoir minimum en fin de Troisième*" comporte naturellement des fiches relatives aux angles ou à la trigonométrie du premier cycle.

Personne ne s'étonnera qu'en cette occasion je saisisse moi aussi mon goniomètre pour faire un tour d'horizon sur la question. D'ailleurs, Arnould avait annoncé la chose dans le n° 301, sans dissimuler que, sur certains points au moins, mes vues ne coïncidaient pas avec celles de la Commission du Dictionnaire — ce qui ne m'empêchera pas, on le conçoit, de défendre celles-ci sur beaucoup d'autres points.

* * *

Mettons d'abord à part la question soulevée par le début de l'article de Siros. L'élève actuel du premier cycle a entendu parler de bissectrice, il a pu reconnaître dans quelques situations que les bissectrices de deux saillants adjacents supplémentaires sont perpendiculaires, il n'a vraisemblablement pas fait d'assez nombreux exercices de ce genre pour en avoir tiré un procédé familier de démonstration. Pythagore est donc le seul recours dont il dispose

“normalement” pour établir une orthogonalité. Que ce recours apparaisse comme passablement lourd à ceux qui ont été entraînés dans leur jeunesse à “voir” les choses autrement, comment le nier ? Mais on ne peut faire grief à un problème d'examen de se conformer aux possibilités des candidats, qui elles-mêmes découlent des programmes.

Cela posé, vu qu'on ne peut pas tout enseigner, les programmes ont-ils tort ou raison de sacrifier, à ce niveau, la géométrie “visuelle” à une autre géométrie plus algébrique ? Je pense que c'est là le sens de la question de Siros, et elle est tout-à-fait légitime. Mais on aperçoit tout de suite où cette question de fond m'entraînerait si j'entreprenais de la traiter ici.

* * *

Mon propos concerne essentiellement les problèmes de langue : les liens entre les objets, les mots, et éventuellement les notations. On m'excusera de rappeler cette banalité : *tout fait de langue est un fait sociologique avant d'être un fait philologique ou logique*. Vouloir accélérer ou arrêter, même pour des motifs louables et apparemment justifiés, l'évolution d'une langue est toujours hasardeux. J'en ai fait l'expérience avec *trope* : le mot était court, nullement rébarbatif, d'étymologie correcte, et réduisait à néant les risques de confusion (car, pour prendre une figure de rhétorique pour un angle, ou vice versa, il faut vraiment le faire exprès). Ce néologisme n'avait qu'un seul vice, mais rédhibitoire : il n'a jamais été adopté par les usagers. Que faire, sinon prendre acte du rejet de ce greffon ?

Certains ont cherché à réserver le mot *angle* pour son seul emploi “noble” : le groupe des angles du plan euclidien. Dès lors il n'était plus question de le galvauder pour des usages subalternes. A la suite de ce parti-pris le mot a été totalement escamoté de certains manuels du premier cycle, et les *Commentaires* eux-mêmes ont entériné ce tabou, ainsi que le rappelle Mme Lelong-Ferrand, non sans le déplorer. J'avais de mon côté signalé à plusieurs reprises que la mise en quarantaine d'un mot qui appartient au langage le plus courant était une manière de gageure, sans doute vouée à l'échec ; et dénoncé, dans les numéros 285 et 287, le pataquès que cette attitude forçait nos modernes “Jargonautes” à introduire dans l'enseignement élémentaire.

C'est donc sans aucune réserve que je me réjouis de voir notre collègue participer à la réhabilitation de cet angle élémentaire.

Mais tout aussitôt je crains que notre accord n'aille pas beaucoup plus loin. Que l'on m'entende bien : je ne la critique pas de vouloir maintenir certaines habitudes de langage (et de pensée), je l'y aiderais même volontiers dans la mesure de mes moyens ; ce qui me gêne plutôt, c'est qu'elle, elle ne nous aide guère à le faire.

Si l'on veut dépouiller l'angle du vieux sens d'ensemble ponctuel qu'il traîne derrière lui depuis... Horace, la première condition est de disposer d'une bonne dénomination pour ces ensembles ponctuels. Or, cette dénomination, nous l'avons ; ou plutôt nous l'aurions si les programmes n'avaient inventé — ô cohérence ! — au moment même où ils instauraient le tabou de l'angle, l'expression "secteur angulaire". Nous nous étions bien gardés de la mentionner dans la notice SECTEUR, car c'est là le genre d'expression bâtarde que l'on répète machinalement, quitte à s'étonner ensuite que les élèves "disent n'importe quoi" ! D'une part il existe des parties du plan, euclidien ou non, qui sont des *secteurs* (des saillants, des rentrants, des secteurs plats si l'on a besoin de préciser) ; d'autre part, dans le plan euclidien, on définit usuellement des *mesures* (angulaires, si l'on y tient) de ces secteurs. Cela suffit pour s'exprimer clairement, sans mélanger les registres, et permet de rendre à l'angle — l'angle de tout le monde, celui du triangle équilatéral comme celui du prisme — la place qu'il n'aurait jamais dû perdre. Quant à l'affubler du sobriquet de "géométrique", cela présente autant d'intérêt et autant de sens que de parler de "montagnes géographiques".

Cela dit, il n'est pas question de tomber dans le travers symétrique, qui serait au moins aussi grave : refuser de voir plus loin que le sens élémentaire (le plus courant dans la pratique non mathématique), et frapper d'interdit le sens qui pour nous est le plus "constructif", à savoir celui qui apparaît dans le groupe des... des quoi, au fait ? Ici encore il faut bien un nom (et Dieu sait si je l'ai quemandé). Or on constate avec regret que Mme Lelong-Ferrand semble n'avoir à suggérer que des "angles orientés", sans doute l'expression la moins défendable du vocabulaire traditionnel. Nous avons pris nos responsabilités dans la notice ANGLE et formulé une mise en garde très précise contre cette expression bâtarde — encore une — qui a fait jadis tant de ravages dans les esprits (dans le mien, en tout cas, et je n'en suis pas plus fier). Si nous nous sommes trompés, il aurait été intéressant de lire une réfutation de notre critique, une justification de cette prétendue orientation, qui donnât à celle-ci quelque consistance. Faute

d'avoir rien lu de tel, on ne peut que répéter aux collègues : Cet "angle orienté" est un fantôme, et de l'espèce la plus maléfique ; gardez-vous-en, et gardez-en vos élèves !

On sait à quelle solution nous nous sommes arrêtés : appeler respectivement "angle-de-paire" et "angle-de-couple" l'angle élémentaire et l'angle du groupe ; en outre, distinguer ce dernier de la rotation elle-même, ce qui est au moins une commodité en géométrie vectorielle, une nécessité en géométrie affine... et semble répondre au vœu de Mme Lelong-Ferrand. Pourquoi dit-elle alors que nous avons fait cela "pour être en accord avec les programmes" ? Je ne vois rien qui justifie pareille assertion, ni dans la lettre des programmes, ni dans notre esprit que n'a jamais étouffé l'inconditionnalité. L'explication est beaucoup plus simple : nous nous sommes efforcés *d'appeler par leur nom exact, et de noter de la façon la plus naturelle, des choses entre lesquelles aucune confusion n'est plus tolérable ; et cela sans faire subir aucune violence au vocabulaire existant, sans choquer personne à aucun niveau, et en laissant la porte ouverte aux abréviations du langage courant.*

Par exemple, si l'on est dans le plan affine et qu'une rotation envoie deux points A et B respectivement sur A' et B' , on peut continuer à dire, sans obscurité ni abus de langage, que l'angle du couple $(\overline{AB}, \overline{A'B'})$ est égal à l'angle de la rotation ; et dans l'espace, si $SABC$ est une pyramide régulière de sommet S , il est également correct de dire que l'angle de la paire $\{\overline{SA}, \overline{SB}\}$ est celui de la paire $\{\overline{SA}, \overline{SC}\}$. Honnêtement, je ne vois pas comment on pouvait mieux respecter les usages ni imaginer une solution plus simple et plus modérée.

* * *

Abordons à présent la mesure des angles.

Le triptyque "objet, classe d'objets, mesure" se rencontre partout où intervient la "grandeur physique". Cette notion donne naissance à des attitudes variées, qu'on peut schématiser de la manière suivante :

A — La classe d'équivalence est une réalité (la "grandeur") à laquelle bien entendu la mathématisation cherchera à donner un aspect quantitatif par le biais de la mesure.

B — En fait la mesure est sinon le seul moyen, du moins le seul qui soit scientifiquement exploitable, de construire des classes d'objets.

C — Dès lors la “grandeur” en tant que classe s'évanouit ou du moins se confond avec la valeur de la mesure, et l'on peut en faire l'économie.

Entre A et B il n'y a pas franche opposition, la différence réside plutôt dans les “états d'âme”. Au contraire l'attitude C me paraît difficile à défendre intégralement, j'ai déjà dit pourquoi (n° 298) : s'il n'existe pas, sous-jacente à la mesure, quelque invariance physique (donc quelque équivalence mathématique) relativement aux changements d'unités ou, plus généralement, de procédés de mesurage, quelle signification et quel intérêt peut bien présenter la valeur de la mesure ? Si l'on va au fond des choses, on trouve à la base de chaque “grandeur” deux relations d'équivalence, qui s'expriment par le redoublement du mot *même* dans la formule habituelle “avoir même mesure dans les mêmes conditions”.

Ayant rappelé cela, et aussi les glissements de sens constants et quasi-inévitables entre les trois volets du triptyque (mesure d'un segment, longueur d'un segment, mesure d'une longueur...), on ne voit pas pourquoi les angles feraient exception. Et, puisqu'il existe indubitablement une mesure des secteurs saillants, le plus tolérable des glissements de langage ne consiste-t-il pas à la transférer aux angles-de-paire (comme aux arcs de cercle, aux secteurs de disque, aux dièdres, aux fuseaux sphériques...) ?

Nenni, rétorquent les puristes, car ce ne serait pas une “vraie” mesure. L'argument ne tient guère, et Mme Lelong-Ferrand en fait justice. Mais cela les touche peu, car à leurs yeux il n'y a pas d'angles à mesurer ! Et d'introduire l'*écart angulaire* (pour la cohérence, voir ci-dessus “secteur angulaire”). La notion est inattaquable tant qu'elle s'applique à des demi-droites... et à peu près inutilisable sous cette forme trop restreinte : si bien que les *Commentaires*, et les manuels à leur suite, s'empressent d'élaborer “l'écart angulaire d'un angle géométrique”, ce qui est à la fois une quintessence de charabia et l'aveu ingénu que les faits sont obstinés.

Mais le purisme ne s'en tient pas là. Seul le Nombre est grand, et innombrables sont ses prophètes. Puisque les valeurs de l'écart angulaire sont des nombres, à nous les notations : $E_D(\widehat{BAC}) = 90$, $E_{180}(\widehat{ABC}) = 45$, $E_G(\widehat{BCA}) = 50$, etc. ! Et, une fois que c'est parti, comment s'opposer à l'irruption des $\cos_{180} 60$, $\sin_G 50$... ?

Cette avalanche d'indices nous ramène à la partie finale de l'article de Siros. Sur le plan formel Siros a tort (ou du moins il fait semblant) : car, si l'on joue le jeu, l'écart angulaire α étant un *réel*, c'est bien une fonction de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ qui donnera la tangente cherchée, fonction que le texte du BEPC note tg_{180} ; et ce serait une *autre* fonction (tg_{200}) qui la donnerait si l'unité choisie était le grade. Mais bien entendu, sur le fond sa protestation me paraît on ne peut plus justifiée.

Et c'est là, je l'avoue, que je comprends de moins en moins Mme Lelong-Ferrand. Quand elle "se demande si cette notion bien lourde d'angle géométrique est nécessaire", répondons-lui que — le mot "géométrique" mis à part — cette notion sert justement à nous libérer de la tyrannie des indices, à nous permettre d'écrire, sans nous sentir "culpabilisés", des choses que nous avons tous écrites, comme $\widehat{BAC} = 90^\circ = 100 \text{ gr}$, ou comme $\cos 60^\circ$, ou comme $tg \widehat{ABC}$, etc. Il se peut que je scandalise certains ; mais, scandale pour scandale, je préfère celui-là à $tg_{180}(E_{180}(\widehat{ABC}))$ qui, officiellement, serait la seule écriture correcte ! Ce n'est vraiment pas la peine d'habituer nos élèves, de très bonne heure, à appliquer un ensemble source dans un ensemble but, *numériques ou non*, si cela doit ne servir à rien, sinon à une vaine virtuosité (?). Nous avons là l'occasion rêvée de définir des fonctions sinus, cosinus, tangente, qui appliquent dans $\mathbf{R}$ un ensemble *non numérique*, celui des angles.

Refuser les angles en tant que "grandeur", ou (ce qui revient au même) les confondre avec des réels, c'est justifier par avance les notations sophistiquées qui hérissent nos manuels. Seule l'attitude contraire permettra la démystification réclamée par Siros. J'ai plaisir à signaler que le "*Savoir minimum en fin de Troisième*", quoique bien indulgent encore pour l'état de choses présent (programme oblige, hélas), amorce une évolution que pour ma part je considère comme un retour au bon sens.

* * *

La "mesure" des angles-de-couple ne se ramène pas au schéma précédent, du fait qu'il n'y a pas isomorphisme, mais seulement homomorphisme de $(\mathbf{R}, +)$ vers le groupe $(\mathcal{A}, +)$ des angles-de-couple. Cela nous prémunit, ou devrait nous prémunir, contre les identifications hâtives, mais ne laisse pas d'engendrer d'autres difficultés.

Pour se tirer de là, on a coutume de considérer des “angles généralisés” (ou “cinématiques”) qui ont le bon goût de s'additionner *comme* des réels. Mais de nouveau la question se trouve posée : sont-ils des réels ou des “grandeurs” ? Le plus souvent, on s'abstenait de répondre nettement ; et les physiciens, que nos scrupules agacent, préféreraient réserver leur curiosité à des choses plus fondamentales. On en connaît pour qui le radian est une sorte de synonyme de 1 (ce qui ne les empêche pas, éventuellement, de faire de bonne physique).

Une telle discrétion, si généralement observée, trahissait au fond un malaise. Nul ne conteste l'importance théorique, voire pratique, du radian, lié à l'exponentielle complexe ; et celle-ci, bien qu'elle ne soit pas la *seule* voie rigoureuse qui mène aux homomorphismes continus de $\mathbf{R}$ sur $\mathcal{A}$ (*), est assurément la voie royale. Cependant il ne serait pas raisonnable non plus de concéder au radian un quasi-monopole, comme si toute autre “unité” était inexistante ou inavouable. Que dire en particulier du tour, usuel dans les applications techniques, sinon qu'il s'impose à tout esprit non drogué par l'usage immodéré des mathématiques comme étant l'unité la plus naturelle ? Le simple fait qu'il *n'y a pas de tour en géométrie et qu'il y en a un en mécanique* est assez éloquent.

Sur tout cela la Commission du Dictionnaire était tombée facilement d'accord, et elle en tirait la même conclusion que plus haut : il convenait de donner le caractère intrinsèque d'une “grandeur” à cette notion, aussi bien en raison de sa signification concrète que pour la commodité de l'écriture mathématique. La dénomination de *phase* qui a été adoptée montre que l'interprétation physique n'est pas loin ; quant à la construction mathématique, c'était celle d'une droite vectorielle des phases, isomorphe à $\mathbf{R}$ certes, mais qu'on peut distinguer de $\mathbf{R}$ si le besoin s'en fait sentir.

Chastenet de Géry a exposé dans le précédent *Bulletin* l'idée qui a inspiré la notice PHASE : définir les phases comme étant les homomorphismes eux-mêmes qui appliquent (continûment) $\mathbf{R}$ sur $\mathcal{A}$. Séduisante, l'idée l'est assurément ; à tel point que la majorité de la Commission a été conquise. Pourquoi donc n'ai-je pas succombé au charme tournoyant de ces phases ?

(*) Voir l'article de Tissier et Zirah, fondé sur le procédé relativement élémentaire du “rapporteur binaire”

La rigueur de la construction n'est pas en cause ; et, vu que rien ne ressemble à une droite R -vectorielle comme une droite vectorielle sur R , je ne perdrai pas mon temps à chercher laquelle est la bonne. Mes réserves portent sur deux points :

1° Le caractère intrinsèque de la construction ne m'apparaît nullement. D'après elle, dire que l'homomorphisme h est une phase de l'angle α signifie que $h(1) = \alpha$. J'avais suggéré, par manière de boutade, que l'on remplace 1 par 365,2422 : cela ne changerait pas un iota au reste de la notice et mettrait en évidence le rôle éminent joué dans l'affaire par l'année tropique... Sérieusement, je ne vois pas que 1 y joue un rôle plus net. Je répète que la traduction d'une invariance "physique" est toujours de quelque manière une équivalence mathématique, et je ne la vois nulle part. Certes on peut toujours remplacer une classe d'équivalence par un de ses représentants ; encore faut-il avoir construit la classe et dire quelle convention on fait. C'est pourquoi je suis insensible à l'argument de "simplicité" qui m'a été opposé : on ne simplifie pas un problème en le traitant par prétérition ; et, entre la convention ainsi introduite et celle qui consistait à confondre radian et unité, y a-t-il finalement de quoi motiver une préférence ?

2° Déranger des habitudes est acceptable, souhaitable même, quand un plus grand bien doit en résulter, à brève ou longue échéance ; dans le cas présent je crains surtout qu'on inquiète, sans contrepartie avantageuse. Alors que cette notion de phase devrait rester accessible au plus grand nombre possible, était-il bien indiqué d'introduire dès le début une multiplication externe (trop) astucieuse, qui risque de jeter le trouble dans les âmes innocentes et dont les conséquences sembleront au moins étranges ? Certes, on ne peut pas empêcher un angle d'avoir une infinité de "déterminations", qui se confondent avec les mesures de ses phases ; mais s'imposait-il vraiment que l'angle possède pour *chacune* de ses phases un tel système de déterminations, de surcroît *inversement proportionnel* à la phase considérée ? — le record toutes catégories appartenant à la phase nulle, grâce à laquelle n'importe quel réel apparaît comme un antécédent (ici, on n'a pas osé dire une "détermination") de l'angle nul ! Tout cela est si "naturel" qu'une erreur nous a échappé à tous (moi compris, lors de la correction des épreuves d'imprimerie) :

ERRATUM — Fiche PHASE 1/6 verso, § 1.2, ligne 7 :

Lire (à deux reprises) $\frac{m}{n}$ au lieu de $\frac{n}{m}$.

De toute évidence il s'agit d'un simple lapsus, mais bien révélateur : disons qu'on a glissé du côté qu'on avait savonné....

Je suis sans doute un entêté (c'est de naissance), mais je maintiens qu'il valait beaucoup mieux prendre le problème dans l'autre sens : *calquer les phases sur des "mesures"* (et non sur des "unités" comme on l'a fait) — en d'autres termes considérer, plutôt que les homomorphismes h (continus, et non nuls) de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{A}$, les images-réciproques $\tilde{h}$. Ce qui, de toute façon, est à la base de nos constructions, c'est que, suivant le choix de h , l'image-réciproque est déterminée à une homothétie non nulle de $\mathbb{R}$ près (exactement comme si les $\tilde{h}$ étaient des mesures en mètres ou en centimètres, en grammes ou en tonnes, en ampères ou en milliampères,...). Dès lors, x , x' désignant des réels, et h , h' des homomorphismes, la condition $x' \tilde{h} = x \tilde{h}'$ définit sur l'ensemble des couples (x, h) une relation d'équivalence, et pour tous les couples (x, h) d'une même classe, $h(x)$ est le même angle α : par définition cette classe est *une phase* de l'angle α , en particulier, si $m\mathbb{Z}$ est le noyau de h , les classes de (m, h) et de $(-m, h)$ sont les *tours*.

Les lois de composition sont à peu près immédiates :

$$\text{Cl}(x, h) + \text{Cl}(y, h) = \text{Cl}(x+y, h)$$

$$\lambda \text{Cl}(x, h) = \text{Cl}(\lambda x, h)$$

et la droite vectorielle des phases est construite.

A partir de là les choses "vont toutes seules", et l'on arrive très vite aux objectifs qu'on s'était fixés. Cela n'est pas une remarque en l'air ; car, de toutes les notices publiées depuis 1967, la notice PHASE est la seule à comporter 6 fiches ; or on pouvait dire autant, sinon plus, avec une fiche de moins *. J'aurais aimé, en particulier, qu'on revienne sur les notations Cos , $\text{Co}\tilde{\text{s}}$, COS , cos , etc... pour signaler ceci. Nous les avons introduites par souci de rigueur, pour éviter de noter de même façon des applications différentes : nous ne croyons pas que distinguer une fonction cos qui est périodique d'une fonction Cos qui ne l'est pas soit une "préciosité". Cela dit, il est de fait qu'à des restrictions et des isomorphismes près ces diverses fonctions se ramènent les unes aux autres, et que dans la pratique les fonctions usuelles ont encore un

* NDLR — L'auteur parle ici, bien entendu, de cinq fiches calibrées au gabarit habituel ; à la mise en pages s'est produite, sur la hauteur des fiches, une erreur par excès de 8 mm dont la Rédaction du *Bulletin* tient à s'excuser auprès des lecteurs.

bel avenir, même si leur usage entraîne parfois des abus de langage dont chacun sait qu'ils sont commodes. Nous avons pris soin d'ailleurs (notice ANGLE, 1.2) de signaler que la notation Cōs était *provisoire* ; mais, comme la chose semble n'avoir pas frappé tous les lecteurs, ni toutes les lectrices, on peut regretter que l'occasion de préciser ces choses-là n'ait pas été saisie dans la notice PHASE.

* * *

Comment conclure ce tour d'horizon tous azimuts ? Visiblement la modernisation de notre enseignement, ni la rénovation du langage qui lui est liée, ne pouvaient se réaliser vite ni sans quelques accrocs. Ce qui perd les conservateurs, disait Paul Valéry, c'est le mauvais choix des choses à conserver. Le propre de ce genre de formules est qu'elles se retournent fort bien : ce qui perd les démolisseurs, c'est le mauvais choix des choses à démolir ; il n'est pas rare, même, que l'on perde sur les deux tableaux, en démolissant le bon et conservant le mauvais. Heureusement la réaction normale de tout organisme sain est de réparer les lésions et de rejeter les tissus nécrosés. Je tiens l'A.P.M. pour un organisme sain, et suis persuadé qu'en ses diverses cellules — le Dictionnaire, la Commission "Mots", le *Savoir minimum*, des centres de travail et de réflexion dans les IREM et d'autres endroits que j'ignore — se poursuit, sans bruit mais avec ténacité, un effort dont les résultats sont déjà perceptibles : les choses vraiment importantes, et les moyens pour les exprimer, apparaissent sous un jour meilleur qu'il y a dix ans. Des réserves doivent être formulées, des erreurs doivent être corrigées ? Si après treize années de Dictionnaire je l'ignorais encore, ce serait de l'inconscience pure ! Mais en ce premier numéro de l'année je peux bien révéler un grand secret, aussi valable pour ceux qui accélèrent que pour ceux qui modèrent l'allure :

Mettre la main à la pâte en 76 vaut mieux que de critiquer en 77.

4

LES RUBRIQUES DE L'A.P.M.E.P.

Matériaux pour une bibliographie

par G. WALUSINSKI

Une œuvre

Un défaut de la présente chronique : elle voudrait signaler tous les livres susceptibles d'intéresser les collègues, elle n'y parvient pas et, cependant, passe trop vite sur des ouvrages qui devraient être analysés en profondeur. Je pense à des titres très différents les uns des autres qui ont été signalés en quelques lignes alors que leurs auteurs ont produit un long travail, alors que leurs lecteurs en tirent un grand profit. "C'est pas juste !" comme disent les enfants. On devrait se promettre d'y revenir plus longuement.

C'est une promesse que j'espère tenir pour l'admirable livre que notre collègue Geneviève GUITEL vient de publier : *Histoire comparée des numérations écrites*. Un travail de toute une vie qui a pu être accompli grâce à la persévérance et à la passion conjuguées pour la mathématique et pour l'histoire.

Notre collègue avait soutenu une thèse de Doctorat d'Etat, alors qu'elle enseignait encore au lycée Molière, à Paris, sur "Une étude métrique des familles de tétraèdres et de figures apparentées". Mais, déjà en 1937, Mlle Guitel avait consacré six conférences radiophoniques à l'histoire des nombres et, depuis, elle a continué à s'intéresser à ce sujet. Le résultat, nous le trouvons dans les 864 pages d'un livre, véritable ouvrage de référence que toutes les bibliothèques de nos établissements auront à cœur de posséder.

Grâce à une classification très fine des divers systèmes de numération, grâce aux rapprochements qui en résultent, Mlle Guitel met en évidence de surprenantes analogies en contraste avec de peut-être moins étonnantes différences. Ainsi l'éloignement géographique des Mayas ou des Babyloniens ne les empêche pas d'adopter des systèmes analogues. De même les Egyptiens et les Aztèques. Par contre, assez voisins géographiquement, Babyloniens et Egyptiens se différencient, de même Mayas et Aztèques. "De part et d'autre d'une même frontière et aussi bien dans le Nouveau Monde que dans l'Ancien, l'exigence qu'ont les peuples de se distinguer ..." remarque Charles Morazé dans l'importante préface qu'il donne à ce livre et qui souligne justement l'intérêt que prendront à le lire, à le consulter, les historiens aussi bien que les mathématiciens.

Aucun problème n'est petit dès qu'il est traité en profondeur. Certes, dans notre enseignement de l'arithmétique, nous ne pouvons consacrer beaucoup d'heures à la numération. Au moins, grâce à la documentation ainsi mise à notre disposition, pouvons-nous faire ressortir la portée des solutions proposées pour l'écriture des nombres : pas de développement scientifique sans bonne numération.

Mais, je le répète, il ne peut être question, en quelques lignes, de rendre compte d'un ouvrage aussi considérable. J'y reviendrai aussi longuement qu'il le faudra. Simplement, j'ai voulu dire : Merci, Mlle Guitel, de nous procurer cette lecture passionnante.

Voici les références du livre :

Geneviève GUITEL : *Histoire comparée des numérations écrites*, avec une préface de Charles MORAZE, "Nouvelle bibliothèque scientifique"; ouvrage publié avec le concours du CNRS ; un volume broché de 864 p., prix 190 F, édition Flammarion.

Où, le prix est élevé ; il n'est cependant pas excessif si on le compare à celui des romans de saison.

Quant à savoir dans quelle catégorie ranger le livre selon notre code : pour la culture générale, certes ; pour la formation des maîtres encore plus sûrement et par conséquent aussi utile à la pédagogie de la mathématique. Lisible aussi pour le plaisir.

Rappel du code

□ manuels ; ○ pédagogie générale ; ∇ pédagogie pour la mathématique ; Δ culture générale ; * formation permanente des maîtres (éventuellement ** ou *** pour des ouvrages de niveau élevé ou très élevé) ; □□ articles publiés dans des revues.

G. CAGNAC, E. RAMIS et J. COMMEAU

- 1 □ *Traité de Mathématiques Spéciales*, tome 4 : Applications de l'analyse à la géométrie (4e édition revue), 468 p., édition Masson. [Autant j'apprécie que dans cette réédition d'un ouvrage classique on retrouve le nom de notre regretté collègue Commeau, autant je suis surpris que les titres exacts des deux autres auteurs ne soient pas donnés : M. Cagnac est Inspecteur Général honoraire, M. Ramis est Inspecteur Général ; il ne faut pas en avoir honte].

A. HOCQUENGHEM, P. JAFFARD et R. CHENON

- 2 □ *Mathématiques*, tome 1 : Eléments de calcul différentiel et intégral, 5e édition révisée et complétée, 576 p., prix 90 F, édition Masson.

A. VOGT, C. COMMEAU et P. GALMICHE

- 3 □ *Algèbre*, classe de Troisième, Exercices avec solutions, 304 p., édition Vuibert.

Jacques CHAILLOU et Jacques HENRY

- 4 * *Problèmes de topologie*, 2e édition revue et corrigée, prix 28 F, édition Masson.

C. GILORMINI et G. HIRSCH

- 5 * *Equations différentielles*, cours, exercices, tests, 56 p., prix 20 F, édition Masson.

D. CARTON

- 6 ** *Processus aléatoires utilisés en recherche opérationnelle, statistique et décisions économiques*, 160 p., prix 38 F, édition Masson.

A. KAUFMANN

- 7 ** *Introduction à la théorie des sous-ensembles flous*, à l'usage des ingénieurs (Fuzzy sets theory) ; tome III : Applications à la classification et à la reconnaissance des formes, aux automates et aux systèmes, aux choix des critères ; 320 p., prix 168 F, édition Masson. [tome I signalé sous le n° 20 dans le Bulletin n° 291 ; tome II sous le n° 12 dans le Bulletin n° 300].

EVELYN, MONEY-COUTTS et TYRRELL

- 8 * *Le théorème des sept cercles*, adapté de l'anglais par Daniel Duclos, collection Formation des maîtres en mathématiques, 72 p., prix 15 F, édition CEDIC [On y trouve en particulier des extensions des théorèmes de Pascal et Brianchon].

G. PUPION et G. POULALION

- 9 * *Mathématiques pour économistes*, résolution mathématique de problèmes économiques, 256 p., prix 48 F, édition Hachette.

Guy RENAULT

- 10 *** *Algèbre non commutative*, collection "Varia Mathematica", 182 p., prix 65 F, édition Gauthier-Villars.

John ELLISON avec la collaboration de Michel MENDES-FRANCE

- 11 ** *Les nombres premiers*, 456 p., prix 118 F, édition Hermann [Les techniques de base de la théorie des nombres premiers].

Yvette AMICE

- 12 *** *Les nombres p-adiques*, préface de Ch. Pisot, collection Sup. le mathématicien, 192 p., édition P.U.F.

LE XUAN et J.-C. CHASSAIN

- 13 ○ *Analyse comportementale*, analyse de contenu, théorie et pratique de l'apprentissage ; 192 p., prix 42 F, édition Nathan.

FLORIMOND DE BEAUNE

- 14 Δ *Doctrine de l'angle solide, Inventaire de sa bibliothèque*, édition première par Pierre COSTABEL avec introduction, transcription moderne et commentaires ; transcription du manuscrit original de la Doctrine par Bernard BARBICHE ; dactylographie pour l'édition par Arlette Chancrin ; collection des travaux de l'Académie Internationale d'Histoire des Sciences n° 19 ; 160 p., édition Vrin.

Benoît MANDELBROT

- 15 *** *Les objets fractals, forme, hasard et dimension* ; un volume de la "Nouvelle bibliothèque scientifique", 192 p., édition Flammarion.

Les mathématiques qu'on n'enseigne pas

Ce ne sont pas forcément les moins enseignables ou les moins intéressantes. Les deux derniers livres cités nous le rappellent chacun à leur façon.

Il y a seulement quarante ans, tout élève de "Math-Elem" faisait de nombreux exercices de "résolution de triangles" comportant discussion trigonométrique et construction géométrique. Il est probable qu'on en a abusé. Et qu'on abuse aussi de leur complète suppression. On peut en dire autant des trièdres qui, après une valse hésitation entre les programmes de Première et de Terminale, ont complètement disparu de notre paysage scolaire. En même temps que les triangles sphériques qui n'ont jamais eu bonne presse alors que, pourtant, nous étions encore sensés enseigner les éléments d'astronomie sphérique.

Notre collègue Pierre COSTABEL a eu la bonne fortune de retrouver, dans les archives de l'Académie des Sciences, le manuscrit jamais publié de "La Doctrine de l'Angle solide" par Florimond de Beaune. Avec l'aide de Bernard Barbiche, de l'Ecole des Chartes, pour la lecture du manuscrit difficilement déchiffrable, Costabel nous donne l'histoire de ce texte, le texte lui-même dans la partie essentielle, des reproductions photographiques des figures originales (ce qui suggère un peu les difficultés de lecture du manuscrit) et enfin une transcription moderne qui rend le document très facilement utilisable.

Florimond de Beaune (1601—1652), qui était un contemporain et un grand admirateur de Descartes, a écrit des *Notes brèves*

sur la Géométrie publiées en 1637 et dans une lettre à Mersenne, (le 5-3-1639) : "Je ne pense pas qu'on puisse acquérir aucune connaissance solide de la nature en physique sans la géométrie, et le plus excellent de la géométrie consiste en l'analyse, en sorte que sans cela elle est bien imparfaite". Alors que ce même Florimond éprouvait pour la trigonométrie une méfiance injustifiée.

Nous ne pouvons que souscrire à son opinion sur physique et géométrie, même si la physique d'aujourd'hui exige de dépasser la géométrie du trièdre. Dépasser, non oublier, et par conséquent lire avec profit la transcription de la théorie donnée par Costabel qui conclut : "Il nous paraît en effet certain que les professeurs peuvent aujourd'hui encore y trouver matière pour leur enseignement mathématique élémentaire. Non seulement par rapport à la logique des structures géométriques, mais encore en ce qui concerne ce que de Beaune appelle les "schèmes", c'est-à-dire ces dessins informés de procédés devenus classiques avec la géométrie descriptive".

Toute autre est la mathématique des objets fractals que nous donne Benoit Mandelbrot. Ses intentions sont immédiatement connues par la longue citation des *Atomes* de Jean Perrin qu'il donne en tête de son livre. C'est en effet par nécessité pédagogique que les fonctions dérivables sont présentées en premier. Je dis "nécessité pédagogique" sans en être assuré. Peut-être ne s'agit-il que d'une vieille habitude. Si on observe les premiers essais d'un tout jeune enfant, on s'aperçoit qu'il trace souvent des courbes presque continues mais à points anguleux.

Mais les exemples analysés par B. Mandelbrot ne se limitent pas à ces courbes (suggérées par la question bien naturelle : combien mesure la côte de la Bretagne ?), mais s'étendent au mouvement brownien, à la répartition des cratères sur la surface de la Lune, la fréquence des erreurs dans les transmissions téléphoniques, la distribution de la matière stellaire, la géométrie de la turbulence, la structure du savon, etc...

Tout le livre traduit l'intention de l'auteur : grâce aux ensembles de Cantor, courbes de Koch et "autres beautés réputées pathologiques", lier la mathématique dite moderne de nos grand-pères à des réalités très solides. Un livre, autrement dit, qui fait longtemps rêver et qui sera peut-être plus utile pédagogiquement que des concours pour surdoués.

Les revues qu'on ne lit plus

D'abord ce sont celles qui disparaissent. J'ai signalé, avec regret, la cessation de paraître de *Documents et recherches*. A côté de solutions détaillées et instructives de problèmes bien choisis, on y trouvait des articles originaux destinés à un vaste public d'élèves et de professeurs. C'était sortir des routines du genre. Exemple, justement, dans le dernier numéro, le compte rendu d'une table ronde sur "Mathématique et sélection" entre trois professeurs de mathématique et trois proviseurs ou directeurs d'établissement. Bel exemple d'analyse lucide des difficultés rencontrées et qui poussent certains des interlocuteurs à parler d'"échec de la réforme de l'enseignement mathématique". Qu'il y ait, en fin de Troisième, de Seconde, de Terminale, une sélection par les mathématiques, il faut y voir une influence du goût de notre société pour la sélection précoce par concours (et la réforme Haby a pour but d'accentuer le mal). Il y a aussi le piège dans lequel certains professeurs de mathématiques sont tombés : ils ont cru au pouvoir que leur donnerait l'importance de leur discipline dans la sélection ; pour un pouvoir illusoire et abusif, ils compromettent la réforme. Conclusion des collègues animateurs de la défunte revue : "... la mathématique a vocation d'être discipline du tronc commun ; elle se trahit elle-même en se faisant discipline de sélection". On ne saurait mieux dire. Mais le dire, était-ce donc dangereux pour leur revue ?

Du n° 19 de la *Revue de l'Enseignement des Sciences* (novembre 1908), je recopie la citation suivante : "Quoique notre enseignement public ait fait de grands progrès par rapport à ce qu'il était sous le second empire, il reste encore imprégné, comme l'a dit au Congrès de Lyon mon collègue et ami Lippmann, "du pédantisme bureaucratique et de la pédagogie d'ancien régime". D'ailleurs toute réforme dans le sens du développement de l'esprit scientifique sera impossible, tant que nous laisserons, comme couronnement et sanction des études, écraser l'esprit de la jeunesse par des épreuves théoriques, reposant uniquement sur l'érudition".

Quel est le dangereux révolutionnaire qui s'exprimait ainsi, quel intellectuel gauchiste ? Réponse dans le prochain numéro.

Les hommes qu'on n'entendra plus

A quelques jours d'intervalle, les journaux ont annoncé le décès de Robert Blanché (le 6 décembre, né en 1898) et de Ferdinand Gonseth (le 17 décembre, né en 1890).

Du premier, on relira encore "L'axiomatique" (P.U.F. 1955),
"La Logique et son histoire, d'Aristote à Russell" (A. Colin 1971).

Du second, nous avons signalé récemment la réédition récente, chez Blanchard, de "Les fondements des mathématiques" et "Les mathématiques et la réalité" (qui date de 1934).

Le premier enseigne à l'Université de Caen puis à celle de Toulouse ; le second à l'Ecole Polytechnique fédérale de Zurich. Deux éminents logiciens dont les oeuvres resteront.

Rubrique des problèmes de l'APM

Cette rubrique est pour le plaisir, celui qui nous fait choisir les mathématiques à vingt ans, et non directement pour notre enseignement.

Le niveau ne doit pas excéder celui des classes préparatoires ou des deux premières années de faculté. Un certain caractère d'originalité dans l'énoncé est souhaité, ce qui exclut, en particulier, les applications immédiates de théorèmes classiques, ou les problèmes déjà parus dans d'autres revues.

Si l'auteur d'un énoncé n'est pas en mesure d'en donner la solution, il doit accompagner son envoi du maximum d'informations concernant le problème, afin d'aider les responsables de la rubrique. Un astérisque signale un problème dont la solution n'est pas connue de ceux-ci. Le Bulletin publie les meilleures solutions.

Enoncés et solutions sur feuilles séparées et tapées à la machine S.V.P. N'oubliez pas de signer. Toute correspondance concernant la rubrique est à adresser à :

Charles AUQUE
Université de Clermont-Ferrand
Mathématiques Pures
B.P. 45 - 63170 AUBIERE

ENONCES

Enoncé n° 48 (CUCULIERE, IREM Paris-Nord)

Pour quels entiers p entre 1 et 9, existe-t-il deux nombres distincts, qui s'écrivent en utilisant une fois et une seule chacun des chiffres de 1 à p , tels que l'un divise l'autre ?

Enoncé n° 49 (EHRHART, Strasbourg)

On désigne par $f(n)$ le nombre de points d'intersection des diagonales (considérées comme segments) d'un polygone régulier convexe à n côtés.

1° Déterminer $f(12)$ et $f(16)$.

2° Déterminer $f(n)$ ou, à défaut, donner le meilleur encadrement possible de $f(n)$.

Enoncé n° 50 (PERONNY, Clermont-Ferrand)

Existe-t-il une suite numérique réelle (u_n) , telle que la série de terme général u_n^α soit convergente pour $\alpha = 1$ et divergente pour tout $\alpha \neq 1$?

SOLUTIONS

Enoncé n° 44 (BLANCHARD, Marseille)

Déterminer les naturels m et n tels que $|19^m - 2^n|$ soit un carré.

Solution (B. CHEVREAU, Ecole Polytechnique de Quito)

A) Soit d'abord l'équation

$$2^n - 19^m = a^2$$

Si $m \neq 0$, on a $n \geq 5$, d'où la congruence

$$19^m + a^2 \equiv 0 \pmod{16}$$

Cette congruence est impossible, car les puissances de 19 sont congrues à 1, 3, 9 ou 11 et les carrés impairs à 1 ou 9.

Avec $m = 0$, n ne peut être supérieur ou égal à 2 (sinon le premier membre serait congru à $-1 \pmod{4}$ et le second à 1 puisque a est impair).

Il reste donc les deux solutions triviales :

$$m = 0, n = 0, a = 0 \quad \text{et} \quad m = 0, n = 1, a = 1.$$

B) Equation $19^m - 2^n = a^2$.

1) Supposons $n \geq 2$. Alors a est impair. La congruence modulo 4 conduit à m pair. Soit $m = 2r$.

De $(19^r - a)(19^r + a) = 2^n$, on déduit

$$19^r - a = 2^\alpha \quad \text{et} \quad 19^r + a = 2^{n-\alpha} \quad \text{avec} \quad \alpha \leq n - \alpha.$$

$$19^r = (2^\alpha + 2^{n-\alpha})/2 \quad \text{entraîne} \quad \alpha = 1.$$

On a alors $19^r - 1 = 2^{n-2}$ et une contradiction modulo 3.

2) Voyons maintenant $n = 1$. Le premier membre est congru à -1 modulo 3, et ne peut donc être un carré.

3) Il reste $n = 0$.

a est pair ; en considérant les deux membres modulo 4, on obtient m pair. Posons $m = 2r$. On a

$$(19^r - a)(19^r + a) = 1$$

Les deux facteurs sont égaux à 1, ce qui correspond à la solution $m = n = a = 0$.

Autres solutions : COQUET de Valenciennes, qui propose aux lecteurs l'équation voisine $19^m + 2^n = a^2$; QUENTON de Madrid et l'auteur.

Enoncé n° 45 (ADLER, Paris)

Soit P un polygone plan non convexe. On prend l'enveloppe convexe de ses sommets ; soit AB un segment de cette enveloppe convexe qui n'est pas entièrement un segment de P ; A et B divisent le polygone P en deux parties ; on prend la symétrique de l'une de ces parties par rapport au milieu de AB ; elle détermine, avec l'autre partie, un nouveau polygone P' .

Si P' est convexe, on achève l'algorithme, sinon on applique la même méthode au polygone P' . Démontrer qu'au bout d'un nombre fini d'opérations on obtient un polygone convexe.

Solution de l'auteur.

Les deux polygones P et P' ont des côtés deux à deux équi-pollents. Or, si nous partons d'une somme de n vecteurs nulle, il n'est possible de déterminer avec ces vecteurs qu'un nombre fini de polygones.

Par conséquent le processus défini est soit fini soit périodique. Ce dernier cas est exclu puisque l'aire du polygone augmente.

On peut remarquer que le polygone convexe obtenu est unique, à une symétrie-point et une translation près.

5

C. E. T.

Les mathématiques dans l'enseignement professionnel

par J. BLION, C.E.T. annexe de l'E.N.N.A. de Lyon

Les opérations de fraisage, régulièrement espacées sur le pourtour des pièces de révolution, en vue de réaliser une denture d'engrenage, une surface prismatique régulière, une graduation, etc., se déroulent par cycles comprenant trois phases :

- avance de la table et action de l'outil sur la pièce ;
- recul de la table ;
- arrêt de la table et rotation de la pièce.

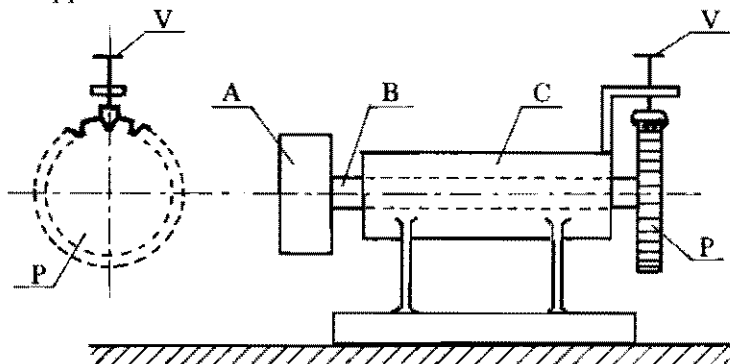
La rotation qui se produit au cours de la troisième phase est commandée à la main par l'opérateur. Pour assurer le contrôle précis de cette opération, celui-ci dispose d'un plateau à encoches dans les cas les plus simples, et, plus généralement, d'un diviseur universel.

Ces appareils se fixent sur la table de la machine. Ils possèdent une broche mobile en rotation qui porte la pièce. Leur bonne utilisation occasionne des calculs où peuvent intervenir :

- les opérations dans l'ensemble des rationnels,
- les équations à solutions entières,
- la divisibilité dans N ,
- les suites décimales périodiques.

I — Utilisation d'un plateau à encoches

1 — L'appareil



Le bâti C, traversé par la broche B sur laquelle sont fixés le plateau P et la pièce A.

Le plateau P porte sur sa périphérie k encoches régulièrement espacées.

Un verrou V immobilise l'ensemble à volonté.

2 — Aspect mathématique

$D(k)$ est l'ensemble des diviseurs de k . Description de $D(k)$.

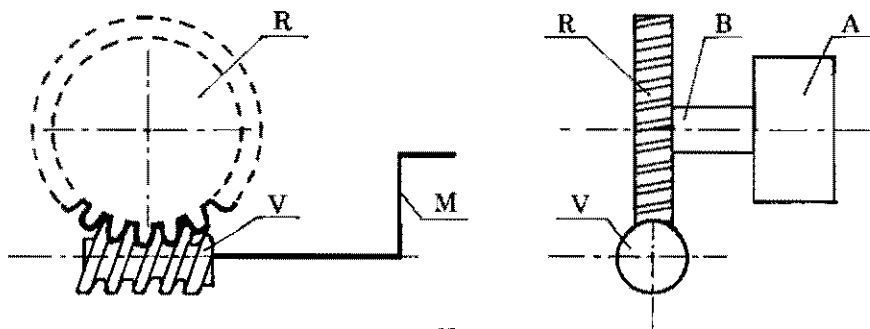
On veut réaliser z opérations régulièrement espacées sur le pourtour de la pièce A.

- Condition de possibilité : $z \in D(k)$.
- Mesure de la rotation de la pièce entre deux opérations par le calcul du nombre d'encoches dont on fera tourner le plateau.

II — Utilisation du diviseur universel

1 — L'appareil

a) Organes d'entraînement de la pièce.



Sur la broche B qui porte la pièce A est clavetée une roue dentée R. Selon les appareils cette roue possède 40 ou 60 dents. Dans la suite nous désignerons par k ce nombre de dents.

Une vis sans fin à un filet V engrène avec la roue R. La manivelle M, clavetée sur l'axe de la vis, permet de faire tourner à la main la vis, la roue et la pièce.

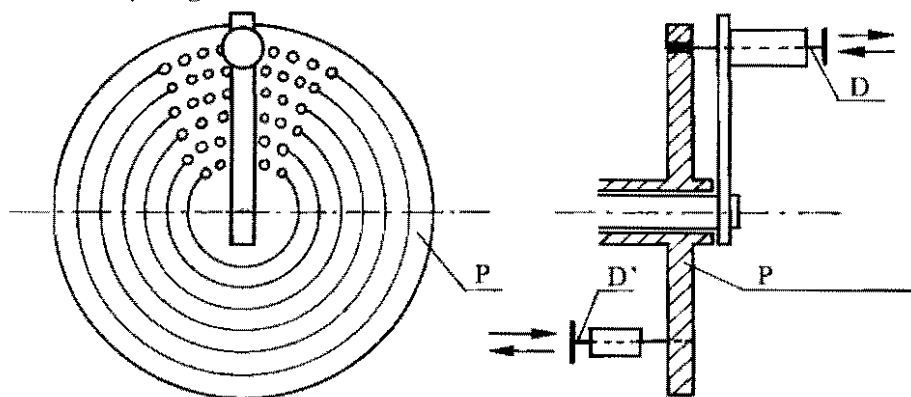
b) Premières considérations d'ordre mathématique :

- raison de la transmission vis-roue ou manivelle-pièce $\frac{1}{k}$;
- si on veut réaliser sur la pièce z opérations régulièrement espacées, il faut que la pièce tourne de $\frac{1}{z}$ tour entre deux opérations successives.

Cette rotation est obtenue par t tours de manivelle.

$$t \times \frac{1}{k} = \frac{1}{z} \quad \text{donc} \quad t = \frac{k}{z}$$

c) Organes de contrôle de la rotation de la manivelle.



— Un plateau amovible P est monté fou sur l'axe de la vis et de la manivelle. Il est perforé de trous disposés sur six cercles concentriques. Les trous de chaque cercle sont équidistants.

— Le doigt plongeur D' permet d'immobiliser le plateau à volonté par pénétration dans un trou.

— On dispose de quatre plateaux interchangeables. A chacun d'eux correspond l'ensemble des nombres de trous des six cercles concentriques.

plateau I	E = {17, 21, 25, 29, 33, 41}
plateau II	F = {18, 22, 26, 30, 35, 43}
plateau III	G = {19, 23, 27, 31, 37, 47}
plateau IV	H = {20, 24, 28, 32, 39, 49}

— La poignée de la manivelle comporte un doigt plongeur D. Elle peut glisser sur la manivelle et être placée en face d'une des six rangées de trous. La pénétration du doigt dans un trou du plateau immobilise la manivelle, la vis, la roue et la pièce.

2 — *Contrôle de la rotation de la manivelle mesurée par $\frac{k}{z}$.*

Soit $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$, l'écriture réduite de $\frac{k}{z}$.

Plusieurs situations peuvent se présenter :

A) *L'ensemble $E \cup F \cup G \cup H$ contient un multiple de b .*

Soit m ce naturel. Alors, on peut trouver $n (n \in \mathbb{N})$ tel que $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$. Dans ce cas on monte le plateau possédant le cercle de m trous sur le diviseur. Entre deux opérations de l'outil, on fait tourner la manivelle en comptant n intervalles sur le cercle de m trous.

B) *L'ensemble $E \cup F \cup G \cup H$ ne contient pas de multiple de b , mais il existe deux naturels c et c' , strictement inférieurs à b , tels que $c \times c' = b$ et $E \cup F \cup G \cup H$ contient au moins un multiple de c et un multiple de c' .*

Alors, si on peut trouver deux entiers x et x' tels que $\frac{x}{c} + \frac{x'}{c'} = \frac{a}{b}$, le diviseur universel permet de réaliser la rotation mesurée par $\frac{a}{b}$.

a) *Résolution de l'équation dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$*

Soit g le p.g.c.d. de c et c' .

— Si $g > 1$, en posant $c = g d$ et $c' = g d'$, l'équation s'écrit $g(d'x + dx') = a$

Comme $\frac{a}{b}$ est irréductible, g qui divise b ne peut diviser a ; l'équation est sans solution.

— Si $g = 1$, c et c' sont étrangers.

Rappelons le théorème de Bachet : "Si a et b sont deux entiers étrangers, il existe au moins deux entiers x et y tels que $ax + by = 1$ ".

L'équation $c'x + cx' = 1$ admet donc une solution (u, v) .

L'équation $c'x + cx' = a$ admet la solution (au, av) ainsi que toute solution (x, x') telle que :

$$c'(x - au) + c(x' - av) = 0$$

Comme c et c' sont étrangers, pour tout entier p cette égalité est vraie si et seulement si $x - au = pc$ et $x' - av = -pc'$; $x = pc + au$ et $x' = -pc' + av$. Ainsi toutes les solutions de l'équation sont connues si on connaît le couple (u, v) .

Une méthode pour trouver ce couple est d'écrire les éléments successifs des ensembles cN et $c'N$ jusqu'au moment où l'on trouve un couple (u', v') tel que $u' \in cN$ et $v' \in c'N$ et $|u' - v'| = 1$.

b) Retour au diviseur universel

$E \cup F \cup G \cup H$ contenant un multiple m de c et un multiple m' de c' , et une solution (x, x') de l'équation précédente étant retenue, on peut trouver les entiers n et n' tels que :

$$\frac{x}{c} = \frac{n}{m} \quad \text{et} \quad \frac{x'}{c'} = \frac{n'}{m'}.$$

Avec un plateau possédant un cercle de m trous et un cercle de m' trous, ou avec deux plateaux possédant l'un un cercle de m trous, l'autre un cercle de m' trous, on peut réaliser successivement les rotations de la manivelle mesurées en trous par $\frac{n}{m}$ et $\frac{n'}{m'}$. Le doigt D' est utilisé pour contrôler une de ces deux rotations si on monte deux plateaux l'un contre l'autre.

c) Exemple

Avec un diviseur à roue de 40 dents, on veut diviser le pourtour d'un cylindre en 77 parties égales.

$$\frac{k}{z} = \frac{a}{b} = \frac{40}{77} \quad \text{et} \quad 77 = 7 \times 11$$

— Examen des conditions requises :

- 7 et 11 sont étrangers. $c = 7$; $c' = 11$
- Existence de multiples de 7 et de 11 dans $E \cup F \cup G \cup H$:

plateaux	I	II	III	IV	nb. mult.
multiples de 7	21	35	—	28;49	4
multiples de 11	33	22	—	—	2

Il y a 8 possibilités matérielles de réaliser la division. Les plus simples sont celles qui n'utilisent qu'un plateau : plateau I ou II.

— Résolution de l'équation $\frac{x}{7} + \frac{x'}{11} = \frac{40}{77}$

$$11x + 7x' = 40 \left\{ \begin{array}{ll} 11N \longrightarrow & 0, 11, 22, 33, \dots \\ 7N \longrightarrow & 0, 7, 14, 21, 28, \dots \end{array} \right. \quad |22-21| = 1$$

Une solution de l'équation $11y + 7y' = 1$ est $(2; -3)$. Son ensemble de solutions est donc :

$$\{(2 + 7p; -3 - 11p) \mid p \in \mathbb{Z}\}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $11x + 7x' = 40$ est :

$$\{(80 + 280p; -120 - 440p) \mid p \in \mathbb{Z}\}$$

Pour $p = 0$ on a la solution $(80; -120)$.

— Rotation de la manivelle :

$\frac{40}{77} = \frac{80}{7} - \frac{120}{11}$. Avec le plateau I, on écrira cette somme $\frac{240}{21} - \frac{360}{33} = 11 + \frac{9}{21} - 10 - \frac{30}{33} = 1 + \frac{9}{21} - \frac{30}{33}$. On fera tourner la manivelle d'abord d'un tour complet ; ensuite, dans le même sens, de 9 intervalles comptés sur le cercle de 21 trous ; enfin, dans l'autre sens, de 30 intervalles comptés sur le cercle de 33 trous. *C'est la division composée.*

Si les conditions mathématiques requises par cette méthode ne sont pas satisfaites, deux autres méthodes peuvent être mises en oeuvre.

C) La méthode différentielle

a) Principe

On provoque une rotation contrôlée du plateau pendant la rotation de la manivelle. Ainsi, au cours d'une opération, trois rotations peuvent être considérées :

- rotation absolue de la manivelle mesurée par $t = \frac{a}{b}$;
- rotation de la manivelle par rapport au plateau t' ;
- rotation absolue du plateau mesurée par t'' .

t , t' et t'' sont des rationnels liés par la relation :

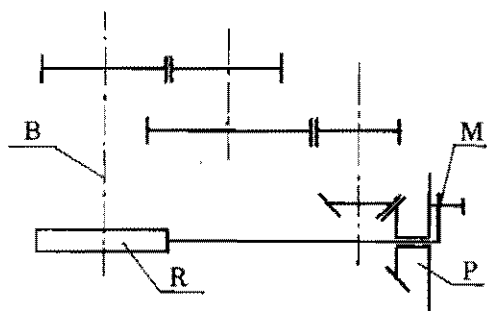
$$t = t' + t''$$

t' est choisi aussi voisin que possible de t et aisément réalisable au moyen d'un seul cercle de trous.

$t'' > 0$ signifie que le plateau tourne dans le même sens que la manivelle.

$t'' < 0$ signifie qu'il tourne en sens contraire.

b) *Problème technique* : Contrôle de la rotation du plateau.



Solution : En établissant un train d'engrenages comportant un couple conique de raison 1 entre l'axe de la broche et le plateau, on crée une liaison cinématique de la manivelle au plateau. La rotation de ce dernier est contrôlée par celle de la manivelle.

c) *Problème mathématique* : Calcul de la raison du train d'engrenages, r . Détermination des éléments de ce train.

— *Calcul de r*

L'ensemble de la transmission du mouvement de la manivelle au plateau a pour raison $\frac{1}{k} \times r$. Donc $t \times \frac{1}{k} \times r = |t''|$; et comme $t'' = t - t'$, $r = \frac{k |t - t'|}{t}$.

— *Composition du train d'engrenages*

Parmi l'ensemble des roues dont on dispose, on choisit des éléments dont les nombres de dents peuvent vérifier la relation $\frac{p}{p'} = r$.

(p = produit des nombres de dents des roues menantes

p' = produit des nombres de dents des roues menées).

Ce choix dépend du nombre d'axes intermédiaires dont la parité est définie par le signe de t'' :

$t'' > 0$, nombre impair d'axes ; $t'' < 0$, nombre pair d'axes.

d) *Exemple*

On veut diviser en 302 parties égales le pourtour d'un cylindre à l'aide d'un diviseur à roue de 40 dents. Les roues dentées dont on dispose ont des nombres de dents qui forment l'ensemble J :

$J = \{ 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 90, 100, 120 \}$.

$t = \frac{40}{302} = \frac{20}{151}$; 151 est premier ; la méthode de la division composée est inapplicable.

— *Choix de t'* $\frac{20}{151} \approx \frac{2}{15}$ $t' = \frac{2}{15}$

La rotation de $\frac{2}{15}$ de tour est facilement réalisable (plateau II ; cercle de 30 trous).

— *Calcul de r*

$$t = \frac{20}{151} \text{ et } t' = \frac{2}{15}; \text{ alors } t'' = -\frac{2}{151 \times 15}$$

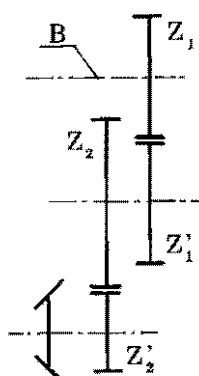
$$r = \frac{40 \times \frac{2}{151 \times 15}}{\frac{20}{151}} \quad r = \frac{4}{15}$$

— *Parité du nombre d'axes intermédiaires* (y compris l'axe d'attaque du couple conique):

$t'' < 0$; le nombre d'axes est pair.

— *Choix des roues du train*

La raison $\frac{4}{15}$ peut être obtenue avec deux axes et quatre roues. Les nombres de dents Z_1, Z'_1, Z_2, Z'_2 de ces roues doivent satisfaire aux conditions suivantes : $\{Z_1, Z'_1, Z_2, Z'_2\} \subset J$ et $\frac{Z_1 \times Z_2}{Z'_1 \times Z'_2} = \frac{4}{15}$



Une solution à ce problème qui en a plusieurs peut être obtenue en factorisant les termes de $\frac{4}{15}$, $\frac{2 \times 2}{3 \times 5}$ par exemple, et en cherchant deux naturels p et q tels que $2p = Z_1$, $3p = Z'_1$, $2q = Z_2$, $5q = Z'_2$ (dans l'exemple choisi), et que $10 \leq p \leq 30$ et $10 \leq q \leq 24$.

De plus les nombres Z_1, Z'_1, Z_2, Z'_2 doivent être distincts deux à deux, ce qui exclut $p = q$ ou encore $p = 10$ et $q = 15$ par exemple.

Avec $p = 20$ et $q = 10$ on obtient

$$Z_1 = 40, \quad Z'_1 = 60, \quad Z_2 = 20 \text{ et } Z'_2 = 50.$$

D) La méthode des suites décimales

C'est une méthode approchée de division composée qui utilise uniquement, quel que soit le problème posé, un cercle de 100 trous et un cercle de 99 trous.

L'erreur introduite doit être estimée. On la néglige si elle n'excède pas les tolérances de fabrication ; sinon, on la corrige.

a) *Principe*

Il existe un naturel p tel que $\frac{p}{10\ 000}$ soit l'approximation décimale de $\frac{a}{b}$ à 0,000 05 près.

Exemple : si $k = 60$ et $z = 257$, alors $\frac{a}{b} = \frac{k}{z} = 0,233\ 463...$
 $\frac{a}{b} \approx 0,2335$ et $p = 2335$

On détermine deux entiers x et y tels que :

$$\frac{x}{100} + \frac{y}{99} \approx \frac{p}{10\ 000} \approx \frac{a}{b}$$

Sur le diviseur on exécute successivement les rotations de la manivelle mesurées en tours par $\frac{x}{100}$ et $\frac{y}{99}$.

b) *Calcul de x et y*

— Il existe deux entiers v et y tels que $|y| \leq 50$ et

$$\frac{v}{100} + \frac{y}{10\ 000} = \frac{p}{10\ 000}$$

Exemples :

$$\text{si } p = 2335, \quad \frac{23}{100} + \frac{35}{10\ 000} = \frac{2335}{10\ 000}$$

$$\text{si } p = 2377, \quad \frac{24}{100} + \frac{-23}{10\ 000} = \frac{2377}{10\ 000}$$

Plus généralement

$$\text{si } p - 100 E\left(\frac{p}{100}\right) < 50, \quad \begin{cases} v = E\left(\frac{p}{100}\right) \\ y = p - 100 E\left(\frac{p}{100}\right) \end{cases}$$

$$\text{si } p - 100 E\left(\frac{p}{100}\right) \geq 50, \quad \begin{cases} v = E\left(\frac{p}{100}\right) + 1 \\ y = p - 100[E\left(\frac{p}{100}\right) + 1] \end{cases}$$

— Valeur de x :

$$\frac{p}{10\ 000} = \frac{v}{100} - \frac{y}{100} + \frac{y}{100} + \frac{y}{10\ 000} = \frac{v-y}{100} + \left(\frac{y}{100} + \frac{y}{10\ 000}\right)$$

On pose $v - y = x$

— De plus :

$$\frac{y}{100} + \frac{y}{10\ 000} \approx \frac{y}{10^2} + \frac{y}{10^4} + \frac{y}{10^6} + \dots + \frac{y}{10^{2n}} + \dots$$

Cette somme est le développement décimal du rationnel $\frac{y}{99}$. Ainsi

$$\frac{p}{10\,000} \approx \frac{x}{100} + \frac{y}{99}$$

d) *Estimation et correction de l'erreur*

Soit à réaliser 151 divisions équidistantes sur le pourtour d'une pièce au moyen d'un diviseur à roue de 60 dents.

$$\frac{k}{z} = \frac{a}{b} = \frac{60}{151} = 0,397351 \dots \quad p = 3974$$

$$74 \geq 50. \text{ Donc } v = 39 + 1 \quad y = 74 - 100$$

$$v = 40 \quad y = -26$$

$$x = 40 - (-26) = 66$$

$$\frac{a}{b} = \frac{66}{100} - \frac{26}{99}$$

— Mesure de l'erreur en tour

Pour la manivelle à chaque opération :

$$\left(\frac{66}{100} - \frac{26}{99} \right) - \frac{60}{151} = \frac{34}{1\,494\,900}$$

Pour la pièce après 151 opérations :

$$\frac{34}{1\,494\,900} \times \frac{1}{60} \times 151 = \frac{34}{594\,000}$$

— Mesure de l'erreur périphérique en mm si la pièce a un diamètre de 250 mm : $250 \times \pi \times \frac{34}{594\,000} = e$

$$0,0495 < e < 0,0496$$

Cette erreur positive indique un excès de rotation. Voisine de 0,05 mm, elle peut être hors tolérance.

— Réduction de l'erreur par compensation :

Si on prend $\frac{67}{100} - \frac{27}{99}$ au lieu de $\frac{66}{100} - \frac{26}{99}$ pour valeur approchée de $\frac{a}{b}$, l'erreur à chaque opération devient $\left(\frac{67}{100} - \frac{27}{99} \right) - \frac{60}{151} = -\frac{117}{1\,494\,000}$; erreur négative qui indique une rotation insuffisante dont la valeur absolue est à peu près le triple de l'erreur précédente.

On effectuera une rotation mesurée par $\frac{67}{100} - \frac{27}{99}$ suivie de trois rotations de $\left(\frac{66}{100} - \frac{26}{99} \right)$ tour. Les 151 opérations peuvent se répartir ainsi :

$$\left(\frac{67}{100} - \frac{27}{99}\right) \times 37 + \left(\frac{66}{100} - \frac{26}{99}\right) \times 114$$

Ainsi l'erreur linéaire sur la périphérie de la pièce de 250 mm de diamètre est mesurée par

$$\left(\frac{34}{1\,494\,900} \times 114 - \frac{117}{1\,494\,900} \times 37\right) \times \frac{1}{60} \times 250 \times \pi \approx -0,004$$

Prochainement : Une brochure APMEP :

SUBSTITUTIONS & GROUPE SYMETRIQUE

par J. DAUTREVAUX

Dans son introduction, l'auteur déclare : "la théorie des groupes finis constitue en Mathématiques un des problèmes encore les plus ouverts, justifiant l'intensité des recherches par son utilisation dans des branches à priori très éloignées, par exemple la physique quantique. En outre, bien des aspects de cette théorie sont facilement illustrables à tous les niveaux de l'enseignement".

L'auteur étudie la structure du groupe symétrique et du groupe alterné. Les seules connaissances requises sont celles de groupes et de sous-groupes. La brochure introduit, au fur et à mesure des besoins, les notions de "groupe opérant sur un ensemble", d'orbite, de conjugaison (d'emploi systématique), de groupe cyclique, de groupe distingué et de centre d'un groupe.

Une trentaine de pages.

Prix de souscription : 2,50 F (port compris : 3,65 F).

Date limite de souscription : 15 mars 1976

Voir au verso le bulletin de souscription.
--

POUR SOUSCRIRE,

Veuillez vous conformer strictement aux indications suivantes (en respectant le compte à rebours) :

3. Remplir complètement et lisiblement le présent bulletin et l'étiquette qui servira à l'expédition de l'ouvrage souscrit.

2. Remplir les trois volets d'un chèque postal au compte de l'A.P.M.E.P. Paris 5708-21 et en y faisant figurer le montant correspondant à votre souscription.

1. Envoyer le tout, bulletin de souscription et les trois volets du virement postal, sous enveloppe affranchie au secrétaire administratif de l'A.P.M.E.P. : M. André BLONDEL, 154, avenue Marcel Cachin, 92-Châtillon-sous-Bagneux.



NOM : Prénom :

Adresse :

Nombre d'exemplaires souscrits : $a =$

Montant du virement postal : $a \times 2,50 \text{ F} =$

Date :

ETIQUETTE à remplir très lisiblement : adresse où vous désirez recevoir l'ouvrage souscrit.

**ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES
DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC, 29, RUE D'ULM, PARIS, 5e**

M
.....
.....
.....

6

ETUDES

Sur la représentation d'un naturel par la somme de deux carrés

par E. EHRHART (Strasbourg)

La théorie des nombres est riche en propositions intéressantes, mais elles sont en général difficiles à établir. Parfois, cependant, on peut atteindre des théorèmes importants et curieux par des raisonnements élémentaires instructifs, quitte à admettre au départ certains résultats. On se propose d'en montrer un exemple.

Soit u_n le nombre de points de coordonnées entières portés par le cercle

$$X^2 + Y^2 = n \quad (n \text{ naturel})$$

On démontre que $u_n = 4(d-d')$, où d et d' désignent respectivement les nombres de diviseurs de n de la forme $4K+1$ et $4K-1$.

La formule $u_n = 4(d-d')$ a été établie par Dirichlet à partir des formes quadratiques, mais seulement pour n impair (Journal für Math., 21, 1840, page 3). Elle a été retrouvée depuis par plusieurs auteurs.

Désignons par p et q respectivement les nombres premiers des congruences $4K+1$ et $4K-1$. La décomposition de n en facteurs premiers s'écrit alors

$$n = 2^{\gamma} \left(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r} \right) \left(q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_s^{\beta_s} \right) = 2^{\gamma} P Q$$

Il est clair que :

$$(4K'+1)(4K''+1) = 4K+1$$

$$(4K'-1)(4K''-1) = 4K+1$$

$$(4K'+1)(4K''-1) = 4K-1$$

Tout diviseur impair de n est le produit d'un diviseur A de P par un diviseur B de Q . Notons que A est toujours de la forme $4K+1$, tandis que B est de la forme $4K+1$ ou $4K-1$ suivant que le nombre de ses facteurs est pair ou impair.

$$\text{Il existe } a = \prod_{i=1}^r (1+\alpha_i) \text{ diviseurs de } A \text{ et } b = \prod_{i=1}^s (1+\beta_i)$$

diviseurs de B . Nous allons montrer d'abord que si b est impair, $\frac{b-1}{2}$ des B sont des $4K-1$ et $\frac{b+1}{2}$ des B sont des $4K+1$, de sorte que

$$d-d' = a \frac{b+1}{2} - a \frac{b-1}{2} = a$$

et donc $u_n = 4a$; puis que si b est pair, $\frac{b}{2}$ des B sont des $4K+1$ et les $\frac{b}{2}$ autres B sont des $4K-1$, de sorte que

$$d = d' = a \frac{b}{2} \text{ et donc } u_n = 0.$$

1) b est impair, c'est-à-dire tous les β sont pairs. Si $Q = q_1^{2m_1}$, ses diviseurs $B = q_1^0, q_1^1, q_1^2, \dots, q_1^{2m_1}$ forment une suite dont les termes appartiennent alternativement aux congruences $\mathcal{T}$ des $4K+1$ et $\mathcal{Q}$ des $4K-1$. Comme les termes extrêmes de la suite font partie de $\mathcal{T}$, il y a bien un B de plus dans $\mathcal{T}$ que dans $\mathcal{Q}$.

Raisonnons alors par récurrence sur

$$Q = (q_1^{2m_1} q_2^{2m_2} \dots q_{s-1}^{2m_{s-1}}) q_s^{2m_s}$$

Supposons que les diviseurs du produit entre parenthèses peuvent se ranger dans une suite S de termes appartenant alternativement à $\mathcal{T}$ et à $\mathcal{Q}$, les termes extrêmes faisant partie de $\mathcal{T}$. Les diviseurs

$q_s^{2m_s}$ forment une suite S' de même nature. Or les diviseurs de Q s'obtiennent en multipliant tous les termes de S par le premier terme de S' , puis tous les termes de S par le second terme de S' , etc. Les diviseurs B de Q seront ainsi rangés dans une suite S'' de même nature que S et S' : il y a donc encore un B de plus dans $\mathcal{T}$ que dans $\mathcal{Q}$.

2) b est pair, c'est-à-dire l'un au moins des β est impair. Soit d'abord β_s le seul β impair :

$$Q = \left(q_1^{2m_1} q_2^{2m_2} \dots q_{s-1}^{2m_{s-1}} \right) q_s^{2m_s+1}$$

Les diviseurs du produit entre parenthèses sont encore rangés dans la suite S . Les diviseurs $q_s^0, q_s^1, q_s^2 \dots q_s^{2m_s+1}$ de $q_s^{2m_s+1}$ forment une suite T de termes appartenant alternativement à $\mathcal{F}$ et à $\mathcal{Q}$, le premier terme étant dans $\mathcal{F}$ et le dernier dans $\mathcal{Q}$. Les diviseurs de Q s'obtiennent en multipliant tous les termes de S par le premier terme de T , puis par le second terme de T , etc. Les diviseurs B de Q seront ainsi rangés dans une suite T' de même nature que T . Il y a donc autant de B dans $\mathcal{F}$ que dans $\mathcal{Q}$.

Raisonnons alors par récurrence.

$$\text{Soit } Q = \left(q_1^{2m_1} q_2^{2m_2} \dots q_k^{2m_k} \right) \left(q_{k+1}^{2m_{k+1}+1} q_{k+r}^{2m_{k+r}+1} q_{s-1}^{2m_{s-1}+1} \right) q_s^{2m_s+1}$$

Les diviseurs du premier produit entre parenthèses forment une suite S . Supposons que les diviseurs du second produit entre parenthèses peuvent se ranger en une suite T , de sorte que les diviseurs du produit des deux parenthèses peuvent être rangés en une suite T' .

Or les diviseurs de $q_s^{2m_s+1}$ se rangent en une suite T'' . Les diviseurs de Q s'obtiennent en multipliant tous les termes de T' par le premier terme de T'' (ce qui donne autant de B dans $\mathcal{F}$ que dans $\mathcal{Q}$), puis tous les termes de T' par le second terme de T'' (ce qui donne encore autant de B dans $\mathcal{F}$ que dans $\mathcal{Q}$), etc. On voit donc que pour l'ensemble des B , il y en a autant dans $\mathcal{F}$ que dans $\mathcal{Q}$.

Résumons les résultats trouvés.

Théorème 1. Désignons par p et q respectivement les nombres premiers de la forme $4K+1$ et $4K-1$. Le cercle $X^2 + Y^2 = n$ porte des points entiers si et seulement si, dans la décomposition en facteurs premiers de

$$n = 2^{\gamma} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r} q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_s^{\beta_s}$$

tous les β sont pairs. Le nombre de ces points est alors *

$$4 \prod_{i=1}^r (1 + \alpha_i)$$

Remarque 1. Pour que le théorème (et sa démonstration) s'applique aussi quand il n'y a pas de q dans la décomposition de n , on doit considérer que dans ce cas les β sont nuls ($q^0 = 1$) ; de même quand il n'y a pas de p , on doit considérer que les α sont nuls, de sorte que $\prod (1 + \alpha_i) = 1$.

Comme corollaires, on obtient immédiatement les deux résultats classiques suivants :

Théorème 2. Tout nombre premier de la forme $4n+1$ est égal à la somme de deux carrés.

Théorème 3. Le produit de sommes de deux carrés est une somme de deux carrés.

Remarquons que le théorème 3 résulte aussi de l'identité :

$$(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) = (aa' + bb')^2 + (ab' - a'b)^2$$

Notons aussi que si n et n' sont premiers entre eux et si les cercles $X^2 + Y^2 = n$, $X'^2 + Y'^2 = n'$ portent respectivement N et N' points entiers, le cercle $X^2 + Y^2 = nn'$ en porte $\frac{NN'}{4}$.

Théorème 4. Les cercles $X^2 + Y^2 = n$ et $X^2 + Y^2 = 2n$ portent le même nombre de points entiers.

Rappelons enfin deux théorèmes fameux :

Théorème de Bachet, 5. Tout naturel est égal à une somme de quatre carrés, dont certains peuvent être nuls.

(Pour la démonstration, voir par exemple l'article "Théorème de Bachet" de A. Buquet dans le Bulletin n° 198 de mars 1959)

Théorème de Gauss, 6. Un naturel est la somme de trois carrés si et seulement si il n'est pas de la forme $4^n(8k-1)$.

(Voir une démonstration dans le "Cours d'arithmétique" de J.P. Serre aux Presses Universitaires de France, 1970)

* Déjà en 1625 A. Girard savait qu'un entier est décomposable en somme de deux carrés si et seulement si sa décomposition en facteurs premiers ne présente pas de puissance impaire d'un premier de la forme $4k-1$ (L'arithmétique de Simon Stevin annotée par A. Girard, Leide, page 622). Gauss a trouvé le nombre $4 \prod (\alpha_i + 1)$ de ces décompositions en partant des formes quadratiques binaires (Oeuvres posthumes, pages 269-275).

Remarque 2. Pour appliquer le théorème 1, il n'est en général pas nécessaire de faire la décomposition complète de n en facteurs premiers. On peut en effet l'énoncer autrement :

Théorème 1 bis. Pour que le cercle $X^2 + Y^2 = n$ porte des points entiers, il faut et il suffit que, débarrassé des facteurs 2 et des facteurs premiers de la forme $4K+1$, n devienne un carré parfait. Si alors l'ensemble des facteurs enlevés se présente sous la forme

$$2^{\alpha_1} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$$

le nombre de points entiers du cercle est

$$4 \prod_{i=1}^r (1 + \alpha_i)$$

Remarque 3. Le nombre u_n , déterminé pour tout $n \geq 0$, a une définition simple : c'est le nombre des décompositions de n en somme ordonnée de deux carrés de naturels. Son calcul par le théorème 1 bis est également simple, quoique éventuellement long, puisqu'il exige une décomposition partielle en facteurs premiers. Mais ce calcul s'énonce de manière assez compliquée ; on est loin des banales fonctions rationnelles, où il suffit de traiter n directement par "les quatre opérations". Le graphe cartésien de la fonction $n \mapsto u(n)$ est une suite infinie et capricieuse de points, dont la plupart sont situés sur l'axe de n . Sans être croissant, $u(n)$ prend "dans l'ensemble" des valeurs de plus en plus grandes quand n croît et, sans être périodique, il reprend une infinité de fois toute valeur qu'il a prise une fois. Insolite arithmétique !

Remarque 4. En écrivant $u_n = 4(d'_n - d''_n)$ pour $u_1, u_2, \dots, u_n$, en remarquant que $u_0 = 1$ et en ajoutant toutes ces égalités membre à membre, on retrouve sans difficulté un théorème célèbre, dû à Gauss :

Théorème 7. Le nombre de points entiers situés dans ou sur le cercle $X^2 + Y^2 = n$ est

$$V_n = 1 + 4 \left(n - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + \dots \right) \begin{cases} n \text{ naturel} \\ |a| = \text{partie entière de } a \end{cases}$$

Si dans cette expression on supprime les barres de partie entière, on obtient une approximation de V_n :

$$V_n \simeq 1 + 4n \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right) = 1 + \pi \cdot n = 1 + S_n$$

De manière évidente, la surface S_n du cercle est en effet une bonne approximation de V_n .

Les modèles logico-mathématiques dans la connaissance scientifique

par J. GADREY

Dans un texte précédent (*) j'avais indiqué, à propos du plan, comment on pouvait définir un *modèle mathématique* : à mi-chemin entre une situation ou une famille de *situations* (questions qu'on se pose à propos du réel, expériences, jeux ...) et une ou plusieurs *théories* globales, une théorie (mathématique) étant elle-même un couple (L, M) avec L langage logique et M ensemble de formules de ce langage, appelées *axiomes* de la théorie.

Mais ce texte avait pour seul objet de situer les places respectives de ces concepts à l'intérieur du *processus logique de mathématisation* (de certains aspects de la réalité). Il importe maintenant d'examiner quelle est la place de ce processus lui-même (et en particulier des modèles) dans la connaissance scientifique.

I Généralités

Ce texte est centré sur la place des *modèles* dans les sciences, mais on utilisera d'autres notions brièvement évoquées maintenant :

— La connaissance scientifique sera comprise comme le processus qui permet de saisir l'essence de l'objet d'étude (c'est-à-dire ce qui n'est pas immédiat ni apparent mais qui pourtant détermine en profondeur les manifestations phénoménales) afin d'être capable de prévoir et de maîtriser dans une certaine mesure le processus réel.

(*) Bulletin de l'APM N° 289 (juin 1973) "A propos du plan mathématique..."

— Les concepts scientifiques sont les outils fondamentaux de cette pénétration. Ils expriment les éléments principaux et les contradictions principales de cette essence. Ils sont obtenus par abstraction à partir de l'expérience, mais aussi de connaissances scientifiques antérieures. Ils sont à ce titre des produits historiques. La puissance d'une théorie se mesure au caractère pénétrant de ses concepts et non au raffinement des modèles qu'elle utilise.

Certains concepts scientifiques sont de type quantitatif : on parlera dans ce cas de *l'indicateur* d'un concept pour désigner la ou les fonctions numériques utilisées dans le repérage. C'est ainsi que les concepts de productivité, de période, de temps, de distance etc... peuvent chacun être précisés à l'aide de multiples indicateurs distincts. D'autres concepts scientifiques ne donnent pas lieu à un repérage numérique.

Enfin dans ces remarques préliminaires, il est utile de définir ce que nous entendons par connaissance concrète (ou représentation concrète) dans le travail scientifique (ou pédagogique). Spontanément, on tend à définir ce concret comme l'immédiat, le perceptible, l'apparent. La pratique pédagogique (en mathématiques tout particulièrement) et scientifique conduit vite à refuser cette réduction de la pensée concrète à la connaissance sensible primitive. L'étude même approximative des représentations mentales, des analogies, des références sous-jacentes dont procède toujours l'intuition, et souvent même la déduction mathématique (*), conduit à une notion plus riche du concret.

On peut schématiser le processus de connaissance par un double mouvement (qui sera précisé plus loin) d'abstraction (caractérisé par l'élaboration des concepts, leur mise en relation et l'étude déductive de ces relations, éventuellement à l'aide d'un modèle mathématique : c'est la recherche de l'essence du phénomène) et de "concrétisation" au sens où l'étude abstraite est mise en relation avec les phénomènes réels dans leur diversité, où la théorie abstraite "refait surface" (la connaissance selon une autre image spatiale de Noël Mouloud "s'enfonce dans le réel") et permet d'avoir prise sur le mouvement étudié. Le sujet connaissant

(*) "Mais si l'on ne fait pas indûment abstraction de la psychologie du mathématicien, on ne tarde pas à s'apercevoir qu'il y a dans l'activité mathématique plus qu'une organisation formelle de schémas et que toute idée pure est doublée d'une application psychologique, d'un exemple qui fait office de réalité". (G. BACHELARD -- Le nouvel esprit scientifique, p. 4).

parvient alors seulement à rassembler en un tout cohérent et en général vérifiable, l'étude abstraite menée à son terme et les données les plus immédiates, ce qui se voit et ce qui ne se voit pas mais qui est déterminant ; il aboutit à un *concret théorique*, ces deux termes retrouvant leur unité dans une *nouvelle perception de la réalité* : celle-ci apparaît "plus réelle que nature", plus concrète car mieux dominée dans son mouvement profond ; elle est perçue, comme on dit parfois, "dans toute son épaisseur". *Cette connaissance concrète pourra servir de support à de nouvelles abstractions d'un niveau encore supérieur.*

Par exemple : la droite réelle possède un référent réel ou graphique : le "continu géométrique", les segments, les tracés linéaires etc... A partir de divers problèmes et situations (en général déjà posés par les mathématiciens dans ce cas : infiniment petits, intersections de courbes, limites...) s'est constituée une construction abstraite de l'ensemble des nombres réels, comme classe d'équivalence de suites ou de parties de l'ensemble connu des rationnels. A son tour, cette théorie abstraite vient enrichir la représentation qu'on a de la droite réelle et de ses propriétés ; la preuve : on illustre en général sur cette droite graphique, les démonstrations théoriques concernant le corps des réels $\mathbf{R}$. Mais comme le note J. Desanti (les idéalités mathématiques p. 49-50) "l'expérience pré-mathématique du continu" n'est pas un guide essentiel pour la construction formelle de $\mathbf{R}$; elle est un support, relativement "inerte". Ceci est parfaitement exact. S'il est vrai que les notions mathématiques d'infini, par exemple, finissent par devenir familières au mathématicien, elles ne relèvent pourtant pas de l'expérience sensible primitive.

Ces développements philosophiques sur la notion de connaissance concrète ont un intérêt *pratique*. En effet, un enseignement des mathématiques confondant concret et connaissance sensible pourrait tomber dans deux types de travers opposés

1 — *le formalisme* : si la connaissance concrète n'est jamais qu'un support pré-mathématique initial, le travail du mathématicien doit consister à s'en dégager au plus vite pour accéder à la véritable théorie *en forme et à ses développements abstraits*

2 — *l'empirisme ou le pragmatisme* : pour rester en prise sur le "concret" et sur la vie, les mathématiques doivent s'écarter le moins possible de l'expérience et des événements réels (empirisme), ou au mieux de la pratique humaine (pragmatisme).

Au contraire, une conception du concret comme *produit* d'une connaissance antérieure consolidée, fondée sur le degré de *maîtrise théorique et pratique* de l'objet, laisse la porte ouverte aux dépassements et abstractions successives, aux degrés dans la connaissance, aux étapes du développement intellectuel chez l'enfant. Sans doute pourrait-on introduire à ce sujet les concepts d'assimilation, d'accommodation et d'abstraction réfléchissante de Jean Piaget pour obtenir une autre approche de la notion de pensée concrète.

Note : Piaget n'utilise pas le terme de concret (lorsqu'il parle d'"opérations concrètes" ou de "pensée concrète") dans le sens défini précédemment, mais plutôt dans l'optique baptisée "pragmatique" ; toutefois sa profonde connaissance "concrète" des opérations de la pensée chez l'enfant le met à l'abri des deux formes de schématisation signalées précédemment.

II Positivismisme et néo-positivismisme

Revenons aux modèles. Dans tout ce qui suit, le terme de modèle sera exclusivement réservé aux modèles *logico-mathématiques* à savoir : ensemble d'hypothèses, lois ou relations supposées caractéristiques d'une situation étudiée, et traduites dans les termes formels d'une ou plusieurs théories mathématiques (car certains modèles peuvent faire appel à la fois à la théorie des espaces vectoriels et à celle des probabilités etc...).

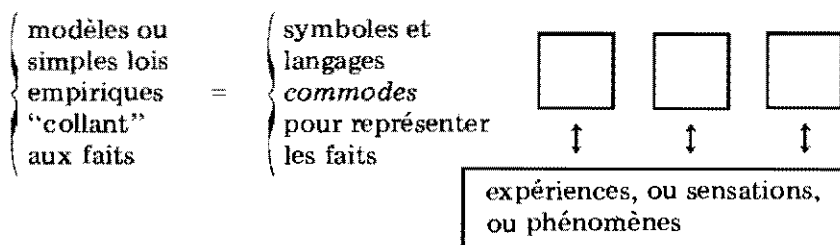
Ceci posé, on constate, chez les scientifiques eux-mêmes, une grande diversité dans l'appréciation de la place des modèles dans la connaissance. Néanmoins, deux courants peuvent être distingués, qui renvoient finalement à deux "écoles" bien connues de la "philosophie des sciences".

1) *La conception empiriste ou positiviste* : pour elle, le travail du scientifique consiste à faire des expériences et à traduire les résultats à l'aide d'une loi ou d'un ensemble de lois qu'on peut baptiser provisoirement "modèle prescriptif". Pour le positivisme première manière, lois et théories étaient supposées absolues, définitives : la science consistait à découvrir ces "lois de la nature". Par la suite, les héritiers du positivisme ont été contraints d'admettre que les lois puissent être remplacées par d'autres, et qu'un modèle pourrait être choisi, en fonction de son caractère plus ou moins "commode", parmi d'autres possibles.

Dans tous les cas, ce qui est déterminant dans la connaissance c'est la "pression" des choses, c'est l'expérience sensible, c'est le phénomène perçu. La théorie n'a guère plus de pouvoir que le stylo qui enregistre les résultats.

Ces conceptions étaient fréquentes dans les sciences "en voie de développement" à forte dominante empirique. Le positivisme généralise abusivement ce qui peut être une nécessité provisoire pour telle discipline encore dépourvue de totalisation théorique satisfaisante. Il a d'ailleurs eu des aspects "positifs", ne serait-ce que son intransigeance à exiger la sanction des faits et son refus des interprétations métaphysiques ou des hypothèses gratuites.

Pour lui, le schéma de la connaissance serait du type suivant :



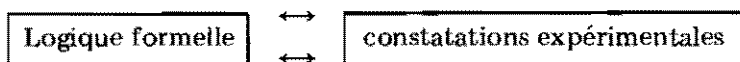
2) *Le néo-positivisme ou positivisme logique*, qui a pris le relais du positivisme classique, distingue deux sortes d'énoncés scientifiques et deux seulement :

- a) les simples comptes rendus ou résultats bruts d'expérience, les constatations empiriques ;
- b) les lois de la logique formelle, seules lois de la pensée pure.

La méthode scientifique consiste à combiner les propositions obtenues aux a) à l'aide des règles de b).

On aboutit à une surestimation du rôle de la logique et des mathématiques "pures" dans le travail scientifique : seul ce qui se formalise accède au statut de vérité, *le reste n'a pas de sens* ou bien est du domaine de la simple constatation.

On obtient un schéma tel que :



Du point de vue philosophique, on peut se demander d'où viennent ces "lois de la pensée pure" et comment il se fait qu'elles s'appliquent avec succès au réel ; comment s'effectue la liaison entre les deux niveaux ? Le recours à un "sujet transcendantal" ou à l'un de ses substituts ne s'impose-t-il pas ?

Jean Piaget s'est employé à réfuter le néopositivisme et la prétention de ce dernier à identifier les lois de la pensée et celles de la logique formelle, et donc à soumettre la psychologie à la logique. Ce conflit semble aujourd'hui dépassé, ne serait-ce que par le fait des progrès de la psychologie.

Des exemples :

- qu'on ait pu entendre aussi souvent que la géométrie "intuitive" du temps passé n'était *pas scientifique* et que seule la géométrie entièrement axiomatisée était correcte, indique une conception idéaliste de la perfection scientifique, identifiée aux raisonnements de la logique formelle ; en réalité il s'agit de deux niveaux distincts et complémentaires dans l'approche scientifique de la réalité ;
- le terme même de mathématique *pure* ;
- les idées fréquentes (en particulier dans les sciences humaines et économiques) pour lesquelles on n'atteint la rigueur que dans les études formalisées, les autres étant condamnées aux aléas d'un "qualitatif" grossier et pré-scientifique ;
- l'abandon des recherches théoriques les plus profondes pour des développements mathématiques raffinés mais superficiels, c'est-à-dire l'abandon du concept pour le modèle.

Le néo-positivisme prolonge comme on le voit la tradition empiriste, en lui ajoutant une dose de logique formelle. Il faut dire que de grands logiciens sont à l'origine de ce courant : ceux du "Cercle de Vienne" (Carnap, Reichenbach, Wittgenstein), et de l'école anglo-saxonne (B. Russell, Ayer, Morris).

Bien que J. Piaget soit très éloigné de ce schématisme et qu'il l'ait combattu, ne peut-on déceler des traces de logicisme dans son insistance à voir dans la pensée formelle l'aboutissement, la forme d'équilibre supérieur de l'intelligence ? Ce formalisme beaucoup plus subtil qui consiste à faire de la logique mathématique non pas

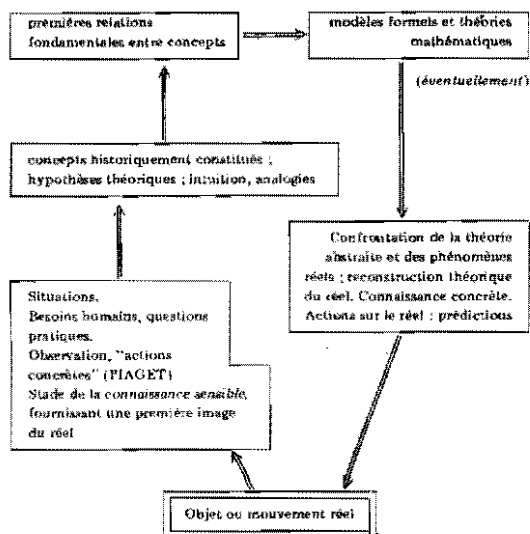
la seule forme de pensée scientifique, mais la forme supérieure n'est-elle pas une des caractéristiques du structuralisme ? Ces questions seront (seulement) évoquées plus loin.

Il reste que la théorie opératoire de la connaissance de J. Piaget, qui se place du point de vue génétique, apporte des indications importantes et des réfutations pertinentes du dualisme sommaire des néo-positivistes. Pour J. Piaget, les structures mentales du sujet ("les lois de la pensée") ne sont pas innées ; elles se développent par étapes, sous l'effet d'un double mouvement *d'assimilation* des données aux structures déjà formées et *d'accommodation* graduelle des structures mentales aux déséquilibres provoqués par le monde extérieur et, plus exactement, en ce qui concerne la pensée formelle, par les *actions* du sujet sur ce monde.

Ce que traite en priorité J. Piaget, c'est la façon dont la connaissance évolue *chez l'enfant*. Cette analyse est précieuse pour la théorie de la connaissance, mais on ne peut évidemment pas la transposer à l'étude du développement et des étapes *d'une science donnée*.

III Les étapes dans le processus de connaissance scientifique

Nous utiliserons le schéma ci-dessous pour illustrer nos remarques.



1) *Première remarque* : la construction *éventuelle* d'un modèle pour *traiter* les relations entre certains concepts ou groupes de concepts, ou l'utilisation de *lois* exprimées en termes mathématiques, ne sont jamais que *des moments du travail théorique* ; s'il faut mettre une étape en valeur dans la théorisation, c'est incontestablement celle de la recherche et de la mise en place des concepts fondamentaux, même si, dans les sciences les plus formalisées, la théorie mathématique exerce en retour une influence de plus en plus grande dans l'élaboration conceptuelle (justement parce qu'elle n'est pas coupée des autres étapes).

Insistons : Les modèles logico-mathématiques ne sont pas (sauf si on fait des mathématiques) l'objectif ultime du travail scientifique ni ce qui assurerait sa validité.

2) Le rôle du modèle est :

— d'assurer la puissance déductive de la théorie en voie de constitution et de faire fonctionner de façon féconde les relations retenues ou supposées.

— d'agir en retour sur les hypothèses, relations et concepts.

Comme on l'a vu à propos du "plan mathématique", le travail mathématique reste, à son niveau, en relation permanente (représentations et images mentales, analogies, utilisation d'exemples et de dessins, etc...) avec les autres niveaux, de la connaissance sensible à la connaissance concrète antérieurement consolidée.

3) Il est utile de distinguer modèle et loi d'origine empirique. Le modèle *fonctionne* à partir d'*hypothèses* reliant *des concepts* ou leurs indicateurs, en vue d'obtenir des relations nouvelles. C'est très différent du simple *ajustement* (*sans hypothèse* théorique) de résultats à l'aide d'une fonction mathématique.

Les positivistes les plus intransigeants devraient donc refuser l'idée même d'un modèle opératoire, compte tenu du mot d'ordre "pas d'hypothèses : des faits". On ne rencontre plus cette espèce chez les scientifiques aujourd'hui. Sous la pression des faits justement, le positivisme classique a dû céder le terrain au néopositivisme.

4) Comme on le voyait clairement avec les divers modèles axiomatiques du plan (modèle affine, projectif, vectoriel...) le rapport du modèle au réel n'est pas un couplage du type : un modèle pour un type d'objet réel ou un type de phénomènes réels. *Le modèle*, même si on fait abstraction des autres étapes du travail

scientifique *est relatif à une problématique, à une famille de questions* qu'on est amené à se poser à partir des phénomènes. Les mêmes phénomènes peuvent donner naissance à de multiples modèles

— soit parce qu'on améliore la modélisation, pour une même famille de questions, en ajoutant d'autres facteurs explicatifs, d'autres variables,

— soit parce qu'on étudie d'autres problèmes concernant les mêmes phénomènes.

Des modèles construits à partir d'axiomes différents peuvent être isomorphes (exemple des multiples axiomatiques du plan affine).

5) Le concept de modèle et celui de théorie mathématique sont de même nature. En général le premier est utilisé dans un sens plus local et le second dans un sens plus global. Mais dans les deux cas, il s'agit d'une construction formelle (c'est-à-dire suivant les règles d'un langage logique) à partir de propositions de bases ou *axiomes*. Il résulte de tout ce qui précède une distinction radicale entre *théorie (ou modèle) mathématique et travail théorique ou scientifique en général*, à savoir tout ce qui, dans le processus de connaissance, dépasse le stade de la connaissance sensible et des observations fortuites. Pour nous, l'expérimentation relève incontestablement du travail théorique dans la mesure où elle est précédée d'un *projet* lui-même guidé par la théorie en gestation.

Une distinction essentielle entre les concepts mathématiques mis en oeuvre dans les modèles et les autres concepts scientifiques est la suivante : alors que les premiers sont complètement *connus* par leur définition axiomatique (leurs rapports avec les autres concepts du même ordre sont déterminés "juridiquement" et "impérativement"), les seconds ne sont jamais épuisés par leur définition, celle-ci n'est jamais qu'un mouvement d'approche, destiné à être complété par tout un contenu empirique, de multiples indicateurs, des relations type formel ou non, des précisions sur les limites de validité de ce concept, etc...

6) Même lorsqu'ils sont très utiles dans une étude scientifique, les modèles (comme les structures mathématiques) ont une limite d'utilisation ; ils sont souvent bien adaptés à l'étude d'un phénomène à partir de relations stables, c'est-à-dire aux études "statiques" (étude d'un stade d'équilibre donné du développement par exemple) ou aux mouvements se déroulant suivant des lois

mathématiques connues. Mais ils sont en général impropres à traduire les changements les plus profonds, c'est-à-dire ceux qui nécessitent justement qu'on change de modèle, de relation, de concept ou de cadre théorique. Ils sont impuissants à expliquer pourquoi une relation devient caduque, pourquoi un équilibre se rompt et devient un autre, un facteur secondaire devient déterminant : ils n'expriment pas l'ensemble de cette *dialectique*, ils ne peuvent en saisir que des moments ou des aspects. Cela suffit à les rendre indispensables.

La démonstration automatique de théorèmes :

des méthodes et des résultats qui concernent l'enseignement des mathématiques

*par M. VIVET, Centre Universitaire du Mans
et J.P. LAURENT, Université de Caen.*

Ce papier concerne certains aspects de la démonstration automatique dans des domaines proches des mathématiques enseignées au niveau du premier cycle des universités. Une première partie insiste sur le besoin de trouver une bonne représentation du problème que l'on veut résoudre. La partie suivante montre que le cadre des systèmes logiques est généralement bien adapté et que la notion de graphe structurant un espace de recherche, notion effectivement utilisée en démonstration automatique, pourrait l'être aussi avec profit dans l'enseignement des mathématiques. La dernière partie fait le bilan des résultats et des techniques utilisées dans certains programmes. C'est une façon d'éclairer avec plus de précision ce qui précède. Globalement, le papier met l'accent sur deux types de tâches rencontrées en mathématiques : tâches de nature algorithmique et tâches de nature heuristique.

1. INTRODUCTION

Seul l'aspect pédagogique de la démonstration automatique est abordé ici. On ne parlera pas du tout de l'importance de la démonstration de théorèmes en intelligence artificielle dans des secteurs aussi variés que la conception de robots, l'analyse de

langues naturelles ou l'écriture automatique de programmes. Disons cependant que la démonstration automatique est un domaine de recherche appelé à jouer dans l'avenir un rôle fondamental dans l'utilisation des ordinateurs.

La résolution (méthode de J.A. Robinson) [13] ne sera pas évoquée ici. Cette méthode, quoique effectivement utilisée en démonstration automatique, est assez éloignée de notre façon de travailler et semble peu utilisable du point de vue pédagogique (Elle pourrait cependant être présentée dans le cadre d'une initiation à la logique). Nous nous intéressons surtout à un certain nombre de travaux dont le support de recherche a été choisi dans un domaine proche des mathématiques enseignées. Il était intéressant de faire le bilan de ces recherches de façon à se rendre compte globalement des résultats obtenus et à voir en quoi ce type de recherche peut contribuer à améliorer la manière d'enseigner les mathématiques.

2. PROBLEMES DES REPRESENTATIONS

Un premier choix important doit être opéré dès que l'on se propose de résoudre un problème : Comment le représenter ? Comment le formaliser ?

Généralement, une représentation est bonne si elle permet une manipulation souple, pratique, efficace des objets. Il faut qu'elle puisse permettre une perception maximum des choses essentielles. Le choix de la représentation est toujours fondamental et conditionne beaucoup la qualité (et souvent l'obtention) du résultat. La difficulté est que souvent nous n'avons une vision claire du problème qu'après l'avoir résolu. Ces idées sont très générales et, que ce soit l'ordinateur ou l'homme qui doive traiter le problème, il faut soigneusement choisir la représentation sur laquelle on va travailler. Pour certains objets, nous avons des représentations usuelles reconnues unanimement comme bonnes dans la plupart des cas. Par exemple, dans les calculs, les naturels sont toujours représentés relativement à une base donnée (la représentation par les chiffres romains est toujours écartée). Le choix de la base reste lui-même important. Les polynômes sont généralement ordonnés par puissances croissantes ou décroissantes de façon à avoir une représentation qui parle à l'esprit, qui nous permet une perception immédiate des faits importants (accès au degré par exemple). En géométrie, c'est pour avoir une perception globale

que l'on fait une figure ni trop grande ni trop petite et que l'on s'efforce de ne pas fabriquer un cas particulier. On peut aussi choisir de représenter le problème pour le traiter avec la géométrie analytique ou la géométrie descriptive. Il semble important que l'enseignant insiste sur ce problème des représentations en montrant qu'il ne s'agit pas seulement d'une convention pratique mais aussi d'une approche du problème fondamentale pour la suite. C'est peut-être une bonne façon d'amorcer la recherche de la solution et d'accélérer le processus qui fait que tout d'un coup un problème sort de son énoncé et devient clair.

Ce passage de la représentation du problème tel qu'il est posé à la représentation du problème sur laquelle on va travailler est très important. Faire prendre conscience de ce phénomène, habituer les élèves à travailler sur la représentation du problème avant d'aborder le problème lui-même, peut éviter de les voir s'embarquer dans la recherche de solutions à des problèmes mal posés pour lesquels une mauvaise représentation cache la voie du succès.

3. SYSTEMES LOGIQUES

Dans un certain nombre de cas, les problèmes sont représentés dans le modèle offert par les systèmes logiques. Nous disposons d'un jeu d'axiomes (énoncés vrais à priori) et de règles d'inférences qui nous permettent de déduire des énoncés vrais (théorèmes) à partir d'autres énoncés vrais.

Démontrer le théorème, c'est tracer le chemin logique qui part des énoncés vrais donnés au départ et aboutit à la conclusion en utilisant les règles d'inférence. Il peut être pratique pour schématiser l'obtention de la preuve d'utiliser une représentation par un graphe de l'espace de recherche. C'est une technique courante en démonstration automatique et qui peut être d'un grand intérêt didactique.

Exemple : Problème des groupes de Dickson.
Soit E un ensemble muni d'une opération $\cdot$ associative.

Sachant que

$$\exists e \in E \quad \forall x \quad e \cdot x = x \quad (2)$$

et que

$$\forall x \in E \quad \exists \bar{x} \quad \bar{x} \cdot x = e \quad (3)$$

montrer que

$$\forall x \quad x \cdot e = x \quad \text{et} \quad x \cdot \bar{x} = e$$

On peut faire apparaître la solution à l'aide du graphe suivant :

$$\begin{array}{c}
 x \cdot y = x \cdot z \\
 \downarrow \\
 \bar{x} \cdot (x \cdot y) = \bar{x} \cdot (x \cdot z) \\
 \downarrow \textcircled{1} \\
 (\bar{x} \cdot x) \cdot y = (\bar{x} \cdot x) \cdot z \\
 \downarrow \textcircled{3} \\
 e \cdot y = e \cdot z \\
 \downarrow \textcircled{2} \\
 y = z
 \end{array}$$

Fig. 1 : preuve du lemme L

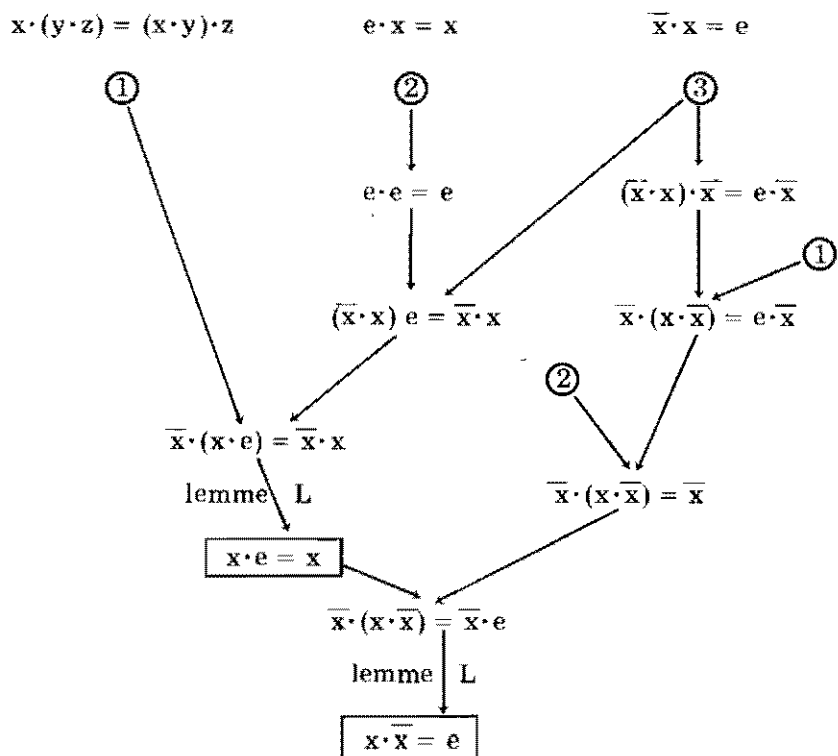


Fig. 2 : graphe montrant la preuve

On obtient ainsi un schéma qui parle à l'esprit, qui met en évidence les justifications de chaque résultat intermédiaire. La rédaction de certaines solutions sous cette forme est peut-être une façon de contraindre les élèves à justifier tout ce qu'ils écrivent. Une démonstration ainsi rédigée ne contient aucune littérature inutile (et se corrige très facilement). Elle ne contient que l'essentiel. A ce point, deux remarques s'imposent :

1. Le graphe peut devenir très grand. S'il n'est plus représentable sur le papier, la méthode est impraticable : les exercices à poser dans cet esprit doivent être bien choisis. Si l'on s'en tient à combiner sans discernement les énoncés vrais, il est fréquent, même avec des problèmes très simples, d'atteindre la limite de la capacité mémoire des ordinateurs.

2. Il y a manifestement deux types de tâches à effectuer :

α) Des manipulations : travaux de nature mécanique, algorithmique (par exemple : exécution de substitutions de termes à d'autres. On consultera avec intérêt l'algorithme d'unification [12] qui permet d'exécuter ce travail).

β) Des décisions : travaux plus subtils de nature heuristique (par exemple : choix des objets à manipuler, choix de la manipulation à effectuer, choix de l'endroit où l'on manipule dans l'objet...). Il est évident qu'à ces deux types d'activités très différentes doivent correspondre des méthodes pédagogiques différentes.

Tout ce qui est manipulation, mécanisme, doit être assimilé rapidement mais de façon définitive et parfaite (Pour l'informaticien, cela se traduit par des sous-programmes généraux qui doivent travailler vite et sans défaillance. Pour l'élève, c'est l'acquisition des mécanismes de calcul algébrique par exemple). En aucun cas cette partie ne doit être négligée.

Pour ce qui est de la partie heuristique, elle est beaucoup plus délicate à mettre en place en machine (ou à faire acquérir aux élèves). Les choix sont souvent nécessaires pour limiter l'espace et le temps de travail. Une méthode combinatoire qui essaierait toutes les combinaisons possibles d'axiomes et d'hypothèses pourrait être tentée. Elle n'est que très rarement possible, le graphe devenant trop volumineux (génération massive de noeuds n'apportant rien à la solution). Nous devons utiliser des heuristiques qui permettent d'éliminer des noeuds non prometteurs de succès. Toute la difficulté consiste à trouver des heuristiques assez

finies pour couper le maximum de noeuds inutiles tout en gardant tous ceux qui sont nécessaires à l'obtention du résultat. Les heuristiques servent également au niveau des choix des objets, des choix des opérateurs à appliquer à ces objets, etc... Une heuristique est bonne si d'une façon générale son utilisation fait progresser correctement le problème. Sa justification est d'ordre purement statistique.

Exemples

— heuristique générale souvent bonne en manipulation formelle : "Si une formule devient vraiment trop longue, essayer une autre voie"

— en calcul intégral : "Pour intégrer un produit, essayer l'intégration par parties"

— la complexité d'une formule est fonction croissante du nombre de connectives qui y figurent.

Le chercheur en démonstration automatique est amené à effectuer une formalisation des heuristiques afin de mieux comprendre comment on résout des problèmes. L'introspection ainsi réalisée doit permettre un meilleur enseignement : "les recettes" ne doivent pas être miraculeusement "bombardées" aux élèves mais justifiées statistiquement, puisque leur valeur dépend directement de la généralité et de la fréquence des succès qu'elles procurent.

4. BILAN DES RESULTATS ET DES TECHNIQUES DANS DES DOMAINES PROCHES DE L'ENSEIGNEMENT

4.1. *Intégration*

4.1.1. SAINT : (SLAGLE) 1961 [17]

Ce programme permet l'intégration formelle de fonctions usuelles (non compris les fractions rationnelles). Il permet de calculer des intégrales multiples lorsqu'il s'agit d'une extension triviale de l'intégrale simple. Le programme a effectivement calculé 86 primitives (moyenne : 2,4 minutes sur IBM 7090).

Exemples :

$$\int \frac{x^4}{(1-x^2)^{5/2}} dx \quad ; \quad \int (\sin x + \cos x)^2 dx$$

Il utilise trois modes de travail :

a) formes standards (20) permettant le calcul immédiat.

(exemple : $\int c^v dv = c^v / \text{Log } c$).

b) transformations algorithmiques : celles que l'on doit faire systématiquement lorsqu'elles sont possibles.

(exemple : $\int c f(x)dx = c \int f(x)dx$)

c) transformations heuristiques : transformations qui peuvent être ou ne pas être judicieuses.

Exemple : heuristique utilisée pour poser des changements de variable :

“Soit $g(v)$ une intégrande. Pour toute sous-expression $S(v)$ non constante, non linéaire, ayant sa première connective différente de $-$, qui n'est pas un produit avec un facteur constant et telle que le nombre de facteurs non constants de $g(v)/S'(v)$ est inférieur au nombre de facteurs de $g(v)$, essayer le changement de variable $U = S(v)$ ”. Cette heuristique permet de poser $U = x^2$ dans

$\int x e^{x^2} dx$ (elle permet d'ailleurs également de poser $U = e^{x^2}$).

Le programme gère une arborescence ET — OU de buts. Cette arborescence est remise à jour dès qu'un résultat est obtenu afin de voir si ce dernier résultat achève la preuve. Une fonction permet la détection des noeuds les plus prometteurs.

4.1.2. SIN (Moses) 1971 [9] (Symbolic INtegrator)

Le programme travaille suivant trois modes de difficulté croissante.

α) Il cherche à voir si l'intégrande peut se mettre sous la forme

$$\int c \cdot \text{op}(u(x)) \cdot u'(x) dx$$

(c constante, op : fonction simple).

Pour un certain nombre de op , une table donne le résultat. A ce niveau, deux règles sont utilisées :

$$\int (A(x) + B(x)) dx = \int A(x) dx + \int B(x) dx$$

Développement des intégrandes à l'aide du binôme de Newton quand c'est possible.

β) Il permet d'utiliser 11 méthodes (choisies en fonction de l'apparition de connectives données dans l'intégrande). Ces méthodes permettent de faire subir des transformations à l'intégrande. Le problème transformé est alors renvoyé au mode α). Ici, une partie importante concerne l'intégration des fractions rationnelles.

γ) Ce mode concerne essentiellement la manipulation de l'intégration par parties et d'une heuristique issue de travaux de Liouville.

4.1.3. WANDERER (P.S. WANG) 1974 [20]

WANDERER est une partie du système MACSYMA conçu pour la manipulation symbolique. Il dispose ainsi de toutes les facilités offertes par le reste du système (en particulier manipulation des fractions rationnelles, résolution d'équations, factorisation d'expressions, différenciation, calcul de limites et programme d'intégration indéfinie). Aidé de cet important outillage de base, WANG a écrit un programme qui utilise des méthodes reliées directement à la théorie des résidus et à l'intégration sur des contours. Le contour est obtenu par examen de l'intégrande et des bornes d'intégration. Actuellement, WANG s'est intéressé à l'intégration de fractions rationnelles, de fonctions où interviennent certains types d'éléments irrationnels ($\sqrt{x^2 - a^2}$, x^k , ...) des lignes trigonométriques ou des logarithmes, exponentielles.

Exemples (entre crochets, temps de calcul sur PDP 10 - LISP) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + Ax + B}{x^4 + 10x^2 + 9} dx = \frac{\pi B + 3\pi}{12} \quad [1978 \text{ ms}]$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 + Ax + B}{x^4 + 10x^2 + 9} dx = \frac{\pi B + 3\text{Log}(3) + 3\pi}{24} \quad [3582 \text{ ms}]$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \pi \quad [499 \text{ ms}]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx = \pi / e \quad [2635 \text{ ms}]$$

$$\int_0^{\infty} \frac{(\text{Log}(x))^2}{x^2 + 1} dx = \pi^3 / 8 \quad [1013 \text{ ms}]$$

L'obtention des pôles et le calcul des résidus se font à l'aide de l'outillage fourni par MACSYMA. Le choix du contour est de nature essentiellement heuristique.

4.2. Calcul de limites DALI (LAURENT) 1972 [7-8]

Le programme permet de déterminer la limite de fonctions numériques lorsque $x \rightarrow \alpha$.

Le programme manipule les développements limités et permet de lever les indéterminations. Le programme est composé de deux parties essentielles : l'une (POLLIM) essaie de trouver algorithmiquement la limite de l'expression qu'on lui fournit. L'autre (TRANSS) choisit heuristiquement des transformations sur l'expression ayant amené un échec de POLLIM. Ces deux parties conversent entre elles à l'aide d'un vecteur de renseignements (résultat d'une analyse de l'échec). Les transformations à faire subir à l'expression pour lever l'indétermination sont choisies à l'aide d'une évaluation calculée au moyen d'une matrice d'intérêt qui relie les propriétés des groupes de règles applicables et les propriétés de l'expression transmises par le vecteur de renseignements. Le programme a déterminé une centaine de limites choisies dans les manuels de mathématiques supérieures, proposées à l'oral des concours d'entrée aux grandes écoles.

Exemples :

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x - \pi/4}} = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} \sqrt{1+x^2}} = 1 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} e^{\sqrt{1+x^2}} = 1 \dots$$

4.3. *Arithmétique*. DALLARD (1974) [3]

Le programme reçoit en données des règles simplificatrices, des règles productrices et des axiomes. On lui fournit alors la conjecture à établir. La négation est rangée avec les axiomes. Le programme cherche en effet systématiquement à établir une preuve par l'absurde. Le but visé est, par implications successives, la génération d'un théorème qui, toutes simplifications faites, soit la constante FAUX (sans utiliser du tout le formalisme de la résolution, c'est la même idée).

Le programme travaille en trois phases :

1°) Dans la première, on essaie d'appliquer à tous les théorèmes toutes les règles de simplification qu'il est licite d'appliquer. C'est dans cette phase qu'on espère voir arriver la constante FAUX achevant la démonstration.

2°) Dans la deuxième phase, le programme tire parti des axiomes et théorèmes qu'il vient de simplifier et en déduit de nouvelles règles de réécritures simplifiantes ou productrices.

Par exemple :

— le théorème T peut donner naissance aux règles

$T : = \text{VRAI}$

$\text{NON } T : = \text{FAUX}$

— le théorème $A = B$ peut donner naissance aux règles

$A : = B \quad \text{et} \quad B : = A$

— le théorème $\forall x, y \quad P(x, y) \text{ ou } Q(x, y)$ donnerait les règles

$\text{NON } P(x, y) : = Q(x, y)$

$\text{NON } Q(x, y) : = P(x, y)$

3^e) Dans la troisième phase, le programme utilisant des couples (théorèmes, réécriture productrice) non encore utilisés fabrique de nouveaux théorèmes. Le contrôle repasse alors à la première phase (c'est dans cette dernière phase que le programme, s'il ne peut fabriquer de nouveaux théorèmes, s'avouera vaincu).

Ce programme amène des idées intéressantes concernant la manipulation des quantificateurs et la façon d'écarter les problèmes liés à la présence d'opérations associatives et commutatives. Il a pu résoudre une cinquantaine de problèmes du niveau Terminale C.

Exemples :

- l'équation $x^2 + y^2 = z^2 + 1$ a des solutions avec $x \neq 1$ et $y \neq 1$
- $x^2 + 8z = 3 + 2y^2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$
- il existe une progression arithmétique de raison non nulle ne contenant aucun nombre triangulaire
- preuve par récurrence de 3^n divise $2^{(3^n)} + 1$
- si dans une division le quotient n'est pas nul, le dividende est supérieur au double du reste
- si a et b sont premiers entre eux, $a^2 \neq 2b^2$
- il existe des nombres premiers qui sont somme et différence de nombres premiers
- $3^{2^{n+1}} + 2^{n+2}$ est divisible par 7, quel que soit n

4.4. Géométrie. GELERNTER (1959) [4-5]

Le programme écrit par Gelernter a résolu une cinquantaine de problèmes de géométrie plane. L'essentiel du matériel heuristique est obtenu en accompagnant les énoncés d'une figure (représentée sous forme analytique : chaque point étant donné par

son couple de coordonnées, des sous-programmes permettent de tester si deux segments sont égaux, parallèles, etc...). Cette figure n'est utilisée qu'en observation, les sous-programmes jouent le même rôle de reconnaissance que l'oeil. La preuve s'établit de façon formelle sur les énoncés. L'heuristique de base pour empêcher la prolifération d'énoncés stériles est la suivante : "Toutes les formules et buts intermédiaires qui sont engendrés à une étape donnée de la recherche de la preuve sont interprétés dans la figure. Si cette interprétation est valide dans la figure, alors l'objet généré est accepté comme étape possible de la preuve. Sinon il est rejeté". La figure joue ainsi le rôle d'un modèle sémantique permettant l'évaluation des énoncés formels.

Exemple de problème effectivement résolu :

Si dans un trapèze, on joint les milieux des diagonales, la droite obtenue coupe les côtés non parallèles du trapèze en leur milieu.

4.5. Dans des domaines encore proches des mathématiques enseignées, citons les travaux de Bledsoe [2] sur l'établissement des théorèmes sur les limites de fonctions numériques ; exemple :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

Dans ses travaux Bledsoe utilise une heuristique qui est une mise en oeuvre du principe général suivant : "Pour établir une conclusion C de plusieurs hypothèses parmi lesquelles figure H, forcer H à contribuer au maximum à l'établissement de C et laisser un "reste" à établir à l'aide des seules autres hypothèses".

Les travaux de Madame GRANDBASTIEN [6] sur la résolution d'équations trigonométriques, de VIVET [19] sur la vérification d'identités à l'aide du raisonnement par récurrence, de SLAGLE [18] sur la manipulation d'inégalités, peuvent également être observés sous cet aspect pédagogique. Dans le domaine de la logique, les travaux de NEWELL [10] sont parmi les premiers en démonstration automatique et contiennent maintes idées reprises depuis. Ceux de PITRAT [12] ont montré l'intérêt de travailler au niveau des méta-théorèmes et méta-méta-théorèmes pour établir les théorèmes intéressants d'une théorie donnée par ses axiomes. L'heuristique de base est ici que "un théorème est intéressant s'il amène des théorèmes intéressants". Cette heuristique sert à gérer l'espace des théorèmes générés, en particulier à rejeter tous ceux qui ne présentent pas un intérêt suffisant.

Citons encore un travail original par la méthode qu'il utilise (en résolution de problèmes pour des robots) : SIKLOSSY [15-16] a écrit un système de deux programmes : l'un qui cherche à résoudre le problème posé, l'autre qui cherche à établir que le problème est impossible lorsque le premier a échoué. Ces deux programmes travaillent alternativement en s'échangeant un certain nombre d'informations sur la nature de l'échec.

CONCLUSION

La présentation de ces différents résultats avec une arrière-pensée didactique montre l'intérêt de la démonstration automatique et montre comment les recherches dans ce domaine peuvent apporter quelque chose à l'enseignement des mathématiques. L'introspection nécessaire pour dégager des heuristiques et formaliser des méthodes de travail amène une réflexion profonde sur la nature même de l'activité mathématique, et ne peut être que bénéfique à l'enseignement correspondant. Il semble en effet clair que si nous parvenons à faire en sorte que les machines fassent des mathématiques correctement, cela signifie que nous connaissons bien et maîtrisons bien un certain nombre de concepts réputés abusivement intuitifs. Les résultats déjà obtenus sont très encourageants.

REFERENCES

- [1] ARNOLD, A. "Les mathématiques à la portée de l'ordinateur", Dunod éd., Paris (1970).
- [2] BLEDSON, W.W., BOYER, R.S., HENNEMAN, W.H. "Computer proofs of limit theorems", Second International Joint Conference on Artificial Intelligence, London, 1971.
- [3] DALLARD, R. "Présentation d'un programme de démonstration de théorèmes d'arithmétique", thèse de troisième cycle, Paris VI, avril 1974.
- [4] GELERTER, H. "Realization of a geometry-theorem proving machine", Computers and thought, (1963), p. 134-152.
- [5] GELERTER, H., HANSEN, J.R., LOVELAND, D.W. "Empirical explorations of the geometry-theorem proving machine", Computers and thought— Mac Graw Hill book company (1963), p. 153-163.

- [6] GRANDBASTIEN, M. "Un programme qui résout formellement des équations trigonométriques par des procédés heuristiques", thèse troisième cycle, Paris VI, juin 1974.
- [7] LAURENT, J.P. "Un programme qui calcule des limites en levant les indéterminations par des procédés heuristiques", thèse troisième cycle, Paris VI, juin 1972.
- [8] LAURENT, J.P. "A program that computes limits using heuristics to evaluate the indeterminate forms", *Artificial Intelligence Journal*, Vol. 4, N° 2, (1973).
- [9] MOSES, J. "Symbolic Integration : the stormy decade" *C. ACM*, August 1971, Vol. 14, N° 8, p. 548-560.
- [10] NEWELL, A., SHAW, J.C., SIMON, H.A. "Empirical explorations with the logic theory machine : a case study in heuristics", *Computers and thought*, (1963), p. 109-133.
- [11] NILSSON, N.J. "Artificial Intelligence", IFIP (Août 1974) Stockholm, p. 778-801.
- [12] PITRAT, J. "Un programme de démonstration de théorèmes" — Monographie d'informatique AFCET — Dunod (1970).
- [13] ROBINSON, J.A. "A machine oriented logic based on the resolution principle", *J. ACM*, Vol. 12, January 1965, p. 23-41.
- [14] SANDEWALL, E.J. "Heuristic search : concepts and methods", *Artificial Intelligence and heuristic programming*, University Press Edinburgh, 1971, p. 82-100.
- [15] SIKLOSSY, L., ROACH, J. "Proving the impossible is impossible is possible : disproofs based on hereditary partitions", Third International joint conference on artificial Intelligence, Palo Alto, California, 1973.
- [16] SIKLOSSY, L., ROACH, J. "Collaborative problem solving between optimistic and pessimistic problem-solvers", IFIP, Stockholm, (Août 1974), p. 814-817.
- [17] SLAGLE, J.R. "A heuristic program that solves symbolic integration problems in Freshman calculus", *Computers and thought*, (1963), p. 191-203.
- [18] SLAGLE, J.R., NORTON, L.M. "Experiments with an automatic theorem prover having partial ordering Inference Rules", *C. ACM*, Vol. 16, N° 11, (novembre 1973).

- [19] VIVET, M. "Un programme qui vérifie des identités à l'aide du raisonnement par récurrence", thèse troisième cycle, Paris VI, novembre 1973.
- [20] WANG, P.S. "Symbolic evaluation of definite integrals by residue theory in MACSYMA", IFIP (Août 1974), Stockholm, p. 823-827.

COMMUNIQUE

Congrès International de Karlsruhe sur l'enseignement des Mathématiques 16 - 21 Août 1976

Les membres de l'A.P.M.E.P. qui souhaiteraient participer à ce congrès doivent s'inscrire à l'adresse suivante :

Troisième congrès international sur l'éducation mathématique
Université D 75
KARLSRUHE
République Fédérale Allemande

La sous-commission française de la Commission Internationale pour l'Enseignement des Mathématiques a obtenu une subvention qui lui permettra de prendre à sa charge les frais de déplacement d'un certain nombre de participants. Les demandes de subvention précisant l'adresse et les fonctions du demandeur doivent être adressées avant le **1er Avril 1976** à la sous-commission, Institut Henri Poincaré, 11 rue Pierre et Marie Curie, 75005 PARIS.

ECHANGES : les catégories

A PROPOS DES CATEGORIES

Le Bulletin n° 297 contient un article de Jacqueline FOURASTIE intitulé : "Dans dix ans, la théorie des catégories remplacera-t-elle celle des ensembles ?".

Avec un retard dont la Rédaction s'excuse, voici d'abord deux articles écrits tout de suite après cette parution, et ensuite une réponse de Jacqueline Fourastié.

1 - Réponse à l'article de Jacqueline Fourastié

par Bernard CHARLES, Université des Sciences et Techniques de Montpellier

J'ai lu avec beaucoup d'intérêt l'article de Jacqueline Fourastié sur la théorie des catégories car je suis de ceux qui pensent qu'on ne peut plus enseigner les mathématiques sans tenir compte de l'apport de cette théorie.

L'étude des objets mathématiques a conduit à les classer suivant leur structure : ensembles, groupes, anneaux, corps, espaces vectoriels, etc... On conçoit difficilement aujourd'hui d'étudier des groupes particuliers sans introduire assez vite la structure générale de groupe et on ne peut plus dire que cette structure soit ressentie comme particulièrement abstraite. Il en est de même pour les anneaux, corps, espaces vectoriels, etc...

A partir du moment où l'on étudie de nombreuses structures on éprouve le besoin de définir de façon générale ce qu'on entend par structure. C'est à ce besoin que répond parfaitement et de façon très simple la notion de catégorie, bien que son origine historique soit ailleurs, comme nous le préciserons plus loin. La définition d'une catégorie est très simple : objets et morphismes entre couples d'objets, le tout vérifiant un petit nombre d'axiomes aussi faciles à assimiler que ceux de la théorie des groupes.

L'intérêt de la théorie des catégories est de dégager un certain nombre de notions qui se retrouvent dans toutes les structures usuelles et dont l'identité n'était pas toujours reconnue. Les premières qui se présentent sont les suivantes :

- a) Sous-objet (sous-ensemble, sous-groupe, etc...)
- b) Objet quotient (ensemble quotient, groupe quotient etc...)
- c) Produit (communément appelé produit direct)
- d) Coproduit (appelé tantôt somme directe, tantôt produit libre).

On peut développer la théorie des catégories d'une façon fructueuse et d'ailleurs assez élémentaire au-delà de ces premières notions. Une notion intéressante est celle de dualité (qui fait par exemple correspondre les notions de sous-objet et d'objet quotient). On peut définir des classes particulières de catégories, par exemple les catégories additives (existence d'une addition des morphismes vérifiant des axiomes convenables).

Bien que les premiers éléments de la théorie des catégories soient aussi simples que ceux de la théorie des groupes, ils ne peuvent pas être introduits trop tôt dans l'enseignement car l'élève doit avoir une bonne familiarité avec un certain nombre de structures avant qu'on puisse lui parler de structures en général. Je tiens à souligner en passant que j'estime néfaste de passer trop de temps à des développements formels. Il ne faut pas non plus faire de tels développements de façon prématurée. Mais il me semble très souhaitable que l'enseignant qui enseigne les notions de groupe, anneau, corps, etc... possède les premiers éléments de la théorie des catégories, ne serait-ce que pour éviter de faire des présentations hétérogènes d'une même notion telle que sous-objet, objet quotient, produit ou coproduit.

Les brefs développements qui précèdent permettent de répondre à l'article de Jacqueline Fourastié et de nuancer certaines de ses affirmations. Tout d'abord ses craintes sur le caractère très abstrait de la notion de catégorie semblent tout à fait exagérées. Si l'on se place dans le cadre des mathématiques usuelles, je ne pense pas que la théorie des catégories se présente en concurrente de la théorie des ensembles mais qu'elle représente un couronnement tout naturel de l'axiomatisation des mathématiques (je me place d'un point de vue naïf en laissant volontairement de côté l'aspect fondement des mathématiques qu'il y a intérêt à séparer de l'aspect formel élémentaire de la notion de catégorie). Je pense enfin que les craintes de Jacqueline Fourastié sur le caractère trop restrictif de l'axiome d'associativité viennent d'une appréciation inexacte du rôle de la théorie des catégories.

Bien que la façon de loin la plus simple et la plus naturelle de présenter la notion de catégorie me semble être celle qui est suggérée ici, ce n'est pas ainsi que les choses se sont passées historiquement. L'origine de la notion de catégorie est dans l'étude des foncteurs définis par la construction des groupes d'homologie d'un espace topologique. La notion de foncteur est très importante car elle permet d'établir un lien entre deux catégories.

2 - A propos des catégories

par Alain BOUVIER, Université Claude Bernard, Lyon

A juste titre récemment, Daniel Dugué faisait remarquer que "moderniser un traité de mathématique, c'est écrire un chapitre nouveau en tête de livre et non à la fin".

Nous oublions trop souvent, dans notre enseignement, que faire des mathématiques c'est avant tout résoudre des problèmes et non pas introduire une liste suffisamment longue de définitions, de propriétés et exemples triviaux et éventuellement quelques théorèmes susceptibles, un jour, mais ce n'est pas certain, de servir à quelque chose.

Ainsi, en oubliant cela, notre enseignement est devenu caricatural. Il n'intéresse plus les utilisateurs des mathématiques puisque nous avons omis ce qui pouvait conduire à des utilisations. Il n'intéresse plus les mathématiciens puisqu'il se résume, sauf exception, à un catalogue de banalités et à du vocabulaire. Intéresse-t-il au moins les élèves ? A les en croire, il n'en serait rien.

Certains voudraient maintenant ajouter encore un chapitre de plus avant ce chapitre zéro évoqué par D. Dugué ; il concernerait les catégories.

Avant d'introduire telle ou telle notion, nous devons impérativement nous demander : à quoi ça sert ? Qui s'en sert ? Pourquoi ?

Prenons l'exemple des ensembles. Si nous relisons le traité d'analyse de Valiron (1), nous saisissons immédiatement pourquoi et comment la théorie des ensembles s'est dégagée et avérée un outil de travail indispensable pour éclaircir des notions délicates et faire découvrir des résultats substantiels. Evidemment, cela n'a rien à voir avec l'ensemblomanie délirante que nous avons vu fleurir de la maternelle à l'université depuis la mise en place de notre réforme.

Nous sommes un certain nombre à penser qu'une notion nouvelle doit être introduite seulement lorsqu'elle apparaît comme un outil unificateur de situations suffisamment variées permettant à l'élève d'en sentir immédiatement la portée, l'intérêt et l'utilité.

Je ne suis donc pas d'accord avec les idées développées par Jacqueline Fourastié dans son article du Bulletin numéro 297 au sujet des catégories.

D'abord elle affirme que l'intérêt essentiel de cette théorie tient à son grand degré de généralité. S'il en était ainsi, je suis certain qu'elle n'aurait pas connu le développement qui est le sien. Il est clair qu'en théorie des catégories, l'essentiel

- ce n'est surtout pas les catégories,
- c'est un peu les foncteurs,
- c'est surtout les morphismes fonctoriels.

Parce que des propriétés, des théorèmes, des résultats remarquables ne pouvaient s'énoncer simplement, des mathématiciens (Birkhoff, Cartan, Eilenberg, Mac Lane, Hilton, etc) introduisirent, développèrent et utilisèrent vers 1940 un outillage susceptible de donner à leurs travaux des énoncés plus parlants et des démonstrations plus élégantes.

Depuis, l'une des questions que l'on se pose à propos d'une nouvelle notion rencontrée s'exprime souvent ainsi : est-elle ou non fonctorielle ?

(1) Ou l'article de G. ARSAC du Bulletin 301.

Alors pourquoi, quitte à “faire des catégories”, Jacqueline Fourastié voudrait-elle exclure *le seul point utile et digne d'intérêt* ?

Dans le même article, je lis que la théorie des catégories serait une théorie interne à l'algèbre (?). J'ignorais que l'algèbre englobât par exemple la topologie algébrique ou la géométrie algébrique, domaines où il en fut fait le premier usage et où aujourd'hui on ne pourrait, sans ces notions, énoncer clairement les résultats fort complexes obtenus.

Quelle utilité de dire “tel machin” est ou non une catégorie de même que de dire : “tel machin” est ou non un ensemble ?

La lecture du petit ouvrage de Peter Hilton (CEDIC) illustre très bien mon propos. Certes, il est facile de donner la définition d'une catégorie, des morphismes ou des foncteurs, mais tout cela nous laisse froids. Pour que notre intérêt commence à s'éveiller, il faut, pour le moins, arriver à des notions de type universel bien qu'en fait cela ne soit encore que brouille.

Tout commence vraiment lorsqu'un certain nombre de propriétés (par exemple en topologie) nécessite naturellement l'usage d'outils nouveaux. Alors, dans ce même ouvrage, on se rend compte immédiatement de la différence de niveau que cela suppose, même, comme c'est le cas ici, lorsqu'il s'agit en quelque sorte de vulgarisation.

On pourra toujours rétorquer que tel ou tel point est “enseignable” car on a pu l'enseigner dans telle ou telle circonstance. Mais quelle ignoble façon de concevoir les programmes ! Nous savons pertinemment que tout est enseignable. Tout devrait-il donc être enseigné ?

Un mathématicien ne se demande pas, lorsqu'il étudie des fonctions réelles de trois variables réelles, s'il doit ou non introduire la notion de dérivée partielle. Il le fait, car à propos de ces fonctions c'est l'un des outils de base, source de nombreux problèmes et indispensable pour la résolution d'un grand nombre de questions. En outre les physiciens et d'autres utilisateurs des mathématiques en font un usage permanent.

Pédagogiquement, nous excluons d'aller du général au particulier. Si l'on adopte la démarche opposée, ce *faux problème* à propos des catégories disparaît. L'étudiant ne rencontrera pas avant la maîtrise de mathématiques pures de situations où l'aspect

fonctoriel soit simplificateur et où l'introduction du vocabulaire catégorique perde son aspect artificiel pour devenir indispensable.

Cessons donc d'augmenter le stock de vocabulaire infligé aux élèves et au contraire entraînons-les à faire des mathématiques, c'est-à-dire des problèmes précis.

3 - Réponse à B. Charles et A. Bouvier

par Jacqueline FOURASTIE, maître assistant au C.N.A.M.

Je remercie vivement les auteurs des articles qui précèdent, ainsi que les personnes qui m'ont écrit ou ont pris directement contact avec moi. J'espérais une discussion et je suis heureuse de l'avoir obtenue.

Il est réjouissant pour moi qu'Alain Bouvier inaugure son article par une citation du Professeur Dugué qui a précisément suivi toute ma recherche (thèse de 3e cycle et thèse d'Etat). J'ajoute que cette citation tirée de son contexte pourrait faire penser que M. Dugué est plus favorable qu'il ne l'est effectivement à la "modernisation" des mathématiques.

Alain Bouvier souligne avec juste raison que faire des mathématiques, c'est avant tout résoudre des problèmes. Son analyse de l'enseignement actuel des mathématiques est sévère, mais j'y souscris : son contenu est trivial pour les mathématiciens, inintéressant pour les utilisateurs. Il peut cependant intéresser certains élèves, ceux dont l'esprit, à cause de leur jeunesse, se complait à tous les "jeux", qu'ils aient une signification ou non.

Je suis étonnée, après m'être sentie si en harmonie avec ses premières lignes.... qu'Alain Bouvier ne se sente pas aussi en accord avec moi ! Bien sûr, j'aurais dû parler des morphismes fonctoriels (ou équivalences naturelles). Je ne nie absolument pas leur importance. Simplement, j'ai voulu montrer qu'un exposé abstrait de la théorie commence déjà à être essoufflant au niveau des foncteurs ; l'apprenti moyen a par conséquent du mal à parvenir aux morphismes fonctoriels (ma formule était peut-être trop ironique !). Il faut ajouter, d'ailleurs, que l'exposé de la théorie est plus facile à l'aide d'un exemple.... Je ne suis pas sûre qu'elle aurait eu tout le succès qu'elle a obtenu si Mac Lane et Eilenberg, au point de

départ de leur découverte (1), n'avaient fait l'exposé sur l'exemple remarquable des espaces vectoriels. Ils ont d'ailleurs ainsi été amenés à définir d'abord les "équivalences naturelles", ce qui donne raison à Alain Bouvier. Je me sens donc en accord avec Bernard Charles pour penser qu'il est nécessaire que les professeurs enseignant à un certain niveau connaissent la théorie des catégories, au moins dans ses premiers développements, pour enseigner les structures (de groupe, anneau, corps....) d'une façon suffisamment homogène.

Par contre, je maintiens contre Bernard Charles le caractère trop restrictif de l'axiome d'associativité. En effet, cet axiome me semble typique d'une mathématique enfermée en elle-même, dans laquelle en fait les "morphismes" ne sont guère que des fonctions réelles, continues, d'une variable réelle. Un certain nombre de contre-exemples ont été cités dans l'article de février 1975 ; deux autres seront pris ici, parmi les compositions de fonctions :

1° Soient les trois fonctions définies de $\mathbf{R}_*$ dans $\mathbf{R}$ pour l'une, de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ pour les deux autres :

$$f \quad x \longmapsto \text{valeur entière de } x \text{ (noté } [x])$$

$$g \quad x \longmapsto 1/x$$

$$h \quad x \longmapsto x^2$$

Si l'on compose ces trois fonctions pour x compris entre 0 et 1, la composition de g et h est possible, celle de f et g ne l'est pas.

Il n'y a pas associativité. Pour trouver pareil exemple, il a suffi d'introduire une fonction présentant une discontinuité.

2° Soient maintenant trois fonctions ; f est définie de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^+$, et les autres de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$:

$$f \quad x \longmapsto \sqrt{x}$$

$$g \quad x \longmapsto -x$$

$$h \quad x \longmapsto x$$

(1) "Natural Isomorphism in group theory" *Proc. Nat. Acad. Sci.* (1942, p.537-543) et "General theory of natural equivalences" *American Mathematical Society Transactions*, vol. 58, 1946, p. 231 a 295.

Nous sommes dans le cas où l'une des compositions est absurde : $f \circ g = \nu$ (ν morphisme absurde). On ne peut pas réaliser la composition des fonctions, encore moins parler d'associativité.

J'ai tenu à donner ces deux exemples car ils correspondent aux morphismes que les mathématiciens utilisent le plus souvent. Force est de constater qu'il n'y a pas associativité !

Le Professeur J. A. Ville m'a communiqué une note (2) absolument passionnante sur cette question. Il précise que dans la théorie des catégories, "on admet une double associativité, d'abord l'associativité des permissions de multiplier, ensuite l'associativité, lorsqu'il est permis de calculer des produits, des résultats de ces multiplications. Cela est très naturel. Mais cela ne mène pas à grand chose. Il faut ajouter un axiome concernant les unités.

Cet axiome sur les unités est très fort. Si on l'exprime en théorie des relations, sa restrictivité apparaît tout de suite. Si $A(x, y)$ est la relation "Autorisation de faire le produit $x y$ ", l'axiome devient

$$A(x, y) = [\varphi(x) = \delta(y)]$$

c'est-à-dire : on peut multiplier x et y si *quelque chose* qui est la fin de x est également le début de y . Ou encore : tout élément x peut se décomposer en une queue, un corps et une tête".

Je n'aurais aucune inquiétude si tous les enseignants et auteurs de programme partageaient les idées d'Alain Bouvier (sous-jacentes aussi, me semble-t-il, chez Bernard Charles) : n'introduire un outil de mathématique qu'à partir du moment où il apparaît nécessaire. Ce qui m'inquiéterait, ce serait que le chapitre "avant zéro" soit placé tout au début de l'enseignement.

Pourrions-nous conclure avec G. Papy (3) : "La théorie des catégories est une théorie très importante, mais présentée encore actuellement d'une manière si abstraite qu'on est souvent très loin de pouvoir aider le mathématicien non spécialiste. Il est bien plus urgent d'en trouver une bonne approche didactique que de faire une nouvelle thèse où on aurait modifié légèrement un axiome" ?

(2) Les axiomes qui en disent plus qu'il n'en ont l'air. Nous espérons que cette note sera publiée intégralement, et que les exemples très vivants que donne le Professeur Ville permettront de faire avancer encore la réflexion sur l'utilisation de la théorie des catégories.

(3) "Apprendre à enseigner" interview dans *Sciences et Avenir*, numéro spécial : "La crise des mathématiques modernes", 1973.

EXAMENS ET CONCOURS

Remarques sur le problème de terminale C, à Paris en Juin 1975

par A. TORTRAT, U.E.R. 48, Université Paris VI

Ayant pris connaissance du problème de terminale C de Paris, à motivation probabiliste, il m'a paru utile d'écrire quelques observations pour le Bulletin de l'A.P.M. : ce problème doit normalement retenir l'attention de nombreux collègues au cours de la prochaine année scolaire, à deux titres me semble-t-il :

1) le programme de Probabilités y intervient, 2) des parties diverses du cours s'y conjuguent pour donner un sens concret au problème ; la partie III n'est qu'une illustration particulière de la partie II, mais justifie la partie I, et le calcul numérique qui y est demandé, en lui donnant une signification probabiliste (tout calcul plus ou moins ennuyeux ne prend son intérêt que lorsqu'on lui donne une signification, laquelle dépend pour un même résultat numérique de l'application envisagée).

La motivation probabiliste de la partie III déborde le cadre précis du programme. Telle est la raison de mes remarques, mais aussi de montrer qu'on peut saisir l'occasion d'un problème concret, susceptible de retenir l'attention d'élèves pour des raisons non mathématiques, pour discuter du cadre mathématique (probabiliste) qu'appelle sa solution, poser des questions et introduire à des développements théoriques futurs, au lieu de procéder comme trop souvent : parachuter un cadre formel qui paraît intangible, des définitions elles aussi non significatives, alors qu'on gagnerait à expliquer chaque fois sur des exemples non artificiels les motivations vraies, la nécessité ou l'utilité des propriétés postulées.

Dans le cas présent, il s'agit en particulier de montrer que l'espace Ω habituel n'est ni unique ni indispensable (alors s'évanouit la question de savoir s'il est fini ou non !).

Une note de l'énoncé (en III 1e) invitait à ne pas chercher à définir l'espace de probabilité en question, car le programme est limité aux espaces Ω *finis*. Mais le problème posé appelle inévitablement cette recherche, qui nous paraît d'un certain intérêt.

1. S'il est bon qu'on habitue l'élève à baser un problème de probabilités sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sous-jacent ($\mathcal{A}$: algèbre de parties de Ω), il l'est peut-être moins que la définition même d'une épreuve (aléatoire) soit *identifiée* à un (et *un seul*) tel espace : dans le concret, ce qui doit être défini avec précision c'est une expérience au résultat aléatoire : alors vient la recherche d'une représentation mathématique, qui n'est presque jamais unique. Un événement E a une existence indépendante de l'espace de représentation, de même que sa probabilité ou l'espérance d'une variable aléatoire.

L'habitude est prise par beaucoup de probabilistes de poser au départ un Ω *non défini*, c'est le support de v.a. dont on se donne les lois mutuelles ou certaines propriétés. Pour un calcul déterminé on cherchera souvent l'espace de représentation minimal concerné (alors il sera défini !), par exemple si les seules fonctions d'une même v.a. réelle sont étudiées, cette v.a. peut être identifiée à la fonction $f(x) = x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et sa loi définie directement sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

Exemple. La loi de Bernoulli devrait être présentée comme liée à une épreuve répétée K fois (alors $\Omega = \{0,1\}^K$), mais, ne concernant que le nombre de réalisations d'un événement E (E_k à la k -ième épreuve) et non l'ordre de ses apparitions, on applique Ω sur $\Omega' = \{0,1,2,\dots,K\}$, la loi en question est la probabilité *dans* Ω' : on la notera P' pour la clarté de l'explication initiale, mais on peut aussi la noter P , car c'est P sur une sous-algèbre de l'algèbre initiale (algèbre d'événements, ne l'oublions pas, dont les parties de Ω ne sont qu'une représentation).

2. Il est clair que l'essentiel, c'est la fonction P (à valeurs dans $[0,1]$), définie et *additive* sur une algèbre $\mathcal{A}$ d'événements. Les ω sont plus symboliques ; lorsque Ω est dénombrable, ils représentent, il est vrai, en général des événements, bien identifiés,

de $\mathcal{A}$. Lorsque Ω n'est pas dénombrable, il est, nous l'avons dit, souvent "posé" abstraitement, les ω n'ont pas de signification précise et *concrètement* Ω sera souvent en fait, *même si on ne le dit pas*, remplacé par un autre espace dont les points s'interprètent mieux.

3. L'énoncé en question concerne un problème particulier lié à la répétition infinie d'une partie opposant deux joueurs A et A' où A gagne avec la probabilité p non nécessairement égale à $1/2$. Désignons par Ω_K l'espace $\{0,1\}^K$ lié aux K premières parties.

L'épreuve est ici en quelque sorte la réunion des Ω_K ($K = 1, 2, \dots$). Cela ne permet pas de définir directement des ω disjoints, car chaque ω_K (de Ω_K) se divise en deux ω_{K+1} . En fait on s'intéresse aux événements $E_K = "A \text{ est ruiné à la } K\text{-ième partie}"$, et E'_K (A' ruiné). Ces événements disjoints peuvent être pris pour événements élémentaires de l'épreuve globale (ou comme événements d'un Ω que nous ne précisons pas pour l'instant). C'est dire qu'alors Ω_K est réduit à $2K + 1$ points, les $E_k, E'_k, k \leq K$, et l'événement "la partie continue" qui se divise en trois à la partie suivante.

On voit qu'est parfaitement définie une algèbre d'événements, à savoir l'algèbre $\mathcal{A}_0$ engendrée par les E_K, E'_K . Dans $\mathcal{A}_0$, les E_K, E'_K sont des atomes, c'est-à-dire des événements insécables (comme les ω d'un Ω), et un dernier atome est l'événement $\Omega - \sum E_k - \sum E'_k$, soit $E_\infty = "la partie dure infiniment"$. Tant qu'une algèbre est engendrée par des atomes en quantité dénombrable, une v.a. ("mesurable pour cette algèbre") est une fonction constante sur les atomes, et c'est en particulier à une telle définition que pourrait (devrait !) se borner l'enseignement tant qu'on se borne à des Ω *dénombrables*.

4. Le problème qui nous occupe (en sa partie III 1^e) envisage les événements $\mathcal{E}_a = \sum_{k=1}^{\infty} E_k$ (ruine de A) et $\mathcal{E}'_{2a} = \sum_{k=1}^{\infty} E'_k$ (ruine de A') qui *ne sont pas* de $\mathcal{A}_0$. Mais le raisonnement de 1^e b. fait intervenir (comme probabilités conditionnelles) des nombres r_n qui égalent les probabilités de ruine du joueur A si son avoir avant la première partie est n (et $3a - n$ celui de A'), il introduit les événements $X_k = n$: c'est dire que nous devons (pour appuyer ce raisonnement sur un couple $(\mathcal{A}, P)$), utiliser l'algèbre engendrée par toutes les v.a. X_k , i.e. $\mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A}_K$, où

α_K est $\mathcal{T}(\Omega_K)$ ensemble de toutes les parties de Ω_K , et poser le problème d'y adjoindre $\mathcal{E}_a$ et $\mathcal{E}'_{2a}$, obtenant l'algèbre $\overline{\mathcal{A}}$.

5. En désignant par $r_{n\ell}$ la probabilité de ruine, en ℓ parties exactement, de A ayant au départ l'avoir n , et en posant $q = 1 - p$, on obtient la relation de récurrence

$$r_{n\ell} = p r_{n+1, \ell-1} + q r_{n-1, \ell-1}$$

On en déduit, en sommant sur ℓ de 1 à ∞ , $1 \leq n \leq 3a-1$, que $\rho_n = \sum_1^\infty r_{n\ell}$ vérifie $\rho_n = p \rho_{n+1} + q \rho_{n-1}$ pour $n > 1$ (car $r_{n+1,0} = r_{n-1,0} = 0$) et aussi pour $n = 1$, en posant $r_{00} = 1$. Ainsi on a obtenu les valeurs de ρ_a et ρ'_{2a} et prouvé que $\rho_a + \rho'_{2a} = 1$.

6. Admettons l'existence d'un prolongement de P à l'algèbre $\overline{\mathcal{A}}$.

Tout B de $\overline{\mathcal{A}}$ s'écrit $B_k + \sum_{k+1}^\infty E_\ell$, ou $B_k + \sum_{k+1}^\infty E'_\ell$, ou $B_k + E_\infty$, avec $B_k \in \alpha_k$.

Le raisonnement de la question 1^e b. nous donne ces mêmes valeurs ρ_a , ρ'_{2a} de somme 1 pour r_a et r'_{2a} . C'est dire que

$r_a = \sum_1^\infty r_{ak} = \sum_1^\infty P(E_k)$ (donc aussi que $P(\sum_{k+1}^\infty E_\ell) = \sum_{k+1}^\infty P(E_\ell)$), et que le prolongement est nécessairement unique.

Cela était clair en 4 aussi, car l'additivité de P impose

$$P(\text{ruine de } A) \geq \sum_1^K P(E_k) \text{ donc } \geq \sum_1^\infty r_{a\ell} = \rho_a.$$

De même $P(\text{ruine de } A') \geq \rho'_{2a}$.

Alors $\rho_a + \rho'_{2a} = 1$ impose l'égalité dans ces deux inégalités.

Ainsi " $P E_\infty = 0$ " résulte de la solution de la question 1^e b., ce qui n'était pas sûr au départ, et n'est pas du tout trivial. L'existence du prolongement (unique) est assurée par

$P(B_k + \sum_{k+1}^\infty E_\ell) = P(B_k) + \sum_{k+1}^\infty P(E_\ell)$ (de même avec $B_k + \sum_{k+1}^\infty E'_\ell$). Rappelons qu'un théorème standard assure

l'existence et l'unicité d'un prolongement σ -additif de $\mathcal{A}$ à $\overline{\mathcal{A}}$ (car P est σ -additive sur $\mathcal{A}$, autre théorème standard), mais l'unicité du prolongement *additif* n'est ici assurée que grâce aux expressions de $\mathcal{E}_a$ et $\mathcal{E}'_{2a}$ dans $\mathcal{A}$ et à $\sum P(E_k) + \sum P(E'_k) = 1$.

7. Bien sûr le Ω naturel lié à ce problème est $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Mais il a la puissance du continu, *comme* E_{∞} . En effet, E_{∞} contient tous les points ω ainsi obtenus : aux parties $2\ell + 1$ et $2\ell + 2$, A gagne d'abord puis perd ensuite ou inversement. Alors X_k demeure entre $a - 1$ et $a + 1$ et (si $a > 1$) la partie dure infiniment. L'ensemble de ces ω est de même cardinalité que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et donc aussi E_{∞} .

Peut-être devrait-il être mieux connu que si on ne prend pas $\mathcal{A} = \mathcal{F}(\Omega)$, ce n'est pas uniquement par inexistence d'une probabilité dénombrablement *additive* (non triviale, prouvée dès que Ω est non dénombrable), mais parce qu'une probabilité *seulement* additive *répondant au problème* peut ne pas exister : sur la surface de la sphère Σ d'aire 1 de $\mathbb{R}^3$, il n'existe pas de fonction additive P sur $\mathcal{F}(\Sigma)$ qui prolonge l'aire ordinaire de façon que P soit *invariante* par toute rotation.

Ce résultat de preuve assez élémentaire est dû à Hausdorff (1914) et étend un résultat antérieur concernant l'existence d'ensembles non mesurables (ici au sens de la σ -additivité) sur la circonférence. En fait le résultat de Hausdorff est beaucoup plus surprenant car il établit qu'une fois enlevés une infinité dénombrable de points, Σ se partage en trois parties égales entre elles (au sens de la superposition par rotation) et chacune égale à la réunion des deux autres. (*)

Dans le cas du problème, on peut appliquer Ω sur $[0,1]$ en faisant correspondre à $X_1 = a + 1$ le segment $[0,p]$ et à $X_1 = a - 1$ le segment $[p,1]$, puis ainsi de suite par divisions successives. Seul les points de Ω à coordonnées toutes égales à 1 (ou 0) sauf un nombre fini d'entre elles, ont une double représentation dans $[0,1]$, et ils peuvent être négligés. Alors l'image de P coïncide avec la mesure de Lebesgue dans $[0,1]$, et le prolongement (invariant par translation modulo 1) à $\mathcal{F}([0,1])$ existe (prouvé par Banach, vers 1920), donc aussi un prolongement *naturel* dans Ω (un prolongement arbitraire existe toujours, mais il n'est pas dénombrablement additif).

8. Un point peut et doit nous semble-t-il être porté à l'attention des élèves : l'établissement de la relation de récurrence prend en considération l'événement $E^{(k)} =$ "ruine de A , postérieure à k ", conditionné par $X_k = n$ ou par $X_k = n, X_{k+1} = m$

(*) Cf. Paul LEVY, Le paradoxe de la sphère et les fissions en chaîne. (Annales Université Budapest 3.4 — p. 135-144).

($m = n + 1$ ou $n - 1$, $n \neq 0$ et 3a). L'indépendance des parties successives, avec l'axiome (essentiel) des probabilités composées qui permet de construire la probabilité globale P à partir de celles de chacune des parties successives (sinon il faut parachuter P et jouer abstraitement de l'indépendance), prouve que la probabilité de cet événement $\{E^{(k)} \mid X_k = n, X_{k+1} = m\}$ ne dépend ni de k ni de n , c'est donc r_m .

Celle de $\{E^{(k)}, X_k = n\}$ est donc

$$r_{n+1} P\{X_k = n, X_{k+1} = n + 1\} + r_{n-1} P\{X_k = n, X_{k+1} = n - 1\} \\ = P\{X_k = n\} (p r_{n+1} + q r_{n-1}).$$

En divisant les deux membres par $P(X_k = n)$ on obtient

$$p r_{n+1} + q r_{n-1} = P\{E^{(k)} \mid X_k = n\} = r_n$$

En fait $P(X_k = n)$ n'est plus grand que 0 que si n a la parité de a pour k pair, la parité contraire sinon. On peut laisser tomber les autres cas de probabilité totale nulle.

On peut aussi raisonner à l'intérieur de $\{X_k = n\}$ (sous-entendu "la partie a duré jusqu'à cet instant"), espace conditionnel équivalent à $\{X_0 = n\}$, il reste alors seulement à conditionner par $X_{k+1} = n \pm 1$.

9. Ce qui précède ne nous donne pas les $P(E_\ell) = r_{n,\ell}$ mais, par la méthode de la partie II du problème, on obtient immédiatement leur fonction génératrice $\varphi_n(u) = \sum_{\ell=0}^{\infty} r_{n,\ell} u^\ell$ définie au moins pour $0 \leq u \leq 1$. En effet nous avons vu en 5. que pour $1 \leq n \leq 3a-1$

$$r_{n,\ell} = p r_{n+1,\ell-1} + q r_{n-1,\ell+1} ;$$

de plus $r_{0,0} = 1$ et $r_{0,\ell} = r_{3a,\ell} = 0$ pour tout $\ell > 0$.

Multipliant par u^ℓ et sommant sur ℓ , nous trouvons

$$\varphi_n = u (p \varphi_{n+1} + q \varphi_{n-1})$$

dont la solution générale s'écrit $\varphi_n = \lambda t_1^n + \mu t_2^n$ où t_1 et t_2 sont les racines de l'équation $t = u (p t^2 + q)$.

Compte tenu de $\varphi_0(u) = 1$ et $\varphi_{3a}(u) = 0$, on obtient

$$\lambda + \mu = 1 \quad \text{et} \quad \lambda t_1^{3a} + \mu t_2^{3a} = 0.$$

D'où

$$\lambda = \frac{t_2^{3a}}{t_2^{3a} - t_1^{3a}} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{-t_1^{3a}}{t_2^{3a} - t_1^{3a}}$$

10. Il est clair que le résultat $r_a + r'_{2a} = 1$ équivaut à "La suite des variables aléatoires X_n converge avec la probabilité 1", car, suivant les chemins infinis, la suite X_n ne converge pas. On a donc prouvé, sur un exemple illustrant les idées essentielles, mais très simple parce que les trajectoires arrêtées au temps n sont en nombre fini, un théorème savant concernant la convergence d'une martingale définie par une suite croissante de temps d'arrêt τ_n : τ_n est l'instant aléatoire où $X_i, i \leq n$ atteint l'une des valeurs 0 ou 3a (l'un des joueurs est ruiné) et $\tau_n = n$ si aucun joueur n'est ruiné au temps n .

Rapport de la Commission

"Examens et docimologie"

de la Régionale parisienne de l'A.P.M.E.P.

Octobre 1975

Historique des circonstances qui ont amené à la constitution de cette commission :

Après l'écrit du bac en juin 1975, notre Régionale a été saisie par lettre et téléphone d'une plainte du président du Conseil Départemental des parents d'élèves de l'enseignement public de Paris (Fédération CORNEC) au nom des sections de 7 établissements à propos du sujet de mathématiques proposé en Terminale C.

Le Bureau est immédiatement intervenu auprès de la Commission Rectorale du baccalauréat et nous avons appris que la Commission des barèmes s'était réunie la veille (signalons que, contrairement aux années précédentes, notre association n'y avait pas été conviée).

Nous avons fait part à Monsieur l'Inspecteur Bouez de nos critiques concernant ce sujet et, malgré des réserves, nous avons considéré que nous pouvions admettre que le barème établi (1) permettait probablement de réduire les dégâts.

Le Bureau a décidé de constituer une commission pour définir la politique ultérieure de la Régionale vis à vis des épreuves d'examen.

(1) Voir ci-après en annexe.

Rapport sur les critiques faites à l'épreuve du bac Terminale C :

La principale critique porte sur la longueur : il est aberrant de proposer au baccalauréat un texte de 5 pages (comme au CAPES ou à l'agrégation) ; quelle que soit la difficulté du problème, les élèves seront paniqués et ce ne sont pas les meilleurs (ceux qui, intelligemment, lisent le texte jusqu'au bout avant de commencer) qui auront pu avancer tranquillement à travers la suite de questions.

L'importance (dans la cotation annoncée) relative des exercices et du problème ne faisait que renforcer ce malaise : d'ordinaire chacun des deux exercices préalables est coté plus de 3 points.

Les critiques ont également souligné que le texte ne porte que sur une faible partie du programme et que certaines questions sont à la limite de ce programme (la présentation de la fonction du premier exercice est inhabituelle pour les lycéens) ; de plus, le deuxième exercice, astucieux, est considéré comme un véritable piège pour les élèves un peu étourdis ou troublés, et la plupart des candidats n'étaient pas préparés à des questions du type du III. Le barème adopté, certes, n'a pratiquement pas tenu compte de cette question (ce qui est d'ailleurs en contradiction avec l'intention apparente des auteurs d'interroger sur les probabilités). Nous apprécions les efforts qui ont été faits dans le choix du barème, pour améliorer, statistiquement, le rendement de l'épreuve, et nous prenons note que les résultats finaux donnent 68,46 % de reçus à la session de juin 1975 (pour 70,9 % en 1974).

Nous remarquons que l'on est dans la situation où se trouve notée sur 19 une épreuve constituée par les exercices 1, 2 et les parties I et II du problème (soit les pages 1, 2 et 3 incomplète), mais il n'est pas possible d'assurer que les élèves ayant obtenu la moyenne dans ces conditions soient les mêmes que ceux qui l'auraient obtenue dans une épreuve clairement constituée des parties ci-dessus citées et d'elles seulement.

Si certains élèves ont pu peut-être "grappiller" quelques points supplémentaires dans le III, nous pensons que plus nombreux sont ceux que l'impression de longueur aura traumatisés.

Nous ne nions pas l'intérêt de ce sujet en tant que texte de problème (et non d'examen), mais nous tenons à rappeler d'une

part qu'un texte d'examen n'est pas une publication signée et que ses auteurs n'ont pas à y rechercher l'originalité, et d'autre part, que s'il s'impose indéniablement que les pouvoirs publics se chargent de fournir aux enseignants des matériaux, comme, par exemple, des idées de problèmes et de thèmes à développer, il ne saurait être question, à notre avis, d'utiliser les épreuves d'examen pour remplir cette fonction d'information.

Avenir de la commission :

La commission a décidé de tenir d'autres réunions pour discuter au fond du problème du bac et des examens de manière générale, ainsi que de la question d'une participation de l'A.P.M.E.P. aux commissions officielles de choix des sujets et des barèmes.

ANNEXE

ACADEMIES DE CRETEIL PARIS VERSAILLES

SESSION JUIN 1975

Division des Examens et Concours

7, rue Ernest Renan 94110 ARCUEIL

BACCALAUREAT 1975

Commission d'entente pour l'harmonisation
de la notation des épreuves de Mathématiques
(circulaire ministérielle n° 71-368 du 19 novembre 1971)

Les indications suivantes sont présentées à titre de suggestion, afin d'aider les correcteurs et d'éviter des inégalités choquantes d'un jury à l'autre ; elles ne sont pas contraignantes, chaque examinateur restant maître de son appréciation.

SERIE C

Premier exercice : (3 points)

- | | |
|----------------------------------|--------|
| 1° Reconnaître $h \circ g$ | 0,5 pt |
| Expression de la dérivée | 1 pt |
| 2° Intégration par parties | 1 pt |
| Retrouver $F'(x)$ | 0,5 pt |

Deuxième exercice : (3 points)

- | | |
|---|--------|
| 1° Expression de la relation | 0,5 pt |
| Etude (sommaire) de H et asymptotes | 0,5 pt |
| Tracé de H | 0,5 pt |
| 2° Résolution du système donnant K | 1 pt |
| Tracé de K | 0,5 pt |

N.B. On attribuera une bonification d'un point pour tenir compte du soin apporté au tracé des courbes et de la rigueur des solutions de ces deux exercices (par exemple dans la détermination de K , l'indication des deux points de l'hyperbole d'équation $xy = -1$ qui ne conviennent pas).

Problème

- | | |
|----------------------------|------------|
| I — | 3,5 points |
| 1° Résolution en X | 2 pts |
| Passage à x | 0,5 pt |

2° Déroulement du calcul numérique 1 pt
 N.B. On attribuera une bonification de 1 point aux candidats ayant trouvé le bon résultat ($a \approx 13$).

II — 7 points

- 1° a) Pour une explication pragmatique 0,5 pt
 (mais on attribuera 0,5 pt de bonification pour l'ébauche d'une récurrence).
 b) E sous-espace vectoriel 1 pt
 c) Système libre 1 pt
 Système générateur, base, dimension 1 pt
- 2° a) Suite arithmétique 0,5 pt
 Suite géométrique 0,5 pt
 Reconnaître les 2 suites et montrer
 qu'elles forment une base 0,5 pt
 Expression de u_n 0,5 pt
 b) $p = 1/2$ 0,5 pt
 $p \neq 1/2$ 1 pt

III — 3,5 points

- 1° a) Valeurs des X_i 0,5 pt
 b) Exprimer r_n 0,5 pt
 On attribuera une bonification pouvant aller jusqu'à 2 points pour la résolution de la question marquée (**), non explicitement exigée.
 c) r'_m à partir de r_n 0,5 pt
 $r + r'$ 0,5 pt
- 2° On attribuera pour cette question : 1,5 pt. en tenant compte en particulier de la signification intuitive du résultat.

A propos de l'oral du CAPES

Lettre de Christiane BLANCHARD, Marseille

Je suis pour la troisième année responsable de la préparation au CAPES de Mathématiques dans mon Université et serais heureuse que les remarques qui suivent puissent bénéficier de la diffusion du Bulletin, ce qui leur permettrait sans doute de toucher un certain nombre de membres du jury, qu'ils en admettent le bien-fondé ou qu'ils me répondent pour se justifier.

Je déplore en effet chaque année qu'il y ait à l'oral du concours une tacite épreuve éliminatoire préliminaire consistant en une devinette : "Qu'est-ce que le jury veut exactement que je traite ?" Le moins qu'on puisse dire est que la règle du jeu n'est pas toujours très claire, et que ne semble guère respecté le paragraphe du programme qui prétend inviter "le candidat à mettre en oeuvre l'ensemble de ses connaissances dans une présentation

ordonnée et correcte” sans prétendre se situer au niveau d’une classe déterminée. Malheur au candidat dont “l’ensemble des connaissances” comprend la notion d’idéal et qui s’aventure à la “mettre en oeuvre” pour traiter les nombres premiers dans $\mathbb{Z}$ (et pourquoi donc $\mathbb{Z}$ au lieu de $\mathbb{N}$, alors ?). Le plus regrettable est que, si le point de vue du jury sur de telles questions est clair après, une fois le candidat collé, il est impossible de se le faire préciser clairement avant.

Le problème de la limitation du sujet peut être tout aussi épineux, même lorsque l’énoncé est un paragraphe du programme officiel. Exemple maintenant classique : la leçon libellée “Transformations orthogonales, groupe orthogonal”. Si l’on consulte le programme de Terminale C, on constate que l’étude des transformations orthogonales dans E^3 n’est précisée que par cette petite phrase (on ne peut qualifier de précision ni le premier membre de phrase, ni le contenu de la parenthèse, qui ne sont que des synonymes de “transformations orthogonales” ; pourquoi ces synonymes si mal ponctués ? Mais ceci est une autre histoire ...). Un professeur de Terminale C englobera donc sous ce titre toute l’étude des transformations orthogonales. Malheur au candidat qui se comporterait ainsi ! Le jury n’attend, paraît-il, que l’étude du groupe orthogonal. Pourquoi donc mettre autre chose dans le titre ?

J’entends bien que l’organisation d’un concours comme le CAPES est écrasante et pose de gros problèmes de coordination, de sorte que la “règle du jeu” que j’aimerais voir mieux définie n’est pas facile à mettre au point. Je voudrais du moins attirer l’attention de mes collègues membres du jury sur de petits faits qui introduisent dans le concours un peu de loterie. Les commentaires de programmes sont justement faits pour que les enseignants n’aient pas à deviner ce qu’ils doivent traiter. Pourquoi alors demander aux futurs enseignants de s’entraîner à cet exercice ?

TRIBUNE LIBRE

Enseignons plutôt en Béotie

par G. WALUSINSKI

Le rapport de nos collègues Glaeser et Gerll sur les 17èmes Olympiades internationales de mathématiques (Cf. Bulletin 301, p. 775) présente une plaidoirie incomplète en faveur de cette entreprise. Il ne signale pas ce qui devrait en être un des buts ; l'omission surprend. Il ne mentionne aucun des inconvénients ou des risques que comporte l'organisation qu'il préconise ; c'est fâcheux.

On est vraiment étonné du silence de nos collègues sur l'intérêt des contacts personnels que de telles rencontres internationales devraient favoriser. Surtout pour les élèves et les professeurs d'un pays naturellement porté à croire que sa culture et son enseignement sont les meilleurs du monde ou même les seuls. Le prestige de nos grandes écoles, sensible jusque dans le rapport de nos collègues (cf. leur note p. 779), conduit bien des familles à se poser, dès le berceau, l'angoissante question : "Entrera-t-il à Polytechnique ?" (et maintenant "entrera-t-elle ?"). Il est certainement bon que les champions parmi nos élèves aient une occasion au moins de rencontrer des camarades qui vivent dans des pays privés de ces institutions prestigieuses et qui ne sont pourtant pas sous-développés dans les domaines scientifiques.

D'après le rapport de nos collègues, ces contacts personnels ne semblent pas avoir été nombreux en 1975. Des difficultés matérielles d'organisation étaient évidentes, surtout si les délégations disposaient de crédits aussi étriqués que ceux de la délégation française. Et puis nos élèves avaient-ils, pour l'occasion, une

préparation suffisante en anglais, en allemand ou en russe ? Tout cela n'empêche qu'il faut mettre au profit des Olympiades la possibilité de contacts, voire même d'une fraternisation qui est ou devrait être le climat de la recherche mathématique, qui est ou devrait être dans la nature des réunions de jeunes de tous les pays.

N'est-ce pas en profitant des grandes expositions universelles, au XIXème siècle, que se nouèrent les liens grâce auxquels put être fondée la Première Internationale ?

Je ne reviens pas sur les avantages du sport mathématique justement soulignés par nos collègues. Mais il ne faut pas s'en cacher les défauts et les risques.

Il est évident que sans entraînement, sans préparation d'assez longue durée, la participation aux Olympiades se limiterait à une figuration. C'est bien d'ailleurs ce qui se passe pour le Concours Général ; les élèves qui y sont présentés sans l'appui de quelques épreuves préalables ont des chances à peu près nulles d'y réussir. Or les stages préparatoires, les épreuves éliminatoires envisagées par nos collègues, quelle qu'en soit la formule, développeront, tout au long de l'année scolaire, une atmosphère de compétition forcée ; la question est alors de savoir si elle est moralement bonne et pédagogiquement fructueuse.

Est-il possible de promouvoir les études scientifiques, est-il possible d'intéresser un vaste public au développement de ces études sans recourir à des procédés publicitaires ? Quand on voit le succès des jeux télévisés les plus imbéciles, on peut penser qu'il est illusoire de vouloir cultiver sans joindre au plaisir d'apprendre la carotte des gains ou des honneurs. De même qu'il y a les prix littéraires, hélas, il y a les prix de l'Académie des Sciences, les prix Nobel, les médailles Fields, les légions d'honneur et les promotions au grand choix sans oublier les nominations en "classe noble". Il n'y a que pour les petits écoliers qu'on a supprimé la croix. Pour les grands (?), on maintient les titres, les honneurs ou le gain d'un paquet de lessive. Ne peut-on souhaiter que l'école reste à l'écart de ces pantalonades déshonorantes ?

L'esprit de compétition, évidemment prédominant dans les Olympiades (ou dans des épreuves de sélection préparatoires), est-il compatible avec la volonté de fraternisation qui devrait se manifester dans ces rencontres ?

On sait aussi quels excès de chauvinisme, voire de xénophobie, sont engendrés par les compétitions sportives, les olympiques en particulier. C'est tout juste si l'absence de médaille d'or au slalom géant n'entraîne pas un deuil national. Imaginez les habitués du Café du Commerce "se félicitant" des succès de "notre" équipe aux olympiades mathématiques !

Quant aux *retombées pédagogiques*, on peut certes apprécier le remplacement du "problème de concours général" organisé autour d'une "idée" par des problèmes aux énoncés courts qui exigent plus d'initiative dans la recherche. Mais, tant par les épreuves de sélection que par l'usure normale du temps, ce genre de questions se scléroses à son tour et laissera, sans attendre cette usure, l'impression que les mathématiques sont un jeu pour mathématiciens. Rien à voir, en tout cas, avec les vrais problèmes scientifiques qui sont interdisciplinaires et pas sujets de concours. Newton n'a pas gagné de médaille.

Alors, pour un bénéfice pédagogique faible ou douteux, l'organisation des olympiades entraînerait notre enseignement à penser toujours plus aux champions qu'à tous les autres. Ne perdons pas notre temps ni nos faibles forces pour enfoncer dans son vice la société française pervertie par les concours ou l'arrivisme.

LETTRE

de G. CURNY s/Directeur C.E.S.
39, avenue Victor Hugo
38270 Beaurepaire

Le 22/7/1975

J'ai l'honneur de vous adresser le compte rendu d'une expérience réalisée au C.E.S. de Beaurepaire (Isère), en mathématiques, avec les élèves des classes de troisième, par un groupe de quatre professeurs du C.E.S., avec la participation active, le contrôle et les conseils fort bienveillants d'un animateur I.R.E.M. Tous les cinq, de générations et de formations très différentes, avons formé une équipe (1) pédagogique unie cherchant (malgré nos optiques souvent différentes qui ont été précisément le sujet de discussions

(1) Equipe formée des quatre professeurs (Mme Chassagne remplacée au 1er trimestre par Mlle Capricelli, M. Curny, Mme Dolveck, M. Fanjat) et de l'animateur M. Charnay.

amicales très formatrices) un seul but : l'intérêt de nos élèves, que nous avons essayé (très insuffisamment) de faire participer à la préparation de nos sondages et à l'organisation pédagogique des groupes. Les discussions avec plus de cent élèves paraissant du temps perdu, ne permettant pas à tous (notamment aux timides) de s'exprimer librement, nous avons préféré établir des questionnaires individuels ; le dernier notamment a été fait à la suite d'une enquête écrite auprès de tous les élèves. Nous avons essayé de dégager alors les questions qui, dans le contexte actuel, avec le programme actuel, leur semblaient les plus importantes. Vous trouverez peut-être qu'il y a peu d'innovation et que nous sommes restés très près des méthodes traditionnelles, mais nous cherchions avant tout l'intérêt des élèves en utilisant les programmes actuels (compte tenu de la circulaire du 19/2/73, B.O. n° 8 du 22/2/73).

Il s'est créé chez les professeurs un esprit de travail en commun très profitable à tous (maîtres et élèves) et j'ai retrouvé cet esprit d'équipe que j'avais déjà fort apprécié dans les vieux Cours Complémentaires.

En espérant que ce compte rendu pourra rendre service à nos collègues et à leurs élèves, je vous prie d'agréer, Monsieur le Directeur, l'expression de mes sentiments respectueux.

NDLR — Les collègues intéressés peuvent demander le compte rendu détaillé de l'expérience à Michel De Cointet, 62 rue Diweg, 67600 SELESTAT.

STAGE D'ANALYSE DE LYON COMPTE RENDU COLLECTIF

Les 3 et 4 décembre 1975, l'Inspection Générale de Mathématique organisa à Lyon un stage auquel furent conviés, en priorité, les professeurs des classes terminales C et E des départements de l'Ain et du Rhône. Quelques professeurs des autres classes furent également invités mais ... sans remboursement de leurs frais de déplacement !

Thème de ce stage préparé à Paris par les inspecteurs généraux, les inspecteurs pédagogiques régionaux et quelques-uns de leurs adjoints : **L'ANALYSE DANS LE SECOND CYCLE.**

Un inspecteur général était là, proposant des sujets de réflexion. Il n'y eut, en fait, que des monologues successifs, menés au pas de charge, entrecoupés par les interventions des professeurs qui désiraient amener la discussion sur le terrain pédagogique : contenu des programmes, classes surchargées, manque de motivation des élèves, sélection par les mathématiques ... Bien loin d'être entendus, ces professeurs furent vertement rabroués. L'Inspection Générale qui tente d'évoluer (cf. Le Monde des 19-20 octobre 1975) cherchait-elle réellement des interlocuteurs ?

A propos de l'ANALYSE DANS LE SECOND CYCLE, l'ambiguïté demeure. Pour l'inspecteur général, il s'agit essentiellement de faire découvrir par les meilleurs élèves des classes de terminale C (les futurs candidats à nos "grandes écoles" ...) quelques "notions fines" à la limite des programmes et cela à l'aide d'exercices. En terminale C, se trouve l'élite qu'il faut choyer. Durant ces deux journées, l'inspecteur général ne parlera jamais des autres sections que C, ni des élèves de C qui ne se spécialiseront pas en mathématique et qui ont choisi cette orientation parce que le baccalauréat C est nécessaire à la poursuite de leurs études.

Pour nous, il y a deux aspects : nous ne refusons pas de faire entrevoir ces "notions fines" mais il s'agit essentiellement de donner au plus grand nombre des élèves d'une classe, un OUTIL qui leur permette d'appréhender le monde dans lequel ils vivent et de le transformer. En raison des conditions actuelles d'enseignement, ces deux aspects ne sont pas complémentaires : ils constituent une alternative.

Les professeurs auront retiré de ce stage quelques idées d'exercices qu'ils devront adapter à leur classe. Un certain nombre d'entre eux se sont aperçus qu'ils avaient oublié la topologie ou qu'ils l'ignorent, — l'intérêt de connaître cette théorie pour l'enseignement de l'Analyse n'est pas apparu —.

Pourtant, c'était la première fois depuis longtemps qu'on conviait les professeurs à discuter des problèmes d'enseignement. L'espoir était grand (cf. Le Monde des 19-20 octobre 1975) de voir l'Inspection Générale quitter ses tâches administratives pour venir à l'animation pédagogique.

En conclusion, ces journées semblent être révélatrices

- de la difficulté pour l'Inspection Générale de faire du nouveau en conservant le cadre traditionnel de ses rapports avec les enseignants,

- de la difficulté en général d'un travail collectif non lié à une participation active.

R. PERRIN, lycée Lumière, Lyon
C. JOBERT, lycée du Parc, Lyon
J. CUILLERET, lycée du Parc, Lyon
B. NAMIAN, lycée Carriat, Bourg-en-Bresse
B. ARNAUD, lycée Brossolette, Villeurbanne
C. JAY, lycée Brossolette, Villeurbanne

ECOLE NORMALE SUPERIEURE

45, rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05 - 329 12-25

SEMINAIRE de PHILOSOPHIE et MATHEMATIQUES

(Maurice LOI)

année 1975-76

Les séances ont lieu, en principe, un lundi sur deux à 20 h 30, salle V, suivant le tableau ci-dessous. Des séances supplémentaires pourront avoir lieu, à la même heure, dans la même salle, et seront annoncées en temps utile.

1^{er} Mars : J. DRABBE : les classes équationnelles de structures.

15 Mars : J.P. DESCLEE : mathématiques et linguistique.

7 Avril : (mercredi) K. KURATOWSKI : sur les notions d'espace et d'hyperespace en topologie.

12 Avril : J.L. VERLEY : quelques exemples de ruptures épistémologiques dans la théorie des fonctions de variable complexe.

26 Avril : R. APERY : la conception constructive des mathématiques.

3 Mai : R. ZUBER : la créativité des définitions.

17 Mai : J. HILY : problèmes de méthodologie en théorie des nombres.

31 Mai : M. LOI : le concept d'identité.

9, 10, 11 JUIN - COLLOQUE INTERNATIONAL A LUXEMBOURG :

Langage et pensée mathématiques (Dieudonné, Gauthier, Kleene, Kuratowski, Lévy-Leblond, Martin-Löf, Gert Müller, Papy, Thom).

Pour tous renseignements : s'adresser à Jean-Paul PIER - Centre universitaire
162 a, avenue de la Faïencerie - LUXEMBOURG

21 Juin : M. LOI : bilan et perspectives.

DANS NOS CLASSES

Jeux de déduction*

par Amos EHRLICH, Département de l'éducation, Université de Tel-Aviv.

Traduit de l'anglais par Michèle LELARGE

Entraîner les élèves à faire des déductions correctes et élargir leur compréhension de certaines structures mathématiques sont deux buts principaux dans l'enseignement des mathématiques. Les jeux que nous allons décrire essaient d'aider à atteindre ces buts. Je les ai essayés avec des élèves de 14 à 17 ans, et avec quelques élèves plus jeunes.

Dans tous ces jeux, un joueur *actif* joue contre un *contrôleur*. Chacun des deux joueurs actifs peut servir de contrôleur à son adversaire et une personne peut contrôler le jeu de plusieurs joueurs actifs. Je ne vais décrire que le jeu d'un joueur actif et de son contrôleur.

Pour commencer une partie, le contrôleur détermine un ensemble de phrases, que j'appellerai dans cet article S (je donnerai ensuite des exemples de S). Le joueur actif ne connaît aucune des propositions de S, mais il en sait suffisamment pour pouvoir déduire tous les éléments dès qu'il en connaît quelques-uns.

Suivant la question du joueur, le contrôleur lui donne une première proposition de S. Si le joueur actif peut en déduire plusieurs propositions de S, il donne ses réponses au contrôleur et

* Article paru dans le n° 67 de "Mathematics Teaching", bulletin de l'A.T.M. (Association of Teachers of Mathematics, Grande-Bretagne).

marque 7 points par réponse correcte. Quand le joueur a l'impression qu'il ne peut plus rien déduire, il pose une question concernant un nouvel élément de S , obtient une réponse, et utilise tout ce qu'il sait pour découvrir d'autres éléments de S . Chaque déduction correcte à ce stade lui rapporte 6 points. Tout résultat que le joueur actif découvre après que le contrôleur lui ait donné un troisième élément de S , mais avant un quatrième, rapporte 5 points, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ait trouvé S entier ou jusqu'au septième stade du jeu.

Il n'est pas demandé au joueur d'expliquer la façon dont il a déduit ses résultats, mais s'il propose une proposition fausse, il perd deux fois le "prix" d'une bonne réponse, le contrôleur lui dit la réponse correspondante correcte, et il passe au stade suivant (en d'autres termes, après la pénalisation, la dernière déclaration du joueur est considérée comme une question).

Pour compléter la description d'un jeu particulier, nous devons définir la façon dont le contrôleur détermine l'ensemble des propositions S , spécifier ce qu'on saura au départ de S , et lui dire quel genre de questions il peut poser sur S .

Arithmétique dans les anneaux $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Le contrôleur détermine un code par lequel chacune des lettres A, B, C, D , et E représente un chiffre de l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Le joueur actif sait que l'ensemble $\{A, B, C, D, E\}$ et l'ensemble $0, 1, 2, 3, 4$ sont identiques, mais à aucun moment on ne peut lui donner le code.

S est l'ensemble des propositions vraies de la forme $x + y = z$ dans lesquelles x, y, z sont les chiffres codés, et $+$ est l'addition modulo 5 ($x + y = z$ et $y + x = z$ sont considérées comme la même proposition). En d'autres termes, S est la forme codée de la table d'addition modulo 5.

S peut comporter $A + B = C$ ou $D + D = E$ (si elles sont vraies dans le code), mais ni $A = 0$ ni $A + B = C + D$. Le joueur ne gagne pas de point à découvrir de telles égalités, mais il peut, bien entendu, les utiliser pour déduire les éléments de S .

Les propositions qui sont données au joueur au début de chaque stade sont déterminées par ses questions. Ces questions sont du type "combien fait $A + B$?"

Deux jeux de treillis

Le premier jeu de treillis est celui du treillis des parties de $\{1, 2, 3\}$, lui-même appelé V , l'ensemble vide est noté ϕ et pour tout autre sous-ensemble le contrôleur choisit un nom de code parmi les lettres A, B, C, D, E ou F.

L'ensemble S pour ce jeu est l'ensemble des propositions de la forme $x \cup y = z$ et $x \cap y = z$ où x , y et z sont différents de ϕ et de V et où $x \neq y$. $x \cup y = z$ et $y \cup x = z$ sont considérées comme la même proposition. De même pour $x \cap y$.

Le deuxième jeu de treillis ressemble au premier, mais les éléments du treillis sont $V = \{1, 2, 3, 4\}; \{1, 2, 3\}; \{1, 2, 4\}; \{1, 2\}; \{1, 3\}; \{1\}; \{3\};$ et ϕ . Ce sont les parties de V qui ont les propriétés

$$(a) \quad 2 \in X \Rightarrow 1 \in X \quad \text{et} \quad (b) \quad 4 \in X \Rightarrow 2 \in X$$

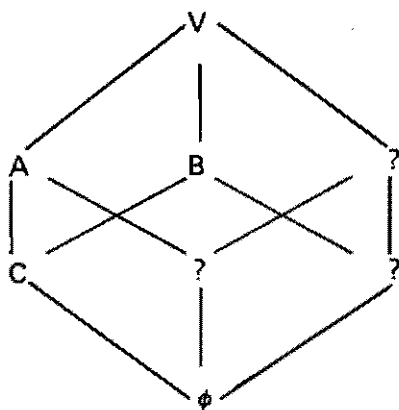
Remarquons que ces deux treillis sont isomorphes aux treillis des diviseurs de 30 et de 24 respectivement. Les étudiants ont préféré la forme "parties de V " à la forme "diviseurs de X ".

Déductions types dans les jeux de treillis

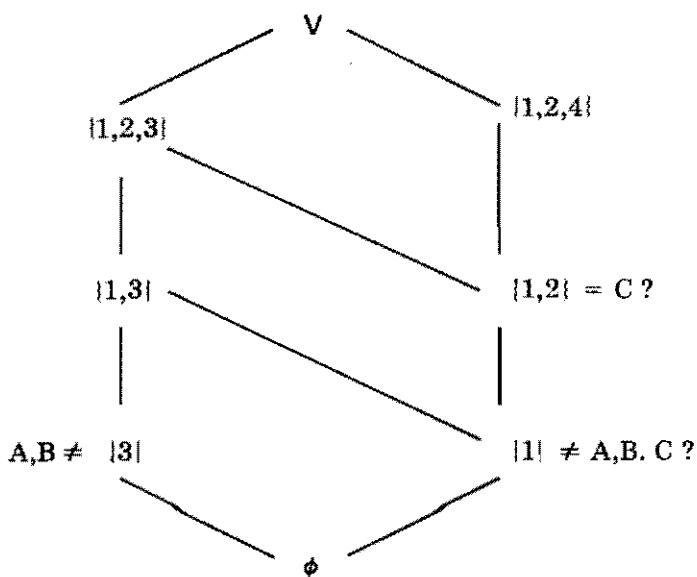
Les raisonnements typiques des étudiants sont "il semble raisonnable que" plutôt que "il s'ensuit nécessairement que". Pour accélérer la transition en déductions correctes (rigoureuses), il est recommandé que le professeur démontre quelques déductions. Les exemples qui suivent peuvent servir ce but. Dans cet article, je les utilise aussi pour montrer la différence entre les deux jeux de treillis.

Supposons que l'information soit $A \cap B = C$. De ceci, nous tirons que $C \subset A$ et que $C \subset B$ (ces deux propositions ne sont pas des propositions de S , donc ne donnent pas de points) et on peut en tirer (dans les deux jeux) que $A \cap C = C$, $A \cup C = A$, $B \cap C = C$ et $B \cup C = B$ (28 points). De plus, ni A ni B ne peuvent être des singletons, puisque l'intersection d'un singleton et de n'importe quoi d'autre est, soit vide, soit lui-même, alors que C n'est ni A , ni B , ni ϕ .

Pour le premier treillis, cela signifie que A et B sont des paires, et C est un singleton. Notre savoir peut donc se représenter par le diagramme suivant.

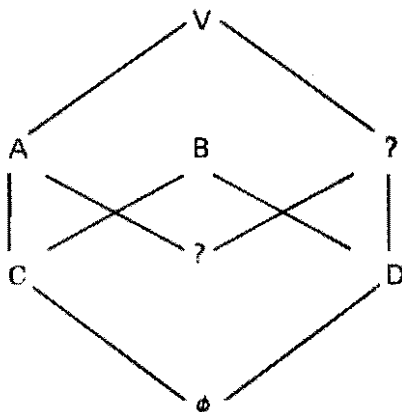


Pour le second treillis, nous savons que A et B ne sont ni $\{1\}$, ni $\{3\}$ et que C est soit $\{1\}$, soit $\{1,2\}$ (pourquoi ?). Cette information peut être représentée de la façon suivante.



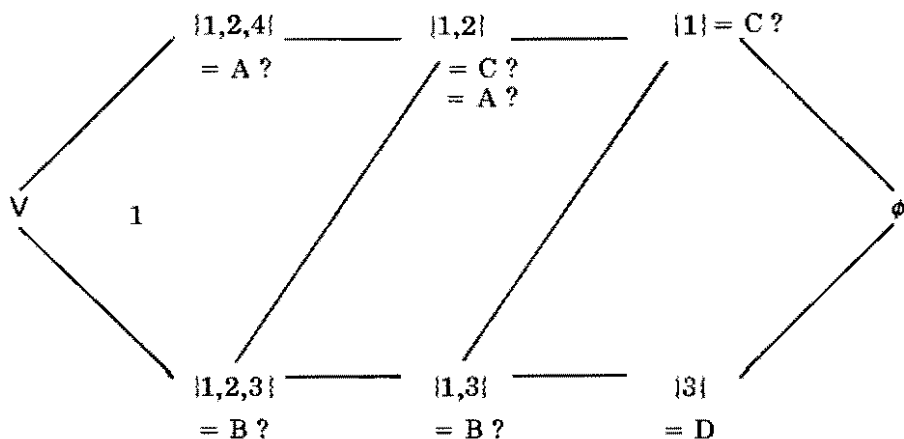
Maintenant, supposons que le contrôleur nous dise que $A \cap D = \emptyset$. Dans les deux treillis, on peut conclure que $C \cap D = \emptyset$ (6 points).

Dans notre premier treillis, l'intersection de 2 paires est un singleton et non $\emptyset$, donc D est un singleton. Comme D n'est pas une partie de A , nous avons maintenant le diagramme :



et nous déduisons que $B \cap D = D$, $B \cup D = B$, $A \cup D = V$, et $C \cup D = B$ (24 points de plus).

Dans le second jeu, nous tirons de $A \cap D = \emptyset$ que, soit A soit D est $\{3\}$, mais $A \neq \{3\}$, donc $D = \{3\}$. Donc A est soit $\{1,2\}$ soit $\{1,2,4\}$, donc B est soit $\{1,3\}$ soit $\{1,2,3\}$.



Dans les deux cas, $B \cap D = D$ et $B \cup D = B$.

De plus, si $C = \{1,2\}$ alors $B = \{1,2,3\}$ puisque $B \subset C$, et si $C = \{1\}$ alors $B = \{1,2\}$ puisque $A \cap \{1,2,3\} = \{1,2\} \neq C$. Dans les deux cas, nous avons $C \cup D = B$.

Remarquons que dans les deux jeux, l'information $A \cap D = \emptyset$ elle-même ne nous permet pas de marquer des points.

Un jeu dans le produit cartésien $Z_3 \times Z_3$ ($Z_3 = Z/3Z$)

Le système mathématique est le groupe $Z_3 \times Z_3$. C'est-à-dire que les éléments sont les couples (x_1, x_2) où x_1 et x_2 sont des éléments de $\{0,1,2\}$ munis de la loi :

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (z_1, z_2) \quad \text{où } x_1 + y_1 \equiv z_1 [3] \\ \text{et } x_2 + y_2 \equiv z_2 [3]$$

Le couple $(0,0)$ est noté 0 ; les autres huit couples sont codés par les lettres de A à H . S est l'ensemble de toutes les propositions vraies de la forme $x + y = z$, sauf celles où l'un des termes est 0 . Comme dans les jeux précédents, $x + y = z$ et $y + x = z$ sont considérées comme un seul et même élément de S .

Prenons quelques exemples de déductions dans ce jeu.
Supposons que notre première information soit

$$A + A = B \quad (1)$$

En ajoutant A aux deux membres, nous obtenons $A + A + A = B + A$; mais, dans Z_3 et par conséquent dans $Z_3 \times Z_3$, $x + x + x = 0$; d'où $A + B = 0$.

Autre conséquence : $B + B = A + A + B = A$.

Si notre deuxième information est $A + C = D$, nous pouvons ajouter B aux deux membres et annuler $A + B$; d'où $C = B + D$.

Si notre troisième information est $A + D = E$, en répétant le même procédé, nous obtenons $B + E = D$.

De (2) et (3), nous déduisons $(A + C) + (A + D) = D + E$, d'où $A + A + C = E$, d'où $B + C = E$.

Ajoutons A aux deux membres de l'égalité $A + A + C = E$ et annulons $A + A + A$, nous obtenons $A + E = C$.

Remarquons que, pour cette égalité, nous n'avons pas utilisé (1).

Jeux équivalents

Il y a quelques systèmes mathématiques intéressants pour lesquels notre modèle ne peut pas réellement constituer un jeu, mais peut fournir un exercice. Bien que je n'aie pas essayé les exercices suivants avec les élèves, j'espère que chacun d'entre eux, ainsi que leurs recoupements, seront stimulants.

1. Soit de A à G les éléments non nuls de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Supposons que $A + B = C$, $A + D = E$, $C + D = F$. Compléter la table d'addition dans $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

2. Soit de A à G les parties non vides de $\{1,2,3\}$ et supposons que $A \Delta B = C$, $A \Delta D = E$ et $C \Delta D = F$ (Δ étant la différence symétrique).

Arithmétique à l'emporte-pièce*

par Daiyo SAWADA, Département de l'Education Élémentaire, Université d'Alberta, Canada.

Traduit de l'anglais par Michèle LELARGE

L'automne dernier, dans l'espoir de trouver de nouvelles méthodes pour faire manipuler l'addition et la soustraction des naturels, je me mis à butiner parmi divers livres d'exercices de mathématiques au niveau élémentaire. Dans un texte de Lola May, je trouvais une activité au nom intéressant de "arithmétique à l'emporte-pièce". Le rapport de May sur cette activité indiquait qu'elle avait une grande puissance, aussi décidai-je que ça valait la peine d'essayer.

Le récit qui suit est tiré d'expériences faites avec diverses classes de trois niveaux différents : CM1 (9 ans), sixième (11 ans) et Ecole Normale d'Instituteurs. Les aspects intéressants des différentes expériences sur ce sujet sont condensés ici sous forme d'une seule leçon, afin que le lecteur ait une idée des débouchés possibles de cette activité. Je suggérerais que l'"arithmétique à l'emporte-pièce" peut être utilisée efficacement à n'importe quel niveau au delà du CE2.

* Article paru dans le n° 67 de "Mathematics Teaching", bulletin de l'A.T.M. (Association of Teachers of Mathematics, Grande-Bretagne).

Prenant la suggestion de May, je commençai par dire : "voici quelques-uns de mes nombres favoris" et j'écrivis, de *droite à gauche* avec le rétro-projecteur : 8 4 2 1 ; atteignant le 8, je m'arrêtai, le crayon planant au dessus de l'espace suivant, et regardai la classe d'un air interrogateur. Les élèves répondirent rapidement avec 16, puis 32, puis 64. Après les avoir félicités, je leur annonçai que j'allais utiliser mes nombres favoris d'une manière particulière pour fabriquer d'autres nombres. Ensuite, j'entrepris de "poinçonner" 7 de la manière suivante :

64	32	16	8	4	2	1		Lorsque je demandai
				x	x	x	7	"comment faire 9 ? ", les
			x			x	9	élèves n'éprouvèrent
		x	x	x			14	aucune difficulté à faire
								9, 14, 16 et plusieurs
								autres.

Je demandai "quelqu'un peut-il imaginer un nombre qu'on ne pourrait pas faire ? " Plusieurs nombres furent proposés, mais finalement, on trouva le moyen de les faire. Il apparut que tous les nombres pouvaient être fabriqués, jusqu'au moment où une fille proposa de faire 200. Cependant, presque aussitôt, la même fille suggéra d'ajouter 128 à la liste des nombres favoris. Personne ne s'y opposa et on put fabriquer 200.

Avant de continuer, il est peut-être préférable de réfléchir un moment sur la construction mathématique de l'"arithmétique à l'emporte-pièce" (AEP). Comme vous l'avez probablement remarqué, AEP est un système particulier de numération. En fait, si on remplace les x par des 1, et les espaces vides par des 0, alors l'aspect "base deux" de AEP devient évident.

$$111_{\text{deux}} = 7_{\text{dix}} \qquad 1001_{\text{deux}} = 9_{\text{dix}}$$

C'est pourquoi, en plus de fournir des exercices pratiques d'addition et de soustraction, AEP peut être utilisé implicitement pour explorer les systèmes de numération dans d'autres bases. Un bon côté de AEP est qu'il fournit un mécanisme efficace et amusant pour traiter les autres bases sans devenir formel ni pédant (point faible de beaucoup d'approches des autres bases).

Afin de guider les élèves dans une exploration de la base trois (sans utiliser le mot de "base trois"), je demandai "quelqu'un peut-il imaginer un autre ensemble de nombres favoris ? ". Plusieurs ensembles furent proposés, que je nommai d'après le

nom de l'élève. En voici trois, et ce sont ceux-ci qui servent de base à la discussion.

base à la discussion.						John, Mary et Kevin vinrent au tableau et chacun fit un tableau
John :	10	8	6	4	2	comme celui que j'avais utilisé. Les
Mary :		27	9	3	1	autres élèves demandèrent à John,
Kevin :		17	9	5	2	Mary et Kevin de faire un nombre donné.

Une discussion intéressante naquit lorsqu'on demanda à John de faire 7. John en fut incapable, mais dit ensuite qu'il avait simplement "oublié" de mettre un 1, ce que je lui permis de faire.

Ma décision rencontra l'objection immédiate d'un garçon qui fit remarquer que 1 est un nombre impair, alors que l'ensemble de John était l'ensemble des nombres pairs. Plus tard, le même garçon conclut que l'ensemble de John ne valait rien parce que 6 pouvait être obtenu de plusieurs façons !

L'ensemble de Mary était le "bon", dans la mesure où on voulait obtenir la base trois. En insistant sur celle-ci, j'espérais guider les élèves vers la convention que chaque élément de l'ensemble pourrait être utilisé une fois, deux fois ou pas du tout (les nombres 0, 1, 2 pour la base). Cependant, en laissant la liberté aux élèves pour construire les nombres avec l'ensemble de Mary, je vis apparaître une solution inattendue et plutôt ingénieuse.

27	9	3	1	On suggéra à Mary plusieurs nombres, et avec un peu d'aide de la part de ses camarades, elle put fabriquer tous les nombres avec des + et des -.
+	-	+	7	
+	+	-	11	
+		-	25	

C'était donc un grand jour pour la petite fille qui suggéra de faire 7 en ajoutant 9 et 1 et en retranchant 3.

Bien que je fusse fort tenté de pousser l'aspect "base trois", je décidai de laisser cette situation à son agréable sort, et m'intéressai à l'ensemble de Kevin. Comme la méthode avec des + et des - était encore fraîche à leur esprit, les élèves l'essayèrent.

17	9	5	2	La classe buta sur le nombre 18. Ils décidèrent finalement que 18 ne pouvait pas être fabriqué si on n'ajoutait pas 1 à l'ensemble de Kevin.
	+	+	7	
+			9	
+		-	10	
	+	+	16	

La classe fut très amusée de découvrir que personne ne s'était encore aperçu qu'on ne pouvait pas

fabriquer 1 avec l'ensemble de Kevin tel qu'il était à l'origine (mais cette conclusion est-elle vraie ?).

Un aspect intéressant de l'ensemble de Kevin était que personne ne put voir d'abord comment Kevin avait obtenu ses nombres favoris (et ceci peut les avoir empêchés de faire 18) si bien que Kevin nous dit qu'il avait tout simplement ajouté 1 à chacun des nombres favoris de son professeur (remarque : en fait il manque un 3). Je laisse au lecteur le soin d'obtenir 18 avec ce nouvel indice.

Plusieurs autres ensembles de nombres favoris furent suggérés et explorés mais aucun ne conduisit à des résultats inattendus.

Les idées suivantes pourraient conduire à des activités supplémentaires intéressantes (je ne les ai pas encore essayées).

1. Peut-on utiliser les + et les - avec l'ensemble du professeur ?
2. Était-il nécessaire d'ajouter 1 à l'ensemble de Kevin ?
3. Si on ajoute le 1 à l'ensemble de Kevin, le signe - sera-t-il indispensable ?
4. Que se passe-t-il si on utilise les puissances de 4 comme nombres favoris ?
5. Peut-on utiliser les nombres triangulaires (1, 3, 6, 10, ...) comme nombres favoris ? Les signes + et - vont-ils marcher ? La représentation sera-t-elle unique ?
6. Et les carrés comme nombres favoris ? Peut-on utiliser les + et les - ? Peut-on faire tous les nombres impairs ?
7. Que se passe-t-il avec les chiffres romains comme nombres favoris ?

Un peu d'espace

par Maurice THUILLIERE, lycée Chateaubriand, Rome

Une fois reconnue "l'unicité" du groupe totalement ordonné "parfait" (*) R (merci à M. Samuel pour ses articles si enrichissants et si détendus ...), il est amusant de transposer certaines études classiques sur une autre facette de ce merveilleux diamant qu'est R.

(*) Bulletin de l'A.P.M. n° 299, pages 341 à 351.

Considérons donc la version $(R_*, \times)$ du groupe totalement ordonné parfait (où le neutre est 1). Pour la suite, ce groupe sera désigné par V . On définit sur V une loi externe T par

$$(\forall \alpha \in R), (\forall x \in V), (\alpha T x = x^\alpha)$$

Un exercice bien simple permet de vérifier que (V, T) est un R -vectoriel de dimension un, dont une base est ... surtout pas $\{1\}$! On peut alors passer à V^2 par une démarche classique ; quelques calculs simples (recherche du neutre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, du symétrique d'un élément ...) permettront à des apprentis de se familiariser avec V^2 .

*
* *

Essayons de traduire, en termes de V^2 , considéré dans sa structure de R -vectoriel de dimension deux, certaines notions vectorielles bien connues. Ainsi, les vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ sont *dépendants* si et seulement si il existe un réel α tel que $(a' = a^\alpha \text{ et } b' = b^\alpha)$, étant convenu que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est dépendant de tout autre vecteur. Par exemple $\begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ sont dépendants ($\alpha = -\frac{1}{2}$). De même, il est intéressant de traduire les notions de partie génératrice, de base, etc... On pourra par exemple vérifier que la recherche des composantes du vecteur $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$ ($a \neq 1$) sur la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ \sqrt{a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ a^2 \end{pmatrix} \right\}$ conduit à la solution (unique bien sûr) $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$.

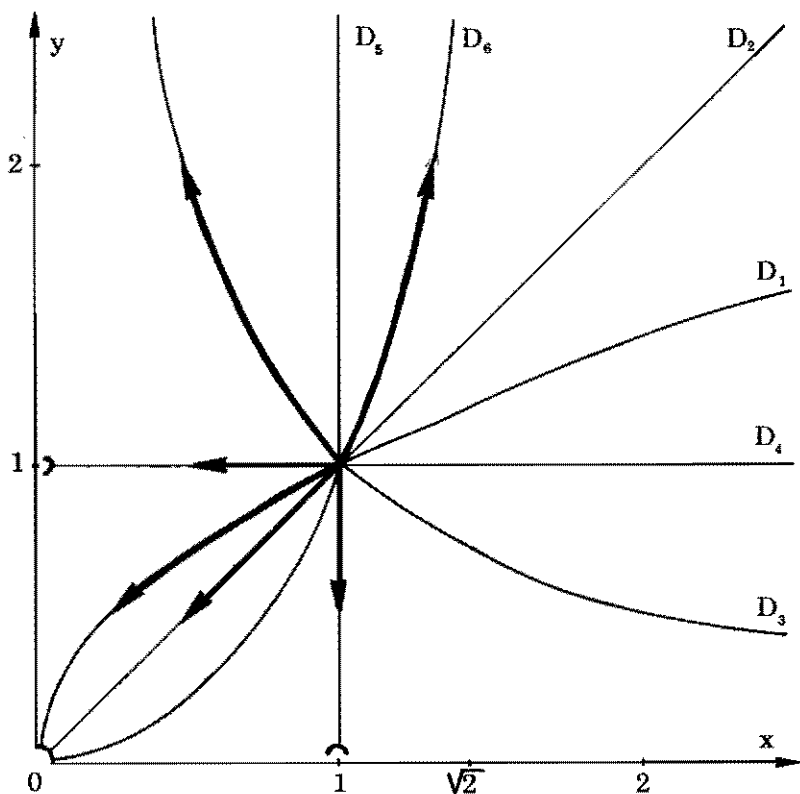
Bien entendu, il faudra parler un jour ou l'autre de logarithmes et d'exponentielles, décerner un diplôme de "base canonique" à l'un des couples de vecteurs indépendants. Sera-ce $\left\{ \begin{pmatrix} e \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ e \end{pmatrix} \right\}$ (base canonique "népérienne" de V^2) ? Alors les composantes du couple $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ seront de toute évidence $(\ln 5, \ln 2)$ (logarithme népérien). Elles seraient de la même façon $(\log 5, \log 2)$ sur la base $\left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix} \right\}$.

*
* *

Les équations paramétriques d'une droite vectorielle de V^2 , de vecteur directeur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$, sont $(x = a^\lambda \text{ et } y = b^\lambda)$, λ parcourant $\mathbb{R}$. L'"élimination" du paramètre λ entre les deux équations (en passant par exemple par les logarithmes népériens) fournit une équation cartésienne d'une telle droite :

$$y = x^{\frac{\text{Log } b}{\text{Log } a}} \quad (a \neq 1)$$

Le rapport $\frac{\text{Log } b}{\text{Log } a}$, qui ne dépend évidemment pas de la base de logarithmes choisie, pourrait s'appeler le T-coefficient directeur de la droite.



Si on cherche alors à représenter l'image "euclidienne" des droites de V^2 , on est conduit à se placer dans le "quart-de-plan"

$\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+$. Dans la figure ci-dessus, on trouvera les images euclidiennes des droites vectorielles D_i ($i \in 1, 2, 3, 4, 5, 6$) de vecteurs directeurs respectifs $\begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ (en gras sur la figure) de T-coefficients directeurs respectifs $\frac{1}{2}$, 1, -1, 0, " ∞ ", 2. On reconnaît ainsi facilement que le réseau des droites vectorielles de V^2 coïncide avec le réseau des courbes x^α , avec les positions limites des droites D_4 et D_5 correspondant respectivement à ($b = 1$) et ($a = 1$).

Je vous souhaite d'apprécier cet espace V^2 (non encore pollué !), avec sa population de vecteurs bossus et ses forêts de droites biscornues, où professeurs et élèves pourront s'égailler — et même s'égayer !

Détermination de l'indicateur d'Euler en application des propriétés de la fonction partie entière

par P. ANGLES (Université Paul Sabatier, Toulouse)

Cette démonstration, certainement connue, peut être introduite en Terminale C où l'on étudie la fonction partie entière, premier exemple simple de fonction numérique d'une variable réelle "en escalier", notamment pour définir "l'écriture normalisée" d'un réel.

I RAPPELS :

1) Partie entière d'un réel

a) Définition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un et un seul entier c_x ($c_x \in \mathbb{Z}$) tel que : $c_x \leq x < c_x + 1$.

Ce nombre c_x est appelé *partie entière*, ou caractéristique, du réel x , et noté $E(x)$.

b) Exemples $E(-\pi) = -4$; $E(\sqrt{2}) = 1$

c) La fonction $E = (R, R, G)$ où $G = \{(x, y), (x, y) \in R^2 \text{ et } y = E(x)\}$ est appelée *fonction partie entière*. Dans tout ce qui suit, on considère la restriction $E|_{R^+}$ de E à R^+_{*} . (1)

2) Rappels sur l'indicateur d'Euler :

a) Rappelons, tout d'abord, que 1 n'est pas premier pour des raisons qui n'apparaissent pas clairement en Terminale C et qu'on a intérêt à l'imposer comme tel dans cette classe.

b) On suppose connues les notions de naturels premiers et de naturels premiers entre eux.

On note, ici, $a \wedge b$ le plus grand commun diviseur de a et b ($a, b \in N$).

a, b étant des naturels supérieurs à 1, a et b sont donc premiers entre eux si et seulement si (par définition)

$$a \wedge b = 1$$

c) Définition

n étant un naturel supérieur à 1, le nombre $\varphi(n)$ des naturels m tels que $1 \leq m \leq n$ et tels que $m \wedge n = 1$ est appelé l'indicateur d'Euler de n .

II LEMME - CLEF PREPARATOIRE

Pour m et n naturels supérieurs à 1, $n \geq m$, $E\left(\frac{n}{m}\right) = q$ est le nombre des naturels r inférieurs ou égaux à n et multiples de m .

Démonstration : Pour n, m naturels supérieurs à 1, $n \geq m$:

$$q = E\left(\frac{n}{m}\right) \stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow} q : q \leq \frac{n}{m} < q+1 \Leftrightarrow q : mq \leq n < m(q+1)$$

$$\Leftrightarrow q = \text{nombre des multiples } r \text{ de } m \text{ tels que } 1 \leq r \leq n.$$



(1) $R^+_{*} = R^+ - \{0\}$ (Voir Dictionnaire de l'APMEP).

Ce lemme-clef va nous permettre de déterminer $\varphi(n)$ pour $n \in N_* - \{1\}$.

Avant tout, remarquons qu'il paraît naturel, comme pour bien des problèmes d'arithmétique, de décomposer n en facteurs premiers, soit $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ où $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}$ (ensembles des nombres premiers) et $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in N_*$.

Puisqu'on suppose inconnue la valeur de $\varphi(n)$, il est normal d'étudier, en préliminaire, les cas simples où $n = p^\alpha$, p premier, $\alpha \in N_*$ et $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$ ($p_1, p_2 \in \mathcal{P}$; $\alpha_1, \alpha_2 \in N_*$).

III PRELIMINAIRES

1) *Détermination de $\varphi(p^\alpha)$; $p \in \mathcal{P}$, $\alpha \in N_*$*

$\varphi(p^\alpha) \stackrel{\text{déf}}{=} (\text{nombre des entiers } q; 1 \leq q \leq p^\alpha \text{ et } q \wedge p^\alpha = 1).$

Il s'ensuit que :

$(p^\alpha \in N); \varphi(p^\alpha) = p^\alpha - (\text{nombre des entiers } q; 1 \leq q \leq p^\alpha \text{ et non premiers avec } p^\alpha)$

Or, tout q entier tel que $1 \leq q \leq n$: q non premier avec p^α , ($p \in \mathcal{P}$)

$\Leftrightarrow q$ entier, $1 \leq q \leq p^\alpha$, q divisible par p (bien évidemment), ce qui équivaut aussi à : q entier, $1 \leq q \leq n$, q multiple de p .

Vu, donc, le lemme-clef du II, le nombre des multiples de p inférieurs ou égaux à p^α est

$$E\left(\frac{p^\alpha}{p}\right) = E(p^{\alpha-1}) = p^{\alpha-1}, \text{ puisque } p^{\alpha-1} \in N.$$

Dès lors,

$$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^\alpha - \frac{p^\alpha}{p} = p^\alpha \left(1 - \frac{1}{p}\right) (p \in \mathcal{P} \text{ et } \alpha \in N_*)$$

2) *Détermination de $\varphi(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2})$; $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$; $\alpha_1, \alpha_2 \in N_*$.*

La méthode précédente s'applique :

$$\varphi(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}) = (\text{nombre des entiers } q : 1 \leq q \leq n \text{ et } q \wedge (p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}) = 1)$$

$$= p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} - (\text{nombre des entiers } q : 1 \leq q \leq p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \text{ et non premiers avec } p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2})$$

$= p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$ — (nombre des entiers $q : 1 \leq q \leq p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$, q
multiple de p_1 ou de p_2)

(le ou étant le ou inclusif mathématique).

Il convient donc de rechercher le cardinal de $P_1 \cup P_2$ où

$$P_i = \{ \text{multiples } q \text{ de } p_i : 1 \leq q \leq p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \} ; (i = 1, 2).$$

Or, il est bien connu en Terminale C que :

$$(1) \quad \text{card}(P_1 \cup P_2) = \text{card } P_1 + \text{card } P_2 - \text{card}(P_1 \cap P_2)$$

et dès lors, vu le lemme-clef du II :

$$\begin{aligned} \text{card}(P_1 \cup P_2) &= E\left(\frac{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}}{p_1}\right) + E\left(\frac{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}}{p_2}\right) - E\left(\frac{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}}{p_1 p_2}\right) \\ &= p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1 p_2} \right) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \varphi(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}) &= p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \left(1 - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_1 p_2} \right) \\ &= p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \left(1 - \frac{1}{p_1} \right) \left(1 - \frac{1}{p_2} \right) \end{aligned}$$

Ayant, ainsi, déterminé $\varphi(n)$ pour des cas simples, on peut, dès lors, aborder le cas général où :

$$n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} \quad (p_i \in \mathcal{P}, \alpha_i \in \mathbb{N} \text{ pour } 1 \leq i \leq k)$$

A priori, on "peut penser", guidé par les résultats précédents, que

$$\varphi(n) = n \left[\prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i} \right) \right]$$

C'est ce que nous allons démontrer.

IV ETUDE DU CAS GENERAL OU $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$

Le même raisonnement fait au III.2) s'applique ; on doit déterminer, alors, le cardinal de $(P_1 \cup \dots \cup P_k)$ où $P_i (1 \leq i \leq k)$ désigne l'ensemble des multiples q de p_i tels que $1 \leq q \leq n$.

On utilise alors la propriété suivante, généralisation de la formule (1) du III.2), dont la démonstration a été rappelée par E. Ehrhart dans la Revue de février 1963 de Mathématiques Spéciales (Vuibert) :

1) *Théorème*

$P_1, P_2, \dots, P_k$ étant k ensembles donnés, on a :

$$(2) : \text{card} \left(\bigcup_{i=1}^k P_i \right) = \sum_{i=1}^k (\text{card } P_i) - \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \text{card}(P_i \cap P_j) + \sum_{\substack{i,j,q \\ 2 \leq 2 \neq}} \text{card}(P_i \cap P_j \cap P_q) + \dots + (-1)^{k-1} \text{card} \left(\bigcap_{i=1}^k P_i \right)$$

On peut démontrer cette formule (2) par récurrence ou directement comme suit :

Supposons qu'un élément x donné appartienne à r ensembles P_i . Cet élément x est compté *une et une seule fois* dans le premier membre de l'égalité (2). Au second membre, x est compté $C_r^1 = r$ fois dans $\sum_i (\text{card } P_i)$; C_r^2 fois dans $\sum \text{card}(P_i \cap P_j)$; $\dots$; C_r^r fois dans $\sum \text{card}(P_i \cap \dots \cap P_r)$.

$\underbrace{\hspace{10em}}_{r \text{ facteurs}}$

Donc x est compté au second membre un nombre de fois égal à :

$$S_r = C_r^1 - C_r^2 + \dots + (-1)^{r-1} C_r^r$$

Le calcul de S_r peut se faire à l'aide de "la formule du binôme".

Plus explicitement :

$$S_r = 1 - [1 - C_r^1 + C_r^2 - \dots + (-1)^r C_r^r] = 1 - [1 - 1]^r = 1$$

Donc x est compté *une et une seule fois* au second membre.

$$2) \text{ Calcul de } \varphi(p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}) = \varphi(n)$$

Comme au III.2) $\varphi(n) = n - \text{card} \left(\bigcup_{i=1}^k P_i \right)$

soit

$$\varphi(n) = n - \left[\sum_i E\left(\frac{n}{p_i}\right) - \sum_{i,j} E\left(\frac{n}{p_i p_j}\right) + \dots + (-1)^{k-1} E\left(\frac{n}{p_1 \dots p_k}\right) \right]$$

soit

$$\varphi(n) = n - n \left[\sum_i \left(\frac{1}{p_i}\right) - \sum_{i,j} \left(\frac{1}{p_i p_j}\right) + \dots + (-1)^{k-1} \left(\frac{1}{p_1 \dots p_k}\right) \right]$$

ou, donc :

$$\varphi(n) = n \left[1 - \sum_i \left(\frac{1}{p_i}\right) + \sum_{i,j} \left(\frac{1}{p_i p_j}\right) - \dots + (-1)^k \left(\frac{1}{p_1 \dots p_k}\right) \right]$$

Vu le développement de $\prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$

on trouve bien :

$$\boxed{\varphi(n) = n \left[\prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \right]}, \text{ comme prévu.}$$

On peut, comme exercice, chercher $\varphi(7) = 7 \left(1 - \frac{1}{7}\right) = 6$

(les nombres entiers q tels que $1 \leq q \leq 7$ et premiers avec 7 sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6) ;

et vérifier directement le résultat :

$$\varphi(25) = 25 \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 20.$$

Proposons un exercice simple de combinatoire, qui est aussi une application, abordable en Terminale C, du lemme-clef donné au II.

V DECOMPOSITION REMARQUABLE DE $n!$ pour $n \in \mathbb{N}$

Cet exercice est d'énoncé classique. Il m'a été proposé par C. Frasnay, Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse ; je l'ai aussi trouvé dans un livre d'exercices de A. Combes chez Vuibert, sous une forme légèrement différente.

1) Pour n entier > 1 et t entier ≥ 2 , on pose

$$u(n,t) = \sum_{k \geq 1} E\left(\frac{n}{t^k}\right)$$

Justifier "l'existence" de $u(n,t)$.

2) En déduire, en utilisant le lemme-clef du II, que, $\mathcal{P}$ désignant l'ensemble infini des nombres premiers,

$$n! = \prod_{t \in \mathcal{P}} t^{u(n,t)}$$

Des points et des nombres

par P. MAHAUT

I. Préliminaires :

Le matériel pédagogique est souvent absent de notre vie et de nos classes, ne pourrions-nous pas trouver un petit budget pour l'acheter ou mieux pour le construire nous-mêmes ?

L'expérience conjuguée du Thème-Noyau et du 10 %, si elle est exécutée suivant certaines conditions, nous montre à la fois son absence et la manière de nous le procurer.

Faire un effort vers une vue plus intuitive des choses, ce n'est pas vouloir se substituer au raisonnement ; observer, ce n'est pas démontrer, mais l'un précède l'autre. Observer, construire, imaginer, pour notre esprit, c'est déjà abstraire.

Mettre nos élèves en position de recherche sur des expériences particulières, les amener à généraliser, à structurer en partant de ces cas particuliers, c'est les former à leur vie de demain plutôt que de leur ingurgiter des notions dont ils ne sauront pas se servir le moment venu.

Même l'arithmétique, si elle est prise comme un jeu, est propre à ouvrir l'esprit des enfants.

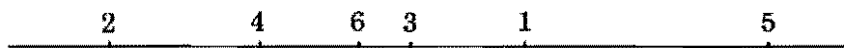
Je vais maintenant vous soumettre quelques travaux faits en 10 % avec mes élèves ; ce ne sont là que quelques notes éparses que je sou mets à votre réflexion.

II. Une première étude de la translation

La droite physique est une notion bien connue de nos élèves car ils ont pris contact avec elle dès leur plus jeune âge.

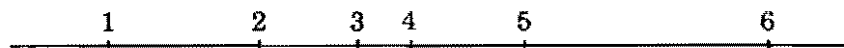
Soit un sous-ensemble de points physiques de cette droite; un ensemble que l'on peut considérer comme fini, tout au moins pour commencer.

Nous pouvons mettre cet ensemble de points en bijection avec un ensemble de nombres (Par exemple un sous-ensemble de nombres naturels).



La position des points sur la droite est-elle fonction des nombres avec lesquels on les met en relation et comment ?

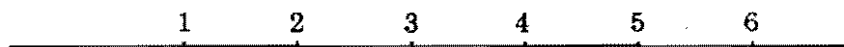
La relation d'ordre qu'est l'inégalité définie dans N sera ainsi découverte et nous amènera à la proposition suivante :



L'enfant possède de manière intuitive la notion de longueur. Admettre que deux segments sont isométriques est finalement *axiomatique*. Depuis le plus jeune âge, l'enfant étalonne son système nerveux à l'aide de grandeurs physiques usuelles telles que longueur, temps, température... Il a appris que les adultes font correspondre un nombre à une longueur ; il arrivera très vite, trop vite même, à la disposition suivante qui lui semble naturelle :



Question qu'on ne manquera pas de lui poser : pourquoi pas cette représentation ?



On lui apprend alors comment reporter une longueur au compas ou avec l'aide d'une bande de papier.

Quels sont les avantages et les inconvénients d'une représentation par rapport à une autre représentation ?

Nous demanderons ensuite aux enfants de construire le petit matériel dessiné ci-dessous :

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11	BANDE II
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11	BANDE I

La bande I est fixe, la bande II est mobile.

Quelles sont toutes les bijections que l'on peut former en se servant de ces deux règles ? (Pour parler de bijection, il faut préciser les ensembles source et but)

Il est intéressant de donner très tôt à l'enfant une idée de ce que peut être une famille de bijections.

Afin de les aider, on peut leur proposer de remplir les tableaux ci-dessous correspondant aux manipulations qui sont dessinées à côté.

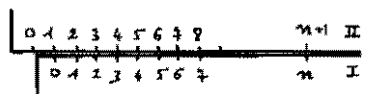
I	0	1	2	3	n
II	0	1	2	3	n

B_0



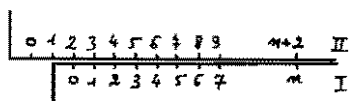
I	0	1	2	3	n
II	1	2	3	4	n+1

B_1



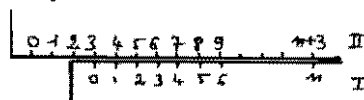
I	0	1	2	3	n
II	2	3	4	5	n+2

B_2



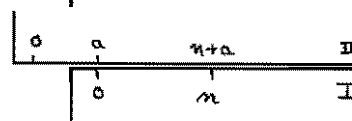
I	0	1	2	3	n
II	3	4	5	6	n+3

B_3



I	0	1	n
II	a	a+1	a+n

B_a



Peut-on utiliser une de ces bijections pour faire une addition ? Les élèves trouveront seuls comment se servir des deux règles pour additionner des nombres et ils seront heureux de cette découverte qui les paiera de leur effort. Il sera *nécessaire* de leur faire exprimer ce qu'ils font pour additionner deux nombres car ils s'en serviront à nouveau dans la suite.

Pour faire l'opération $a + b$ on place le 0 de I sous la graduation a de II. Le résultat se lit sur la règle II en face de la graduation b de I.



On leur demande ensuite de faire une découverte analogue leur permettant de procéder à une soustraction. Il sera bon de les amener à faire les deux soustractions $7-3$ et $3-7$ par exemple. On justifiera la soustraction $3-7$ en invoquant un jeu quelconque où l'on a gagné 3 points et perdu 7 points.

Cette argumentation, jointe aux deux expériences dessinées ci-dessous :



les amène à prolonger la règle II, puis la règle I, pour pouvoir faire tous les calculs de points gagnés et perdus. A droite de 0 ils graduent la droite pour représenter les points gagnés, à gauche de 0 ils graduent la droite pour représenter les points perdus. La règle ainsi construite possédant deux fois le même nombre, ils sont amenés à compléter pour les uns : 1d, 2d, 3d... et pour les autres : 1g, 2g, 3g... ; ils possèdent donc maintenant le matériel ci-dessous :



En faisant la même manipulation que pour l'opération $+$ précédente, on leur demande alors de faire les calculs suivants :

$$\begin{array}{rcl} 3d + 7d = & & 3d + 7g = \\ 3g + 7g = & \text{puis} & 3g + 7d = \end{array}$$

Ils découvrent ainsi les propriétés de l'opération $+$ dans ce nouvel ensemble. Il est ici évident que N est identique à Zd et que cette nouvelle addition est plus puissante que la précédente puisqu'elle nous permet de faire le calcul $3-7$ en le remplaçant par $3d + 7g = 4g$.

III. Le linéaire et l'affine au secours des classes modulo x :

On reprend la bande I utilisée dans les manipulations précédentes.

On demande aux élèves de construire une nouvelle bande que l'on appellera Bande II modulo 3. Pour cela on prend une bande de papier moitié moins large que les précédentes et l'on dessinera une graduation où les points sont trois "fois plus" espacés que pour la Bande I.

On demande alors aux élèves quelles sont toutes les bijections qu'ils peuvent construire en utilisant ce matériel. Pour les aider nous pouvons leur donner à remplir les tableaux ci-dessous.

$\begin{array}{c cccccc} \text{II} & 0 & 1 & 2 & 3 & n \\ \hline \text{I} & 0 & 3 & 6 & 9 & 3n \end{array}$	B_0	
$\begin{array}{c cccccc} \text{II} & 0 & 1 & 2 & 3 & n \\ \hline \text{I} & 1 & 4 & 7 & 10 & 3n+1 \end{array}$	B_1	
$\begin{array}{c cccccc} \text{II} & 0 & 1 & 2 & 3 & n \\ \hline \text{I} & 2 & 5 & 8 & 11 & 3n+2 \end{array}$	B_2	
$\begin{array}{c cccccc} \text{II} & 0 & 1 & 2 & 3 & n \\ \hline \text{I} & 3 & 6 & 9 & 12 & 3n+3 \\ & & & & & 3(n+1) = 3n+3 \end{array}$	B_3	
$\begin{array}{c cccccc} \text{II} & 0 & 1 & 2 & 3 & n \\ \hline \text{I} & 4 & 7 & 10 & 13 & 3n+4 \\ & & & & & 3n+3+1 = 3n+4 \end{array}$	B_4	

Peut-on introduire dans cette famille de bijections une relation d'équivalence et comment ?

Peut-on faire une partition dans l'ensemble de ces bijections ?

On s'aperçoit que $B_0, B_3, B_6, \dots B_{3n}..$ sont des bijections qui à N font correspondre un sous-ensemble de l'ensemble des multiples de 3.

On peut appeler Classe 0 ou $\overline{0}$ l'ensemble des images ainsi obtenues :

$$\overline{0} = 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, \dots 3n \dots$$

De même les bijections $B_1, B_4, B_7, \dots B_{3n+1}$ sont des bijections qui mettent N en bijection avec les images :

$$\overline{1} = 1, 4, 7, 10, \dots, 3n+1 \dots$$

Les bijections $B2, B5, B8, \dots B_{3n+2}$ sont des bijections qui mettent N en bijection avec les images :

$$\overline{2} = \{2, 5, 8, 11, \dots, 3n+2 \dots\}$$

Les classes $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}$ forment-elles une partition de N ?

Que se passe-t-il si on ajoute deux éléments de la classe $\overline{0}$?
Le résultat se trouve-t-il obligatoirement dans une classe ? Peut-on le voir avec le matériel que nous avons construit ?

Exemple :

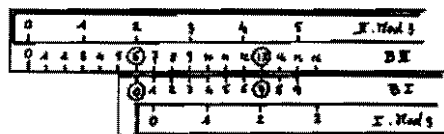


On place les bandes BI et BII de façon à additionner les deux éléments donnés (ici 6 et 9). On place la bande II mod. 3 de façon à indiquer que 6 est élément de la classe $\overline{0}$. On place la bande I mod. 3 de façon à indiquer que 9 est élément de la classe $\overline{0}$. On s'aperçoit que le résultat 15 est en bijection avec le 5 de II mod. 3, donc le résultat est élément de la classe $\overline{0}$. Cette disposition montre d'ailleurs qu'il en est de même pour toute somme d'éléments de la classe $\overline{0}$; d'où l'idée d'inventer une nouvelle opération dans l'ensemble $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ où l'on doit avoir $\overline{0} + \overline{0} = \overline{0}$.

Cherchons maintenant $\overline{0} + \overline{1}$, si cela est possible.

Nous nous y prendrons en deux étapes :

1ère étape :



La disposition de II mod. 3 sur BII montre que 6 est élément de $\overline{0}$.

La disposition de I mod. 3 sur BI montre que 7 est élément de $\overline{1}$.

13 n'est pas en bijection avec un élément de II mod. 3, donc n'est pas élément de la classe $\overline{0}$.

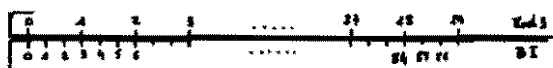
2ème étape :



On fait glisser II mod. 3 sur BII pour savoir quelle est la classe du résultat 13. Après plusieurs manipulations de ce genre on déduit intuitivement que $\overline{0} + \overline{1} = \overline{1}$. On peut ainsi faire construire la table de l'opération $+$ dans l'ensemble $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$.

Après cette étude des modulus (j'ai fait faire d'autres modulus), j'ai posé un certain nombre de questions amenant les enfants à se servir de ces règles pour faire des divisions, des encadrements, et la division euclidienne avec lecture du reste.

Exemple : Quelles sont les bijections qui amèneraient le point 84 de la règle I en correspondance avec une graduation de la règle mod. 3 ?



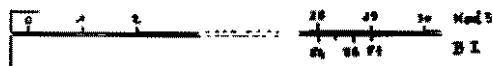
Quelle bijection est la plus intéressante ?

Ces deux bandes juxtaposées permettent de lire tous les multiples de 3 ainsi que les quotients des nombres par 3.

Si les quotients ne tombent pas juste, on peut se servir des classes de bijections précédentes pour lire les quotients et les restes des opérations.

Exemple : Diviser 86 par 3.

1ère étape :



$$84 \leq 86 < 87$$

$$28 \times 3 \leq 86 < 29 \times 3$$

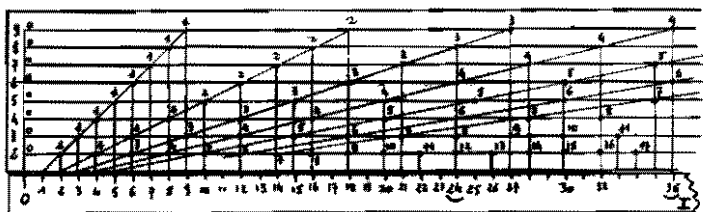
2ème étape :



86 est un élément de la classe $\overline{2}$. Le reste est donc 2.

Nous pouvons faire construire une bande par modulo et par quotient.

Voici une bande permettant de faire des divisions pour des quotients compris entre 1 et 10.



Exemple : Si on regarde la droite correspondant au nombre 24 de la règle 1 on s'aperçoit qu'elle possède cinq points renforcés qui ont pour noms 12, 8, 6, 4, 3, ce qui veut dire : les premiers diviseurs de 24 sont 2, 3, 4, 6, 8 ; et les quotients correspondants sont 12, 8, 6, 4 et 3.

On remarquera que, pour trouver, par exemple, les diviseurs communs à 24 et 36, il suffit de chercher les points qui, sur les verticales 24 et 36, se trouvent sur une même horizontale. On trouve : (12, 18), (8, 12), (6, 9), (4, 6) qui correspondent aux diviseurs communs 2, 3, 4 et 6. Il faudrait avoir une règle plus haute pour voir apparaître le P.G.C.D. 12 de cette manière. Il est cependant évident que 12 est le P.G.C.D. car, en parcourant les droites verticales correspondant à 24 et 36, on trouve les diviseurs 12, 8, 6, 4, 3 et 18, 12, 9 ..., ce qui prouve que 12 est le P.G.C.D. puisque les diviseurs vont en diminuant.

En recommençant pour d'autres nombres, on découvre les nombres premiers, les nombres étrangers (ou premiers entre eux).

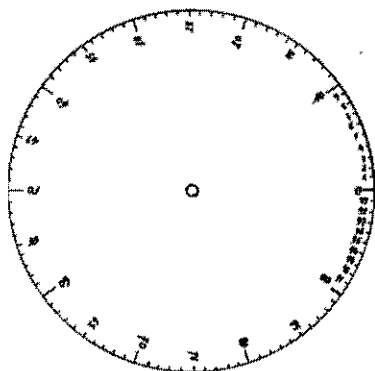
IV. Vers une nouvelle présentation du même problème :

Ce travail nous a permis de comprendre certaines propriétés, mais les règles que nous avons construites ont le gros défaut de porter peu de nombres dans un encombrement raisonnable. Nous

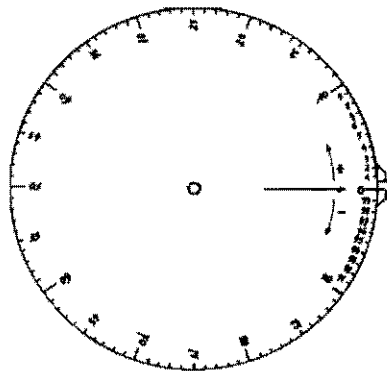
avons alors eu l'idée de prendre pour supporter nos points des cercles et non des droites.

Un cercle de 10 cm de rayon aura un périmètre approximatif de 628 mm ; aussi pourrons-nous disposer 100 points qui seront séparés par une distance curviligne approximative de 6,28 mm, ce qui rend les nombres très lisibles. Nous avons pris 100 points puisque nous ferons les lectures dans le système décimal, mais nous pourrions nous servir des mêmes propriétés dans une autre base. Nous pourrions lire des nombres supérieurs à 100 en faisant faire plusieurs tours au disque.

Ainsi, les deux disques suivants, tournant autour d'un même axe, serviront à faire les additions et les soustractions :

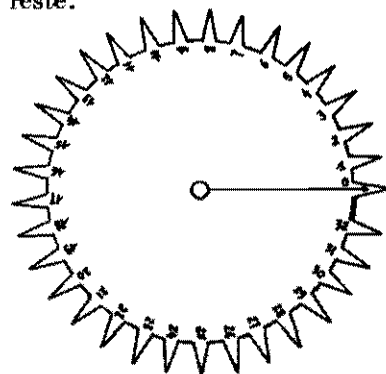


Disque de base

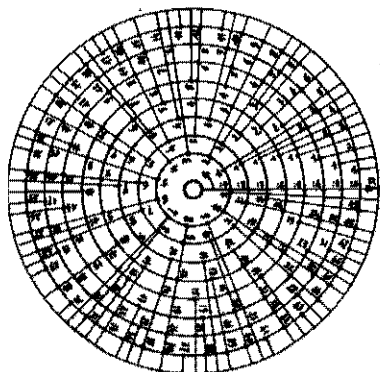


Disque Additif Soustractif Général

Par contre, les deux disques suivants permettent l'exploitation d'un travail sur les modulus, sur la division sans reste ou avec reste.



Disque Modulo 3



Disque de divisibilité avec reste
Modulo 2.3.4.5.6.7.8.9

V. Une autre présentation de la linéarité :

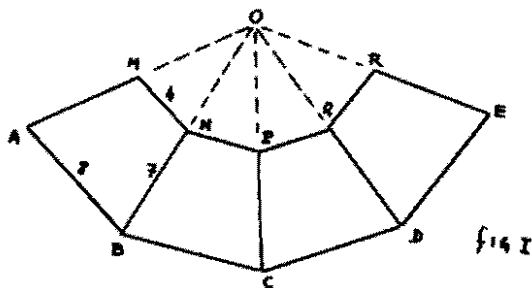
Dans une classe de sixième où je fais travail manuel, j'ai demandé à mes élèves de construire un tronc de pyramide régulière de 7 cm d'arête ayant pour grande base un carré de 8 cm de côté et pour petite base un carré de 4 cm de côté.

Mes élèves se sont donc posé le problème de construire le développement de cette pyramide.

Ne sachant pas le faire, ils ont eu l'idée de construire les quatre faces séparément, c'est-à-dire de construire quatre trapèzes isocèles superposables ayant les dimensions citées plus haut. Ils ont ensuite disposé ces trapèzes côte à côte de façon à obtenir le développement.

Je leur ai proposé de prolonger les arêtes ; ils ont ainsi découvert que leurs prolongements se coupaient en un point O. A la réflexion, ils ont trouvé cette propriété naturelle, car si la pyramide avait été entière le point O aurait existé, et ils avaient déjà construit un cône au début de l'année.

Mes élèves se sont alors aperçu que les deux cercles que l'on pouvait tracer avaient des rayons de longueurs respectives 7 cm et 14 cm. Ils ont fait cette constatation mais ont été, bien entendu, incapables d'expliquer pourquoi.



Ayant arrêté mes recherches à ce niveau en sixième, j'ai décidé de les poursuivre à un niveau plus élevé en classe de troisième.

Ce que les élèves de sixième avaient fait en deux heures, les élèves de troisième l'ont fait en dix minutes.

Mes élèves de troisième avaient étudié Thalès, mais lorsque je leur ai demandé pourquoi la longueur de $[OA]$ était 14 cm, ils n'ont pas su me le dire. Ils avaient même trouvé $OA = 14$ de manière intuitive, sans faire de mesure.

Pour les faire réfléchir, je leur ai posé d'autres questions comme : Quelle est la longueur de [OA] si $AB = 8$ et $MN = 2$ ou $AB = 8$ et $MN = 6$. Ils ont su donner les résultats sans calcul mais ne savaient toujours pas pourquoi, lorsque l'un d'entre eux s'est écrié : "C'est le théorème de Thalès"; mais ce n'était encore qu'une intuition.

J'ai demandé à mes élèves de démontrer que si $\overrightarrow{MN} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{OM} = k \cdot \overrightarrow{OA}$; j'ai précisé qu'il fallait utiliser l'axiome de Thalès et que des écritures vectorielles étaient conseillées. Ils se sont alors penchés, cours de mathématique en main, sur le problème.

En une dizaine de minutes mes élèves ont trouvé leur démonstration :

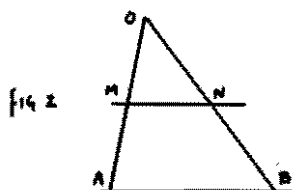
$$O M A \text{ alignés} \quad \overrightarrow{OA} = k \cdot \overrightarrow{OM}$$

$$O N B \text{ alignés} \quad \overrightarrow{OB} = k' \cdot \overrightarrow{ON}$$

$$MN \parallel AB \text{ donc } k = k'$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = k \cdot \overrightarrow{ON} - k \cdot \overrightarrow{OM} \\ &= k \cdot (\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}) \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{MN}$$

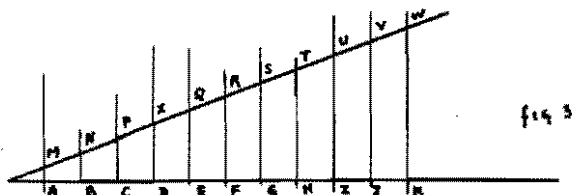


Si AB est le double de MN , alors OA est le double de OM donc de MA . Il était donc normal de trouver 14 cm.

Alors m'est venue l'idée d'exploiter ces observations de manière plus générale.

Considérons la figure n° 3. Les points $O, A, B, C, E, F \dots K$ forment une graduation de la droite (OA) . Les droites $(AM), (BN), (CP) \dots (KW)$ sont parallèles.

Les directions de (KW) et de (OA) peuvent être quelconques ou perpendiculaires.



En utilisant la démonstration précédente, nos élèves de troisième généralisent rapidement : si $AM = L$ alors $BN = 2L$, $CP = 3L \dots KW = 10L$.

Les élèves de sixième peuvent découvrir ces propriétés, mais pour eux il faut se servir de quadrillages et leur faire chercher des alignements de points.

Si nous mettons le point M en bijection avec le nombre a , les points $N, P, X, Q, \dots W$ sont alors en bijection avec $2a, 3a, 4a, \dots 10a$. Nous pouvons donc utiliser de tels alignements pour faire des multiplications ou des divisions.

Proposition d'étude :

Considérons les deux figures ci-dessous :

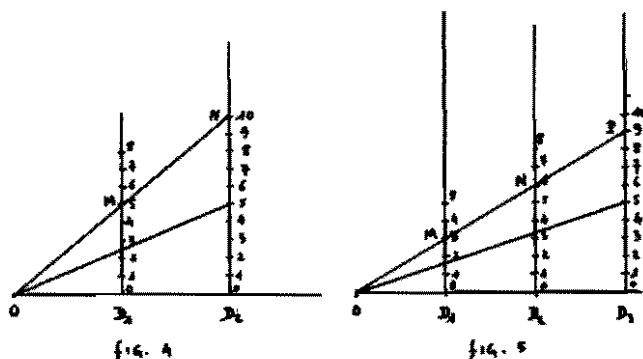


Fig. 4 : Considérons l'ensemble des points M éléments de D_1 auxquels on fait correspondre un nombre naturel. Les images N de ces points M obtenues par alignement avec O et se trouvant sur D_2 sont-elles en bijection avec des nombres naturels ? si oui, lesquels ?

Considérons l'ensemble des points N éléments de D_2 auxquels on fait correspondre un nombre naturel. Les images M de ces points N obtenues par alignement avec O et se trouvant sur D_1 sont-elles en bijection avec des nombres naturels ? si non, peut-on caractériser ces nombres ?

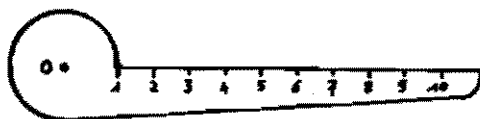
Fig. 5 : Les mêmes questions se posent pour cette nouvelle figure.

Soit à calculer $q = 12/9$. On repère 12 sur D_9 . L'alignement des points Q, R, S fait apparaître que $12/9 = 8/6 = 4/3$. L'alignement O, S, T fait apparaître que $1,30 < q < 1,35$.

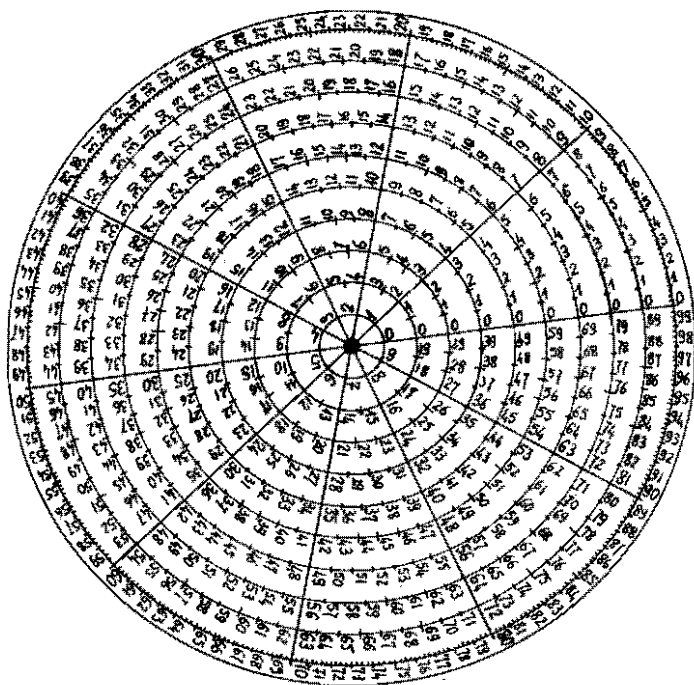
A. *Un peu de technologie* : Quels sont les principaux inconvénients de ce système de lecture ?

- Pour lire il faut tracer une ligne droite à l'aide d'une règle.
- On peut uniquement faire des divisions par les nombres de 1 à 9.
- Pour pouvoir diviser les 100 premiers nombres naturels, en supposant que les droites D_n supportent une graduation de 5 mm de pas, il faudrait une règle d'au moins 50 cm de long.

— Pour lire sans traçage on peut construire la règle en carton dessinée ci-dessous, que l'on fera pivoter en O à l'aide d'une attache parisienne ou d'un axe (pointe de compas, boulon et vis ...).



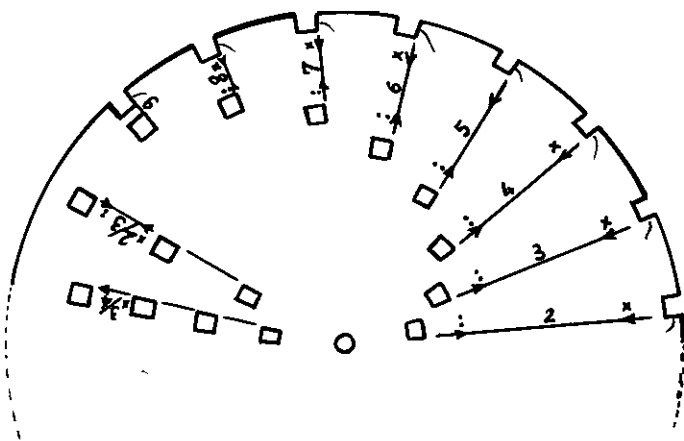
- Entre D_n et D_{n+1} on peut tracer 10 parallèles équidistantes qui permettront d'avoir des diviseurs entre 0 et 100.
- Le premier remède nous a fait penser en terme de rotation ; les points portés par les droites D_n peuvent être portés par des cercles concentriques, les longueurs d'arcs seront bien proportionnelles aux rayons ($d_1 = R d_0$). De plus, la règle tournante peut alors être graduée pour la lecture car le faisceau de cercles



Disque de base — fig. 5

de centre O coupe un rayon suivant une graduation qui reste de pas constant dans la rotation, ce qui n'était pas vrai dans les constructions précédentes.

C. Voici le disque de base ainsi construit ; nous pouvons l'incorporer à l'intérieur du disque précédemment construit pour les modulus ; il reste à construire quelques disques permettant l'exploitation des propriétés que nous venons de découvrir, afin de multiplier, diviser, simplifier les fractions ...



Disque produit quotient ; lecture décimale — fig. 6

La Rédaction espère publier dans le prochain numéro un article sur l'oeuvre de Georges CUISENAIRE, qui vient de mourir (le 1er janvier 1976).

VIE DE L'ASSOCIATION

Horaires de mathématiques dans le premier cycle du second degré

(Motion adoptée le 18-1-1976 par le Comité National)

Le Comité National de l'A.P.M. prend acte, en ce qui concerne l'enseignement des mathématiques dans le premier cycle du second degré, des graves difficultés déjà rencontrées, pour la plupart des élèves, dans le cadre des horaires et programmes actuels. Le non-accroissement de l'horaire de mathématiques exigerait à lui seul une notable réduction des objectifs du contenu mathématique du premier cycle.

Mais le Comité prend acte également des limites d'une telle réduction eu égard aux exigences en mathématiques, dès l'entrée dans le premier cycle et plus encore à sa sortie,

- des divers autres enseignements,
- de la vie pratique,
- des possibilités à ménager pour des formations ultérieures, formation permanente aussi bien que C.E.T. ou lycées.

Le Comité constate que, de ce fait, une réduction globale de l'horaire de mathématiques du premier cycle entraînerait, dans l'état actuel des choses :

- une aggravation d'inégalités discriminatoires au détriment des élèves non soutenus parallèlement à l'école, pour le rôle que pourraient jouer les C.E.T., pour les possibilités d'accès au second cycle scientifique, pour d'éventuelles formations permanentes ultérieures ;

— un amoindrissement de l'école publique au bénéfice de cours privés organisant des leçons supplémentaires de mathématiques.

De plus, une réduction globale de l'horaire en mathématiques du premier cycle ne pourrait qu'inciter, voire obliger, les professeurs de mathématiques à préférer un enseignement dogmatique à un enseignement à base d'activités plus formatrices. Ainsi serait détruit tout espoir de rénovation pédagogique en mathématiques.

Le Comité estime d'ailleurs, parallèlement, qu'il est nécessaire que se développe, dans le premier cycle, un enseignement scientifique expérimental doté de moyens suffisants.

Le Comité demande donc au ministre, à l'Inspection Générale de mathématiques, aux autres Associations de spécialistes, à tous ceux qui se sentent concernés :

— de prendre conscience du caractère gravement préjudiciable pour les élèves, surtout les moins favorisés, et en l'état actuel des choses, d'une éventuelle réduction des horaires globaux de mathématiques du premier cycle ;

— de prévoir ou de soutenir le maintien de l'horaire actuel global du premier cycle, ce seul maintien exigeant d'ailleurs déjà une réduction des contenus des programmes globaux du premier cycle et des exigences en mathématiques du second cycle actuel.

Compte rendu de la séance du 22 novembre 1975 de la Commission Formation des maîtres

(9 h à 18 h)

Les informations et documents communiqués par différents membres de la commission ont conduit celle-ci à prendre conscience du danger que représente la signature des conventions entre les Universités et le Ministère de l'Education.

Plutôt que de rappeler au Ministère les exigences de l'A.P.M.E.P. en matière de formation des maîtres, il a semblé à la commission préférable d'alerter les Universités du danger et d'orga-

niser l'échange, entre celles-ci, d'informations sur la réflexion qui devra être menée sur ce problème. Dans ce but, une lettre d'information et un questionnaire ont été élaborés et envoyés à :

- MM. les Présidents d'Université
- MM. les Directeurs d'E.N.S. et d'E.N.N.A.
- MM. les Directeurs d'U.E.R. de Mathématiques et de Sciences de l'Education et de Didactique
- MM. les Directeurs de Départements de Mathématiques
- MM. les Directeurs d'I.R.E.M. et d'I.P.E.S. (Sciences)

(cf. annexe 1).

Le problème du reclassement de certains instituteurs en P.E.G.C. a été étudié. Une sous-commission a rédigé à ce sujet le texte joint en annexe 2.

Monsieur De Beauvais, Président de l'Association des enseignants et chercheurs en Sciences de l'Education, a fait part de l'organisation par celle-ci d'une journée nationale d'études sur les problèmes de formation des maîtres, le 24 janvier à Paris. La commission sera représentée par A. ROUCHIER à une réunion préparatoire le 5 décembre.

La commission a décidé de se réunir à nouveau le 21 février 1976 pour analyser les réponses reçues des Universités et établir un dossier solide et cohérent face au Ministère et au Secrétariat d'Etat.

ANNEXE 1

Clermont-Ferrand, le 25 novembre 1975

Mon cher collègue,

La commission "Formation des Maîtres" de notre Association s'est réunie le 21 Novembre 1975 pour une séance de travail qui lui a fait prendre conscience de la nécessité d'une prise de position des Universités vis-à-vis du problème de la formation des enseignants. Cette question est vitale pour l'avenir de l'enseignement en France et, entre autres, des Universités.

Ce problème n'est pas nouveau mais il présente aujourd'hui un caractère d'urgence :

- d'une part, personne ne peut se satisfaire de la situation actuelle, reconduite d'année en année, toutes les solutions proposées par les Ministères successifs ayant fait contre elles l'unanimité. La préparation aux concours de recrutement ne saurait en aucun cas être considérée comme une véritable formation.
- d'autre part, le Ministre de l'Éducation utilise ces carences dans la formation pour essayer d'imposer, très rapidement et sans véritable consultation, un projet de réforme de la formation des maîtres qui, sous certains aspects, paraît plus rétrograde encore que ceux de ses prédécesseurs.

D'ores et déjà, sous le couvert d'expériences, par des conventions passées avec certaines Universités (trois à notre connaissance), il en commence la mise en place. Il serait souhaitable que les Universités se concertent pour éviter de se présenter en ordre dispersé pour l'établissement de telles conventions, et dégagent les grandes lignes d'un projet commun.

Ce que nous connaissons des projets de conventions en cours de signature, des modifications inacceptables qui ont été proposées par le Ministre à d'autres projets et des déclarations ministérielles, nous conduit à attirer votre attention sur un certain nombre de dangers :

- 1°) Seuls les professeurs de second cycle de lycée auraient droit dans ces projets à une formation universitaire.
- 2°) Seule la formation propre à la discipline serait pour le moment confiée à l'Université. On n'envisagerait pas de formation psychologique et sociologique. La formation à la didactique de la discipline, limitée à des stages, serait coupée de la Recherche que les Universités ont pu développer dans ce domaine.
- 3°) La formation initiale serait isolée de la formation continue.

Rappelons ce que propose l'A.P.M.E.P. :

- 1°) unification de la durée de formation de tous les maîtres de la Maternelle à la Terminale ;

- 2°) la formation mathématique se fait à l'Université ; elle est en grande partie commune aux futurs enseignants et aux étudiants se dirigeant vers d'autres professions ;
- 3°) la formation professionnelle théorique et pratique doit s'appuyer sur les résultats de la Recherche Pédagogique ; le rôle des I.R.E.M. doit y être important ;
- 4°) ces deux formations doivent être menées conjointement dans le temps et étroitement coordonnées ;
- 5°) il doit y avoir interpénétration de la formation initiale et de la formation continue pour le plus grand bénéfice des deux parties.

Notre commission souhaite favoriser l'échange d'informations entre les Universités sur ce problème, et susciter une réflexion commune en organisant une enquête en deux parties :

- une analyse de la situation actuelle
- une description des évolutions futures envisagées ou souhaitées.

Nous n'avons pas voulu, étant donné la diversité des formations, vous adresser un questionnaire trop rigide. Vous trouverez seulement ici un plan suggéré pour présenter vos réponses. Vous êtes invité à y joindre tout document ou projet déjà élaboré.

Nous souhaiterions recevoir vos réponses au plus tard le

15 JANVIER 1976

et nous nous efforcerons de vous faire connaître une synthèse des réponses obtenues dans le courant du mois de Février.

Je vous prie d'agréer, mon cher collègue, l'expression de mes sentiments les plus distingués.

P.L. HENNEQUIN

Secrétaire Général de l'A.P.M.E.P.
Professeur à l'Université de Clermont

ENQUETE

Ière Partie

Formation actuelle des enseignants de mathématiques

1er Point

Décrivez les grandes lignes du contenu

- a) en Mathématiques du premier cycle
du deuxième cycle
du troisième cycle

Pour chaque cycle, indiquer s'il est divisé en Unités de Valeurs ou certificats, ce qui est obligatoire et facultatif, la liberté laissée dans le choix de l'ordre.

- b) dans les disciplines *autres que Mathématiques* (exemple : sociologie de l'éducation, méthodologie de l'enseignement programmé, techniques audiovisuelles ...).
- c) *en didactique des mathématiques* (études scientifiques sur l'enseignement des mathématiques).

Précisez, pour chacun des points a, b, c, les différentes méthodes d'enseignement utilisées.

2ème Point

Y-a-t-il des *enseignants en exercice* qui suivent les mêmes enseignements que les étudiants en *formation initiale* ?

Si oui, précisez à quels ordres d'enseignement ils appartiennent et comment leurs activités professionnelles influent sur ces enseignements.

3ème Point

Y-a-t-il des enseignements de formation continue réservés aux enseignants en exercice ? Préciser leur organisation et les ordres d'enseignement concernés.

4ème Point

Organisation de la préparation aux concours de recrutement:

C.A.P.E.S.

Agrégation

5ème Point

Existe-t-il des équipes de recherche sur l'enseignement des Mathématiques ?

Préciser leur composition et les thèmes de recherche.

Existe-t-il un D.E.A. de didactique des mathématiques ?

Préciser son organisation.

6ème Point

Quelles sont les relations entre l'I.R.E.M. et les autres départements pour la formation des maîtres et la recherche sur l'enseignement des mathématiques ?

IIème Partie

Projets ou demandes de création

1er Point

Envisagez-vous une réforme du premier cycle
du deuxième cycle
du troisième cycle

quant au contenu des enseignements
à la forme des enseignements
aux modalités de contrôle ?

2ème Point

Quels sont vos vœux relatifs aux structures futures de la formation des maîtres

du premier degré

du second degré

de l'enseignement supérieur ?

3ème Point

Quelles liaisons envisagez-vous entre la formation des maîtres en Mathématiques et dans les autres disciplines ?

4ème Point

Quelles relations entre formation initiale et formation permanente ?

ANNEXE 2

A PROPOS DE L'INTEGRATION DANS LE CORPS DES P.E.G.C. D'ENSEIGNANTS N'AYANT PAS SUIVI LE CURSUS UNIVERSITAIRE

(Instituteurs, Maîtres enseignant en voie III, Maîtres auxiliaires)

A) La Commission Formation des Maîtres de l'A.P.M.E.P., réunie le 22 Novembre à Paris, constate :

- que dans les cinq ans à venir, la plupart — si ce n'est la totalité — des maîtres cités plus haut seront titularisés dans le corps des P.E.G.C., c'est-à-dire qu'ils pourront, entre autres, enseigner la mathématique jusqu'en classe de troisième.
- que la majorité de ces maîtres n'ont pas eu de formation scientifique comparable à celle qu'ont actuellement les certifiés ou les P.E.G.C. de section III.
- que la charge de leur service (21 ou 24 h) ne leur laissant pas le temps de s'informer, ou de participer avec profit à des actions de formation permanente, les place dans une situation défavorable (encore une fois, les enseignants les moins formés initialement auront, au niveau du premier cycle, 21 h au lieu de 18 h pour les certifiés et 15 h pour les agrégés).
- qu'ils pourront se sentir mal à l'aise d'avoir à donner un enseignement pour lequel ils n'étaient pas préparés, et, ainsi, craindre de ne pas donner aux élèves une formation que ceux-ci sont en droit d'attendre.
- que toutefois, dans la situation actuelle, leur promotion s'impose.

B) La Commission rappelle les principes énoncés dans la Charte de Caen (Juin 1972) :

- 1 "la formation permanente fait partie intégrante du service des enseignants
.....
- 3 elle permet, dans le cas présent, à tout enseignant de changer de catégorie en complétant ses études scientifiques ou sa formation professionnelle grâce à une décharge de service qui peut être totale pendant un an".

- C) Compte tenu des constats précédents et du rappel, la Commission souhaite la mise en place d'une véritable formation scientifique intégrant la formation didactique de la discipline (ou des disciplines) enseignée (s), sans oublier l'aspect psycho-socio-pédagogique de l'enseignement aux élèves de 11 à 17 ans.

Cette structure devra combiner les actions des divers organismes actuellement concernés (Centre de Formation P.E.G.C., I.R.E.M., Université). En aucun cas, elle ne devra se limiter à des actions purement administratives ou apparemment pédagogiques.

- D) La Commission propose pour ces enseignants :

- une décharge de service obligatoire pendant un an, et, les années suivantes, une formation permanente intégrée au service : ce service serait réduit à 15 h devant les élèves. Des tâches de formation permanente, de concertation au sein de l'établissement et de recherche sur l'enseignement (comportements des élèves et contenus) constitueraient le complément de service.

Conformément au mandat reçu de l'Assemblée Générale d'Orléans 75, le Bureau National est intervenu auprès de l'Ambassade d'Uruguay en France, en faveur de Luis Massera, professeur de Mathématiques à l'Université de Montevideo, actuellement détenu par les autorités de son pays.

Motion du Comité National du 18-1-76

Le Comité National de l'A.P.M.E.P. réuni le 18 janvier 1976 à Paris constate que depuis la réunion de la Commission Formation des Maîtres de l'A.P.M.E.P. du 22 novembre 1975, des maîtres de la voie III ont terminé leur stage et sont intégrés dans le corps des PEGC. Parmi ceux-ci, certains ont réussi au CAPCEG ; les examens des autres ont été brutalement interrompus par un téléx ministériel annonçant une formation organisée par correspondance par le CNTE.

L'A.P.M.E.P. s'indigne de ce procédé, d'une part, et, d'autre part, instruite par l'expérience de l'information donnée aux professeurs de CET, émet toutes réserves sur la valeur de cette formation.

Compte tenu des constats nouveaux, le Comité APMEP

- souhaite que la situation de tous ces maîtres soit clarifiée,
- prend à son compte les souhaits et les propositions de la Commission du 22 novembre 1975.

Université de Liège
Semaine du 16 au 22 août 1976

"L'ETAT SOLIDE"

Pour tout renseignement, écrire à :

M. L'Inspecteur Général MAGNIER
22 rue Henri Barbusse, 75005 PARIS

J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes, comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion.

Henri Brulard (Stendhal)

Commission Formation Permanente

A) Compte rendu de la réunion du 30 novembre 1975.

Participants : H. Baylac, L. Benhamou, J. Harris, G. Laconde (Académie de Toulouse) ; J.-P. Corduant (Ofrateme) ; M. Detrey (Reims) ; J. Fricker (Nancy-Metz) ; R. Laurent, J. Vetticoz (Versailles) ; J. Maria (Nice) ; D. Poisson (Lille) ; G. Thorel (Grenoble).

La réunion avait pour objet de faire le point sur l'obtention par des adultes du C.A.P. par unités capitalisables.

1. Historique

A partir de 1954, en partie pour répondre à des problèmes de reconversion de certaines régions (mines, textiles), se sont créées des actions caractérisées par un effort d'environnement de la formation qui aboutirent à la création de *zones d'action collective de formation* définies par une convention avec l'Etat, fournissant une partie des moyens nécessaires. Extrait de cette convention :

Article 4.

L'action collective de formation propose un ensemble équilibré de formations, organisé en un système global d'unités définies en termes d'objectifs et comprenant :

- des formations de base générales et techniques ;
- des formations de développement personnel et culturel ;
- des formations pré-professionnelles et professionnelles conduisant ou non à la délivrance d'un diplôme.

Elle se caractérise par :

- la mise en oeuvre d'actions de formation répondant à des besoins explicites formulés individuellement ou collectivement par les résidents. Pour ce faire, l'action collective comprend un dispositif d'enquête, de sensibilisation, d'accueil et d'orientation des stagiaires ;

- la formation continue des formateurs, des temps réservés pour le travail en équipes pluridisciplinaires et les concertations entre les formateurs ;
- la production éventuelle de moyens pédagogiques spécifiques ou de recours à des média existants ;
- un dispositif d'évaluation pour chaque stagiaire, pour chaque groupe et pour l'ensemble de l'action.

La population concernée était d'autre part, par le biais d'un sous-comité, très fortement associée à la définition de la politique de formation. Rapidement, certains formés voulurent valider leurs acquisitions par des diplômes (en particulier, le C.A.P.). Les modalités pratiques des examens se révélèrent peu adaptées aux adultes, ce qui conduisit à rechercher un système d'obtention des C.A.P. qui réponde à la demande des travailleurs, tout en préservant la valeur du diplôme délivré par l'Etat.

La réponse a été la préparation par *unités capitalisables*. Dès 1967, le diplôme a été découpé en un certain nombre d'unités constitutives que l'adulte obtient au rythme qui lui est propre. Une fois qu'il possède l'ensemble des unités, il acquiert le diplôme (l'un des huit C.A.P. ainsi découpés). L'expérimentation, commencée dans quatre académies, s'est étendue à la rentrée 75 à six nouvelles académies.

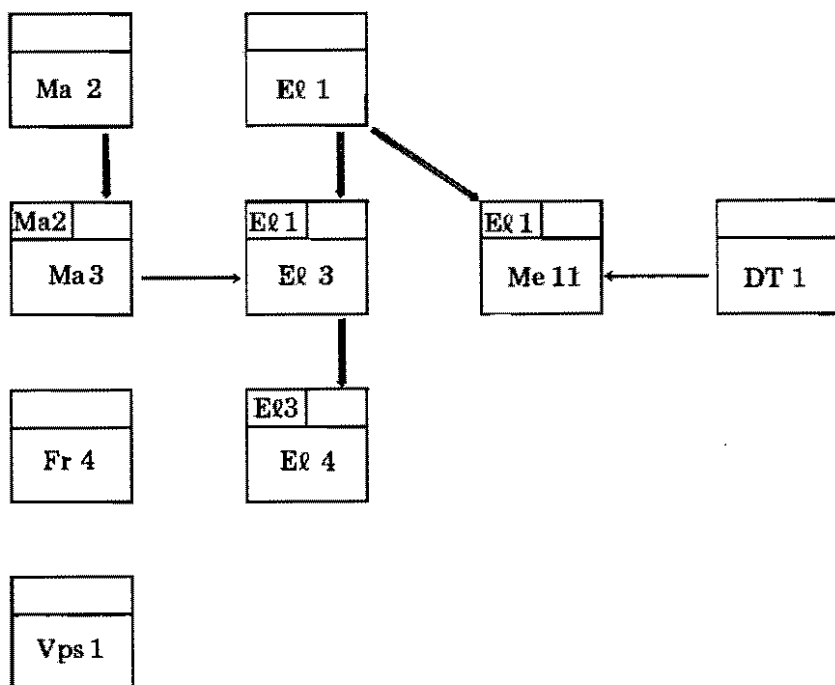
Une unité se définit de façon tout à fait particulière. Pas en termes de programme, ni de contenu, ni de durée, mais en termes de résultats, de ce que l'on attend de l'adulte, en termes de "être capable de". Cela s'inscrit dans un courant que l'on dénomme plus généralement la "pédagogie par objectifs".

Certaines de ces unités étaient communes aux huit C.A.P. : français (FR4), mathématiques (MA2 et MA3), vie professionnelle et sociale (VPS) et dessin technique (DT1), d'autres communes à certains C.A.P. : électricité (EL1,...), d'autres spécifiques. Exemple de découpage :

C.A.P. par Unités Capitalisables

ELECTROTECHNIQUE

Option A : Electromécanicien
ACQUISITION DES UNITES (Ordre)
(Annexe I de l'arrêté du 14 mai 1973)



Chaque rectangle représente une unité. L'unité est notée dans la partie inférieure, la partie supérieure étant réservée aux prérequis à l'unité.

—————> représente "préalable"

—————> représente "ordre d'acquisition"

ORGANISATION DE L'ITINERAIRE DE FORMATION

Dans le système de formation par unités capitalisables, il existe :

- des ordres d'acquisition pour certaines unités ;
- des prérequis pour d'autres unités.

Ordre d'acquisition

- Ma 3 doit être obtenue avant Eℓ 3 ;
- D T 1 doit être obtenue avant Me 11.

Préalables

- Ma 3 a pour préalable Ma 2 ;
- Me 11 (Mécanique 11) a pour préalable Eℓ 1 ;
- Eℓ 3 a pour préalable Eℓ 1 ;
- Eℓ 4 a pour préalable Eℓ 3.

2. Validation de ces unités

Il faut noter tout d'abord que la formation peut être individualisée. Un adulte qui estime répondre aux critères du "être capable de" dans certaines unités est dispensé de suivre tout le processus. Un contrôle ponctuel permettra de voir si, effectivement, il a atteint le niveau et on lui donnera aussitôt l'attestation. Il pourra ainsi consacrer du temps aux domaines dans lesquels il éprouve des difficultés. Deuxièmement, il peut être organisé un contrôle continu tout au long de la formation, ce contrôle étant la mesure du chemin parcouru et de celui qui reste à parcourir. L'évaluation n'est plus extérieure à l'enseignement, elle est intégrée à l'acte pédagogique, c'est une *évaluation formative*. Du même coup, se développe l'*auto-évaluation* : l'adulte lui-même prend progressivement conscience de ses acquisitions. Quand l'adulte a atteint le niveau caractéristique de l'unité, le formateur se tourne vers l'équipe éducative d'abord, puis vers le jury permanent qui est habilité à délivrer l'attestation. Ce jury est composé conformément aux textes, de représentants des employeurs, de représentants des salariés et de représentants des enseignants.

3. Prolongement de l'expérience

Ces tentatives ont conduit à s'interroger plus en détail sur l'objectif de formation (C.A.P.) et donc à une remise en cause de l'obtention du diplôme lui-même et à une meilleure définition des objectifs de chacune des unités (voir annexe 2). L'expérimentation a donc été étendue dans deux directions différentes et indépendantes :

- *adultes* : extension à d'autres académies et à d'autres C.A.P.
- *jeunes des C.E.T.* : contrôle continu.

Compte tenu de ces expériences, différentes commissions redéfinissent les modalités d'obtention des C.A.P.

Il reste un *seul diplôme*, mais il peut être obtenu de trois manières :

- *traditionnelle*, avec examen ponctuel pour les jeunes ou les adultes ;
- par *contrôle continu*, pour certains jeunes ;
- par *unités capitalisables* pour certains adultes.

Pour les adultes, il y a actuellement six domaines de formation et un nouvel essai de définition des exigences minimales de chaque unité (voir annexe 2).

ANNEXE 1

Ancienne manière de définir une unité

Formation par unités capitalisables	Unité de Formation GEOMETRIE - TRIGONOMETRIE	Ma 3
---	---	------

L'unité Géométrie - Trigonométrie doit apporter des connaissances mathématiques qui sont indispensables dans la vie professionnelle. Indépendamment de cet aspect, l'apprentissage de la géométrie et de la trigonométrie est un moyen de développer l'aptitude au raisonnement.

OBJECTIFS OPERATOIRES

L'unité de Géométrie - Trigonométrie a pour objectif de :

familiariser la personne avec les figures géométriques élémentaires : droites, triangles, cercles, quadrilatères ; de lui donner les moyens de réaliser des constructions simples (problèmes de traçage, dessin technique) ;

faire utiliser à la personne les relations trigonométriques dans les triangles rectangles, afin de pouvoir les appliquer à des problèmes de mesures, de contrôle, de réglage (problèmes de pentes, conicité, cote sur angles) ;

permettre l'approche de la notion de fonction trigonométrique.

FORMATION PERMETTANT D'ATTEINDRE LES OBJECTIFS DE L'UNITÉ

La formation s'adresse à des adultes qui possèdent l'attestation de l'unité Arithmétique-Initiation à l'algèbre (Ma2).

Contenu de la formation :

Les contenus de formation sont définis par les objectifs de l'unité, ils concernent :

droites, segments, angles et applications à la construction de perpendiculaires, parallèles et bissectrices ;

étude de figures planes et calcul de leur surface : triangles (lignes remarquables, somme des angles, égalité, triangles particuliers) ; cercles (cercles et droites, cercles et triangles) ;

lignes trigonométriques d'un angle aigu (sinus, cosinus, tangente, cotangente) ;

relation entre les lignes trigonométriques d'un angle ;

extension des définitions précédentes au cercle trigonométrique ;

déplacement d'un point sur le cercle trigonométrique, coordonnées de ce point, notion de fonction trigonométrique ;

classification de quadrilatères et calcul de leur surface (quadrilatères, parallélogrammes, rectangles, losanges, carrés) ;

calcul de volumes simples.

A N N E X E 2 Nouvelle manière de définir une unité MINIMUM DE CAPACITES REQUISES

M. 3

← L'ADULTE DOIT ETRE CAPABLE DE →

<i>Effectuer un calcul</i>	
1. Extraire la racine carrée d'un nombre décimal positif donné, soit par la lecture d'une table, soit par approximation, soit... ceci avec au plus 3 chiffres significatifs.	
2. Calculer le carré et le cube d'un nombre réel.	
3. Etant donné une expression numérique, utilisant les quatre opérations avec des nombres réels et munie de parenthèses et d'exposants entiers positifs :	
a) en donner l'ordre de grandeur ;	
b) la calculer, sans qu'on exige dans les calculs l'emploi de plus de 3 chiffres significatifs.	
4. Effectuer un calcul du type	$10^m \times 10^n$ $(10^p)^q$
m, n, p et q étant des entiers positifs.	

<i>Mathématiser une situation</i>	
N.B. Les situations géométriques sont obligatoirement prises en compte.	
1. Traduire par un graphique non imposé des informations extraites d'une situation : exemple de graphismes : dessin géométrique, plan, schémas divers, etc...	
2. A partir de situations conduisant à des fonctions de type :	
$x \mapsto x + a$ $x \mapsto x^2$ $x \mapsto ax$	
établir et inverser les relations existant entre deux éléments différents.	
N.B. Cette capacité ne concerne pas l'étude des fonctions elles-mêmes, mais la traduction des situations étudiées.	
3. Dans la limite des capacités acquises, traiter le modèle issu de cette situation (soit par l'algèbre, soit graphiquement, soit...).	
4. Apprécier la validité d'un résultat par rapport à la situation d'origine.	

<i>Gérer une formule</i>	
1. Calculer la valeur numérique d'une expression littérale faisant intervenir parenthèses et exposants entiers positifs.	
2. Etant donnée une expression du type	
a (opération) b = c	
exprimer a en fonction de b et de c, l'opération étant une addition, une soustraction, une multiplication ou une division.	
3. Etant donnée une expression du type	
$a = b \cos c$	
$a = b \sin c$	
$a = b \operatorname{tg} c$	
exprimer b en fonction de a et de c, ou c en fonction de a et b.	

<i>Lire et construire</i>	
1. Lire un tableau numérique.	
2. Etant donnée une situation traitée par un graphique sur papier millimétré, trouver la ou les valeurs inconnues correspondant à une valeur fixée.	
3. Représenter graphiquement sur papier millimétré un tableau de valeurs.	
4. Etant donnée une situation conduisant à une fonction linéaire, en donner une représentation graphique, soit à partir de l'un des états de la situation, soit à partir du coefficient de proportionnalité.	
5. Etant donnée une situation (plan ou espace) décomposée en triangles rectangles, définis à l'aide de longueurs ou d'angles :	
a) construire la figure à partir d'un segment donné, à l'aide de la règle, compas, équerre, fausse équerre, rapporteur. Exemple : construire un triangle rectangle consistant un côté et un angle ;	
b) une des longueurs initiales étant donnée, retrouver les autres longueurs initiales.	
6. Etant donné un triangle rectangle défini par certains de ses éléments (angles ou longueurs), résoudre ce triangle : calculer les angles et les longueurs en utilisant :	
- soit le cercle trigonométrique,	
- soit une table trigonométrique,	
- soit une règle à calcul	
- soit une machine à calculer...	

B) Préparation du Congrès International de Karlsruhe.

Du 16 au 18 Août 1976, se tiendra à Karlsruhe (Allemagne), le troisième Congrès International sur l'Enseignement des Mathématiques.

Pour la première fois, l'une de ses sections sera consacrée à la *formation continue des adultes en mathématiques*. L'A.P.M.E.P. et les I.R.E.M. souhaitent présenter un rapport sur ce sujet.

Les instructions envoyées par le Comité des programmes précisent qu'un tel rapport doit mettre en évidence *les nouvelles tendances* de l'enseignement des mathématiques, développements en cours et développements en germe, à l'exclusion de tout exposé sur l'organisation des enseignements propres à chaque pays.

A cet effet, nous devons donc rassembler une documentation exhaustive et en extraire les aspects les plus significatifs. C'est pourquoi la Commission "Formation Continue" de l'A.P.M.E.P. a décidé de mener une enquête la plus large possible.

Ce texte et le questionnaire ci-joint sont envoyés :

- à toutes les personnes qui sont venues au moins une fois aux travaux de la Commission "Formation Continue" de l'A.P.M.E.P. ;
- aux I.R.E.M. ;
- aux D.A.F.C.O. ;
- à quelques organismes de formation continue et animateurs dont nous avons les adresses.

Nous risquons ainsi d'oublier des actions de formation continue menées sous la responsabilité d'autres Ministères que celui de l'Education et d'importants établissements privés.

Nous vous remercions par avance :

- a) de transmettre une copie de ce dossier ou de nous communiquer l'adresse de toute personne ou organisme menant une action de formation continue en mathématiques et qui pourrait échapper à la liste citée plus haut ;
- b) de bien vouloir répondre au questionnaire ci-joint ;
- c) de nous adresser un ou plusieurs documents de travail que vous estimez significatif(s) de votre action, en le situant dans son contexte d'utilisation (période du stage, méthode de travail, progression, etc...).

Les réponses doivent être envoyées le plus rapidement possible à :

Alain BOUVIER
Résidence Haute Roche
5, rue du Centenaire, 69310 PIERRE BENITE
(tél. (78) 51.10.56)

Dans le cas où vous n'auriez pas le temps de répondre en détail au questionnaire, nous souhaiterions néanmoins recevoir les adresses que vous pouvez nous communiquer et vos documents propres.

Alain BOUVIER

N.B. : Les personnes qui le souhaitent peuvent, à titre personnel et indépendamment de ce rapport, présenter en détail leurs travaux pendant le Congrès.

PREPARATION DU CONGRES INTERNATIONAL DE KARLSRUHE

Questionnaire

NOM :
Prénom :
Etablissement :

1 Description de l'action de formation continue

- 1.1 — Thème :
- 1.2 — Objectif :
- 1.3 — Programme :
- 1.4 — Public concerné :
- 1.5 — Organisme responsable :
- 1.6 — Conditions d'admission :
- 1.7 — Lieu :
- 1.8 — Origine de la demande :
- 1.9 — Durée du stage :
- 1.10 — Rythme et fréquence :
- 1.11 — Effectifs :
- 1.12 — Animiez-vous seul ou à plusieurs :
- 1.13 — Etait-ce pluridisciplinaire ?
- 1.14 — Si oui, précisez :

2 Motivations

- 2.1 — Quelles étaient les demandes, attentes, objectifs et motivations des stagiaires ?
- 2.2 — Quelles sont les sanctions du stage ? (examen ou non) : ...
- 2.3 — Se traduit-il par des promotions professionnelles ? :
- 2.4 — Le stage a-t-il des conséquences sur la vie professionnelle des stagiaires au sein de leur entreprise ?
- 2.5 — Ce stage a-t-il des conséquences sur la vie quotidienne (familiale) des stagiaires ?

3 Méthodes générales

- 3.1 — Le contenu développé est-il le même (correspond-il) à un programme de formation initiale ?
- 3.2 — Les méthodes d'enseignement sont-elles les mêmes qu'en formation initiale ?
- 3.3 — Voyez-vous des différences fondamentales entre Formation Continue et Formation Initiale ?
- 3.4 — Quelles sont les méthodes pédagogiques employées (travail par groupes, cours magistral, audio-visuel, enseignement programmé, etc...)

4 Questions spécifiques

- 4.1 — Enseignez-vous des mathématiques comme outil ou comme objet de culture ?
 - 4.2 — Partez-vous d'exemples multiples pour dégager des résultats ou des outils, ou bien illustrez-vous par des exemples des résultats préalablement démontrés ? (pratiquez-vous des méthodes inductives ou déductives ?) :
 - 4.3 — Quelle place faites-vous aux démonstrations ?
 - 4.4 — Quelles sont les parties des mathématiques que vous développez le plus ?
- | | |
|-------------------------|-------------------------------|
| - les quatre opérations | - les ensembles |
| - les fractions | - la combinatoire |
| - la règle de trois | - l'informatique |
| - le calcul algébrique | - la géométrie |
| - la logique | - la recherche opérationnelle |
| - l'algèbre linéaire | - l'analyse |
| - les probabilités | - les statistiques |
| - | - |
| - | - |
| - | - |
| - | - |

- 4.5 — Privilégiez-vous les mathématiques d'une profession précise ?
.....
- 4.6 — Travaillez-vous sur des thèmes (par exemple de la vie courante) ne s'inscrivant pas nécessairement dans un schéma mathématique traditionnel ?
Si oui, pouvez-vous préciser ?
- 4.7 — Vos activités en Formation Continue vous ont-elles :
- donné des thèmes de travail en Formation Initiale ?
- amené à modifier votre enseignement en Formation Initiale ?
- 5 Adresses de personnes ou d'organismes assurant des actions de Formation Continue en mathématiques :
.....
.....
.....

C) Résultats du premier questionnaire sur les tendances de l'enseignement des mathématiques en formation continue.

Ce questionnaire et son texte de présentation (voir B)) ont été envoyés en un ou plusieurs exemplaires :

- aux membres de l'A.P.M.E.P. s'étant signalés au moins une fois à l'intention de la Commission Formation Permanente,
- à tous les I.R.E.M.,
- à tous les délégués académiques à la Formation Continue (DAFCO),
- à certaines chambres de commerce et d'industrie,
- et à toutes les personnes dont les adresses nous ont été communiquées sur des réponses à ce questionnaire.

Malgré le peu de temps dont nous avons disposé, nous avons reçu plus de 70 réponses (1), la plupart venant d'animateurs répondant à titre individuel (ce que nous souhaitions) et quelques-unes décrivant le travail global d'organismes de formation continue. Dans deux ou trois cas seulement les réponses au questionnaire furent (comme nous le demandions) accompagnées de documents de travail.

(1) Nous continuons à en recevoir.

La formation continue des enseignants faisant l'objet d'une autre section au congrès de Karlsruhe, nous n'avons pas pris en compte les cinq ou six réponses concernant celle-ci.

Nous souhaitions de la part des animateurs des réponses à titre individuel décrivant leur action, afin de cerner *la réalité* et non pas *les intentions* des institutions au sein desquelles ils travaillent. Conformément aux instructions reçues des organisateurs du Congrès, nous avons surtout cherché à dégager *les tendances* et plus particulièrement celles en cours d'évolution : "ce qui bouge".

Les résultats qui se dégagent sont pour nous une information parmi d'autres qu'il faudra enrichir par la suite. Nous considérons ces réponses comme provenant d'un échantillon probablement non représentatif.

Nous nous sommes souvent heurtés à des difficultés de dépouillement : certaines questions auraient dû être formulées différemment, d'autres précisées, etc. Nous n'avons pas eu le temps de chercher les corrélations entre différentes réponses et pour faciliter le dépouillement nous avons procédé parfois à certains amalgames.

Signalons que plusieurs fois, sur un même questionnaire, les réponses apportées étaient contradictoires entre elles.

Pour son travail futur, la Commission Formation Permanente estime que ce questionnaire lui aura permis :

- de constituer un précieux fichier d'adresses assez complet,
- de situer les points dignes d'être approfondis et pour lesquels, par exemple, elle pourrait se livrer à une enquête plus précise au moyen de méthodes d'investigations plus scientifiques.

Condensé des résultats

Un tiers des actions concernées ne s'intègrent à aucun cursus précis ; un tiers de ces actions s'intègrent à un cursus et le tiers restant est "en liaison" avec un cursus.

La moitié des formés est constituée d'O.S. et d'O.P. et les organismes responsables des actions appartiennent pour deux tiers à l'Education ; parmi ceux-ci, une majorité est sous la responsabilité des GRETA.

Ces chiffres en partie distincts des moyennes nationales sont étroitement liés aux animateurs contactés qui dépendent surtout du Ministère de l'Education.

- Le rythme des actions est très divers et 10 % sont à plein temps.

Effectifs des groupes : pratiquement aucun groupe n'excède vingt inscrits et une forte majorité comprend moins de quinze inscrits.

- Les questions concernant la co-animation et la pluridisciplinarité furent mal posées et mal comprises.

Néanmoins, les réponses tendent à prouver qu'il y aurait soit une tendance à la co-animation et à la pluridisciplinarité, soit un enseignement des mathématiques parallèlement à d'autres disciplines, mais rarement d'enseignement de mathématiques isolé de tout.

- Demandes et attentes des stagiaires :
 - besoin de culture et utilisation dans la vie courante (un tiers) ;
 - préparation d'un diplôme (un tiers) ;
 - obtention d'une qualification professionnelle (un tiers).

On peut rapprocher ces chiffres de ceux trouvés au début du questionnaire concernant les cursus.

La moitié des actions a lieu sans examen de fin de stage, mais néanmoins avec délivrance d'une attestation dans un certain nombre de cas.

Le tiers des actions ne conduit pas à une promotion professionnelle immédiate. Pour un tiers, la réponse est positive. Notons toutefois que ces réponses émanent de l'avis des animateurs et non pas des formés eux-mêmes.

- Conséquences sur la vie quotidienne : la question était mal posée ; mais des conséquences négatives furent signalées, notamment dues aux cours du soir et à la fatigue.

Les points les plus importants

1) Pour un tiers seulement le programme des actions de formation continue semble correspondre à un programme de formation initiale et la méthode d'enseignement choisie *n'est pas la même dans les deux tiers des cas.*

2) Une majorité quasi absolue des animateurs voit des *différences fondamentales* entre formation initiale et formation continue. Exemples les plus cités :

- auditoires moins nombreux,
- niveaux hétérogènes,

- expérience professionnelle des stagiaires,
- motivation plus grande qu'en formation initiale,
- motivation plus orientée vers les applications,
- public moins passif,
- soucis utilitaires,
- absence de programme contraignant dans un grand nombre de cas,
- absence d'examen ou de bachotage,
- relation formateur — formé plus égalitaire.

Des nuances sont indiquées suivant les niveaux de culture des formés.

3) Dans la moitié des cas il s'agit de travail de groupes et *le quart des actions seulement utilise le cours magistral*. Les autres utilisent des moyens audio-visuels, de l'enseignement programmé, etc.

4) La question opposant la mathématique comme *outil* ou comme *objet de culture* fut relativement mal acceptée. Le tiers des animateurs considère que c'est l'un et l'autre, la majorité d'entre eux privilégie l'outil et sur les réponses que nous avons reçues, trois personnes seulement ont classé la culture en premier.

5) Méthodes inductives ou déductives : la moitié des animateurs emploie une méthode inductive, un tiers environ alterne les méthodes ; seuls 10 % *emploient des méthodes déductives* et celles-ci concernent en général des formations continues à haut niveau, type ingénieurs.

6) *Démonstrations* : nous avons remarqué l'attitude face aux démonstrations. *Une majorité écrasante n'emploie pas, ou emploie peu, de démonstrations* : quatre animateurs seulement ont affirmé pratiquer des démonstrations.

7) Contenu mathématique : les sujets les plus cités (environ 50 % des cas) concernent :

- les quatre opérations,
- les fractions,
- la règle de trois,
- le calcul algébrique,
- la géométrie.

D'autres sujets (combinatoire, etc.) reviennent plusieurs fois mais avec des chiffres peu significatifs.

8) Mathématique d'une profession : la moitié des animateurs répondent qu'ils ne privilégient pas les mathématiques d'une profession (mais avec regret ?). La moitié d'entre eux travaille à partir de *thèmes de la vie courante*.

9) Pour l'instant, les animateurs n'ont pas encore pu réinvestir ce qu'ils ont fait en formation initiale : il semble que ce soit trop tôt pour eux.

La Commission Formation Permanente souhaiterait avoir vos réactions concernant ces résultats, les points qui mériteraient d'être approfondis, ...

Alain BOUVIER

EXTRAIT DE
"PAESE SERA"
EDITION DU SOIR DU 29.11.1975

communiqué et traduit par M. THUILLIERE, Rome.

Messine (Sicile)
**BAGARRE EN CLASSE
POUR UN "DECIMAL"**

Messine, 29 Novembre — Trois ans et deux mois de prison pour blessures et calomnie : telle est la condamnation prononcée par le tribunal à l'encontre d'un instituteur, Santo Randazzo, âgé de 54 ans, pour avoir frappé un inspecteur des écoles. L'inspecteur, Antonio Lo Presti, s'était présenté en classe, et, ayant écrit le nombre 58,00 au tableau, avait demandé à une élève (âgée de 9 ans), s'il s'agissait d'un nombre décimal ou d'un entier. La fillette avait répondu : décimal. L'inspecteur avait réfuté : c'est un entier, parce que les zéros ne comptent pas. L'instituteur était alors intervenu pour contester l'avis de l'inspecteur. Qu'est-il arrivé ensuite ? D'après Randazzo, l'inspecteur "se désespéra et se gifla lui-même". Le tribunal ne l'a pas cru ...

Lettre au Ministre

**CONFERENCE DES PRESIDENTS DES
ASSOCIATIONS DE SPECIALISTES**

Paris, le 20 décembre 1975

**François BLAIN, Secrétaire Général
138, avenue du Général Leclerc
91190 Gif-sur-Yvette**

à Monsieur le Ministre de l'Education

Monsieur le Ministre,

Nous vous avons demandé par notre lettre du 30 septembre dernier ce qu'il était advenu des rapports des groupes réunis à la fin de la dernière année scolaire et auxquels nous avons activement participé.

La réponse qui se dégage de l'éditorial que vous avez donné au numéro 18 du "Courrier de l'Education" nous plonge dans la perplexité et suscite en nous bien des inquiétudes. Toutes les informations que nous avons pu avoir par ailleurs en provenance des Directions du Ministère nous laissent à penser que bien peu nombreuses sont les conclusions de ces rapports qui ont été prises en considération.

Nous sommes scandalisés par le peu de cas que vous semblez faire de l'opinion des professeurs du second degré qui seront consultés "s'ils le jugent utile" par les membres de l'enseignement supérieur dont nous ne contestons aucunement la compétence scientifique, mais dont l'ignorance des problèmes concrets de nos Lycées et Collèges est bien connue.

Nous vous rappelons que les associations réunies au sein de la Conférence des Présidents ont fait un examen objectif de vos "propositions pour une modernisation du système éducatif" et se sont toujours gardées de prendre des positions de principe de rejet brutal comme d'acceptation aveugle. Nous ne doutons pas que vous souhaitiez le succès de votre réforme. Pour que ne se renouvelle pas l'échec des tentatives précédentes qui se sont bornées à la publication de textes toujours inappliqués, la participation des professeurs qui la mettront en pratique est une condition nécessaire. Nous vous disons, à nouveau, à cette occasion notre désir d'une véritable concertation.

Je vous prie d'agréer, Monsieur le Ministre, l'expression de ma haute considération.

F. BLAIN

Préparation des Journées Nationales de l'A.P.M., 1976

Appel de la Régionale de RENNES

Les prochaines Journées Nationales de l'A.P.M.E.P. auront lieu à Rennes les 24-25-26 septembre 1976.

Le thème sera :

"MATHEMATIQUE ET COMPORTEMENTS"

Nous souhaitons que ce congrès soit centré sur l'étude des comportements dans les activités mathématiques (en mathématiques, dans les autres disciplines ou dans la vie courante) chez l'enfant, l'adolescent ou l'adulte.

Les témoignages d'expériences vécues, notamment par des scientifiques collaborant avec des psychologues, sont recherchés.

Vous trouverez ci-joint une liste de thèmes d'atelier possibles (liste ni exhaustive ni définitive).

Pourriez-vous nous faire connaître, très rapidement, si vous acceptez de participer à l'animation d'un groupe de travail ?

Il nous serait agréable, dans le cas d'une réponse positive de votre part, de savoir :

- sur quel(s) thème(s) vous pourriez intervenir ;
- si votre animation se ferait dans un groupe ayant un travail précis à réaliser (et si oui quel travail ?) ou comme compte rendu d'une expérience vécue.

Cette réponse est à faire parvenir à :

Monsieur J.-P. GABORIEAU

Département de Mathématique — Université de Rennes

B.P. 25 A — 35031 RENNES CEDEX

P.S. Si vous connaissez des personnes (en particulier des personnes qui ne sont pas professeurs de mathématique) qu'il vous paraîtrait souhaitable de solliciter, nous vous serions reconnaissants de bien vouloir nous indiquer leurs coordonnées.

MERCI

GROUPES DE TRAVAIL

(Propositions)

I — Activités Mathématiques dans les autres disciplines (suite d'Orléans mais vue à travers les comportements)

- I-1 Math-Physique
- I-2 Math-Français
- I-3 Math-Enseignement Technique
- I-4 Math-Biologie
- I-5 Math-Sciences Economiques
- I-6 Math-Informatique

II — Etude des Blocages

Cette étude doit faire intervenir des médecins, des psychologues, des sociologues...

III — Rôle du Matériel Didactique dans l'Enseignement des Mathématiques :

- Technologie Educative
- Calculatrices
- Audiovisuel.

IV — Heuristique :

- IV-1 Analyse de comportements heuristiques
- IV-2 Olympiades - Rallyes
- IV-3 Clubs Mathématiques.

V — Analyse du comportement face à une activité mathématique *

- V-1 Pré-Elémentaire
- V-2 Elémentaire
- V-3 Premier cycle
- V-4 Second cycle
- V-5 C.E.T.
- V-6 Adultes
- V-7 Rôle des psychologues dans une recherche pédagogique.

* Il serait souhaitable que chaque groupe soit animé par un mathématicien et un psychologue ayant travaillé ensemble dans une expérience.

ERRATA DU N° 301

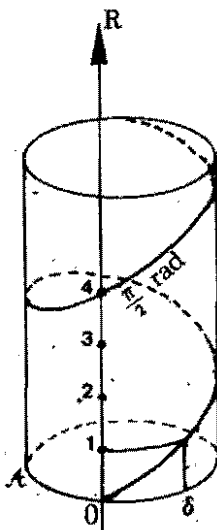
Page 677 :

Rétablir dans la figure la lettre δ , en bas à droite.

Page 713, dernière ligne à remplacer par :
(voir page 712).

Page 833 : remplacer BLED par BIED.

Fiches PHASE : voir dans le présent Bulletin pages 54 et 55. En outre, dans 1/6, à l'avant-dernière ligne, remplacer $d(\alpha, \beta)$ par $d(\alpha, \beta)$.



VIE DES RÉGIONALES

Section de la Seine-Saint-Denis

ACTIVITES DE LA SECTION

- 1° Le *mercredi 21 janvier 1976 à 15 heures* : conférence-débat au Centre Scientifique et Polytechnique :

Place du 8 Mai 1945
93 Saint-Denis
Amphi A3 ou A4

Michel ROUQUAIROL : "Limites et cinématique".

- 2° A la suite de cette conférence-débat, nous procéderons à l'élection du collectif départemental et à une discussion des activités de la section départementale. Prière de me faire connaître les candidatures éventuelles au collectif.
- 3° Une journée consacrée à l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire aura lieu le *mercredi 21 avril 1976* à Aubervilliers au Théâtre de la Commune : "Apprentissage du calcul numérique dans l'enseignement élémentaire", animée probablement par une équipe de l'IREM de Bordeaux qui a déjà à son actif des réalisations remarquables. Vous recevrez en temps utile toutes les indications nécessaires ; mais dès maintenant faites connaître cette journée autour de vous afin qu'elle connaisse, comme les précédentes, le succès qu'elle mérite.

Maurice LOI

Lycée H. Wallon 146, rue des Cités 93300 Aubervilliers

Prenez un cercle.

Caressez-le, il devient vicieux ...

Alain

Régionale de Limoges

Activités 1974-75

Mercredi 9 octobre : Assemblée Générale, puis conférence : J. BOROWCZYK (Poitiers) : le théorème chinois.

Vendredi 22 novembre : H. BAREIL (Toulouse) : Continuité de l'enseignement mathématique du CM2 à la classe de Seconde.

Mercredi 11 décembre : P. BATIER : Compte rendu de l'expérience d'un professeur de mathématique dans l'industrie.

Mercredi 5 mars : M. MARIAUX : Mathématique et Formation Professionnelle des Adultes.

Mercredi 19 mars : M. ROGERIE (doyen de l'APMEP) : Technique de recherche par la voie expérimentale des solutions de problèmes et de la construction des connaissances générales.

L'Assemblée Générale 1975-76 a eu lieu le 15 octobre 1975 avec, pour ordre du jour :

- Bilan de l'année écoulée
- Election du bureau
- Projets pour 75-76

Elle a été suivie de "quelques réflexions à propos de l'enseignement de la géométrie" par R. COUTY, directeur de l'IREM.

Régionale de Dijon

Activités 1975-76

Bulletin régional :

• Le quatrième bulletin régional est paru en décembre 1975 avec la mention "spécial élémentaire".

Outre sa diffusion normale auprès des adhérents, il a été distribué à tous les instituteurs d'une circonscription (Dijon VI).

• Les bulletins 5 et 6 paraîtront respectivement en mars et en juin 1976.

Journées régionales :

- Une journée a eu lieu à Beaune le 3 décembre 1975.

Les participants se sont répartis en deux groupes :

- le premier a travaillé sur Probabilités et Statistiques : le compte rendu de ce groupe sera publié dans le bulletin régional n° 5 ;

- le second s'est penché sur le problème de l'articulation de l'enseignement de la Géométrie entre l'école élémentaire et le premier cycle.

Un calendrier de travail a été proposé et une équipe doit mettre au point un document pour faciliter les échanges entre les maîtres du premier et du second degrés.

Le groupe de travail se réunira de nouveau en fin d'année pour examiner ce document.

- Une autre journée est envisagée vraisemblablement au troisième trimestre.

Liaison élémentaire-premier cycle :

Une action est en route dans le secteur de Marsannay (21).

Une première réunion, regroupant les professeurs de mathématiques du CES et les instituteurs des écoles qui s'y rattachent, a eu lieu le 1er décembre 1975.

Cette réunion a permis de mettre l'accent sur un certain nombre de sujets pouvant être étudiés dans le cadre d'une liaison élémentaire-premier cycle.

Une deuxième réunion est fixée au 27 février 1976, au cours de laquelle seront préparées des activités à réaliser en classe (aux différents niveaux).

Une troisième réunion devrait permettre un bilan de ces activités.

En dehors de cette action, très localisée, des interventions analogues sont prévues dans d'autres C.E.S.

Ces réunions se font, bien entendu, avec l'accord de l'IDEN de la circonscription correspondante.

Signalons pour terminer :

- qu'une permanence est assurée presque tous les mercredis au local de la Régionale ;

- que la prochaine Assemblée Générale de la Régionale aura lieu en octobre 1976. La date exacte et le lieu seront indiqués par la suite.

Régionale de Lyon

Assemblée Générale le 1er octobre 1975

Compte rendu d'activité

- 1 Enquête, sur le rôle de la Régionale, réalisée par l'envoi de plus de 1 000 questionnaires.
 - * Type d'enseignement auquel appartiennent les collègues qui ont répondu.
Elémentaire (2 %). Premier Cycle (35 %). Second Cycle (46 %). Supérieur (12 %). Autres (5 %).
 - * Conférences ou thèmes demandés.
Psychopédagogie (62 %). Histoire des Mathématiques (58 %). Calcul Numérique (45 %). Math-Physique (44 %). Sujets Second Cycle (40 %).
 - * Groupes de travail souhaités (thèmes).
Enseignement à l'étranger (55 %). Liaison premier cycle - second cycle (35 %). Liaison élémentaire - premier cycle (30 %). Le travail sur fiches (20 %).
 - * Autres activités.
Critiques de manuels (50 %). Contrôle des sujets d'examens (45 %). Bulletin de la Régionale (30 %).
- 2 Le problème des sujets de BEPC
(Correspondance avec l'administration, enquête, réunion de travail).
- 3 Conférence donnée par Wim KLEIN, le célèbre calculateur.
- 4 Histoire des Mathématiques : Nombres de Liouville, par Gilbert ARSAC.
- 5 Groupe de travail sur la notion de docimologie.
- 6 Enseignement élémentaire : Notion de temps.
- 7 Journée des Régionales le 11 mai 75, présidée par Michel de Cointet.
- 8 Essai de mise en place d'un réseau de professeurs correspondants dans les établissements de la région (pour faciliter la diffusion des informations en limitant les dépenses).

- 9 Diffusion et vente de brochures APM.
- 10 Mise en place d'une coopérative d'exercices et de problèmes dans le Bulletin de la Régionale.

Activités pour 1975-76

- 1 Organisation de journées de la Régionale sur le thème :
liaisons élémentaire - premier cycle
liaisons premier cycle - second cycle
Ce projet a dû être abandonné après refus du Recteur de Lyon concernant :
 - des visites dans des établissements autres que ceux où les collègues enseignent ;
 - des autorisations d'absence pour les journées prévues.
- 2 Accentuation des efforts sur le Bulletin qui reste l'organe essentiel de liaison, puisqu'il est maintenant difficile de réunir un groupe non négligeable de collègues autour d'un conférencier.
- 3 Diffusion et dépouillement du questionnaire sur les IREM.
- 4 Organisation d'une journée "Informatique" avec participation des grandes marques de matériel électronique.
- 5 Docimologie. Enquête.

Gilbert CROS

Mathématiques pour formation d'Adultes

par Philippe LOOSFELT et Daniel POISSON, C.U.E.E.P.

Centre Université Economie d'Education Permanente.

Université des Sciences et Techniques de Lille.

Depuis 7 ans, le C.U.E.E.P. assure exclusivement des formations d'adultes, dans la Région Nord-Pas-de-Calais. Les formations se déroulent :

- soit en Entreprise, sur le temps de travail,
- soit en "Zone Résidentielle" : 2 zones de formation collective.

En Mathématiques, l'essentiel de l'effort a été porté sur le niveau du C.A.P. dont le C.U.E.E.P. prépare les Unités Capitalisables de tronc commun.

Deux responsables-Matière "Mathématiques" ont capitalisé les expériences de formation. La multitude d'expérimentations, d'essais, de tâtonnements que représente l'acquis de plusieurs centaines de cycles de formation d'adultes, a permis d'orienter progressivement la politique pédagogique du C.U.E.E.P. dans une direction tout à fait imprévue et imprévisible au départ.

Le premier pas de notre évolution nous a orientés vers l'exploration des thèmes de la vie réelle : impôts, salaires, fiches de gaz, etc...

Le bilan de cette tentative s'est soldé par un demi-échec ; la réalité ne provoque pas de motivations profondes au travail et elle est trop compliquée à mathématiser.

La deuxième étape de notre évolution n'a pas été choisie : il a suffi de faire le bilan de ce qui intéresse réellement les formés pour constater que le "pseudo-réel" était bien plus riche, à tout point de vue. Le "faux réel" où la réalité est si décantée que le mécanisme sous-jacent en devient accessible, la situation tellement caricaturée qu'elle peut être totalement maîtrisée par le formé, voilà ce qui incite les formés à verser toute leur énergie dans le travail intellectuel.

Dans cet ouvrage⁽¹⁾ écrit d'abord pour aider les formateurs du C.U.E.E.P. dans leur tâche, nous essayons de montrer comment certains thèmes peuvent être utilisés, comment telle fiche s'est révélée passionnante, quels sont les échecs qui nous ont poussés à corriger certains points, etc...

Nous ne proposons pas de théories, nous disons seulement :

"Voilà un thème, voilà la structure sous-jacente à ce thème (réseau de relations, "architecturation"), voilà comment ce thème a été essayé, voilà les corrections apportées. Nous vous garantissons qu'il y a là de quoi intéresser les formés".

Voici un extrait susceptible d'illustrer la méthode que nous utilisons actuellement pour aider les formés à découvrir les Mathématiques.

(1) A paraître, dans le cadre des publications de l'A.P.M.E.P.

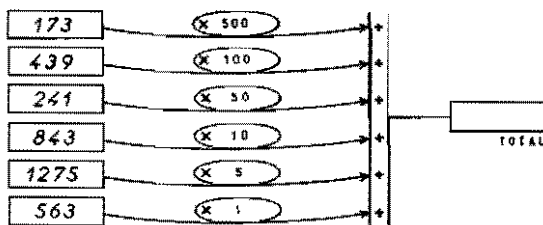
EXERCICE N° 2

Rappel des informations numériques :

173	billets de	500 F	843	billets de	10 F
439		100 F	1 275	pièces de	5 F
241		50 F	563	pièces de	1 F

I - 1ère partie du problème : Quelle est la somme1) Travail préliminaire

Ce travail se fait dans l'esprit des formés, et dans ce cas également, proposer un support écrit à ce travail intellectuel permettra une meilleure maîtrise et une meilleure performance de calcul.



Ce travail est facile sur machine à mémoire, et n'intéresse que faiblement les formés. L'intérêt se réveille lorsque le formateur demande de faire le travail sur une machine sans mémoire.

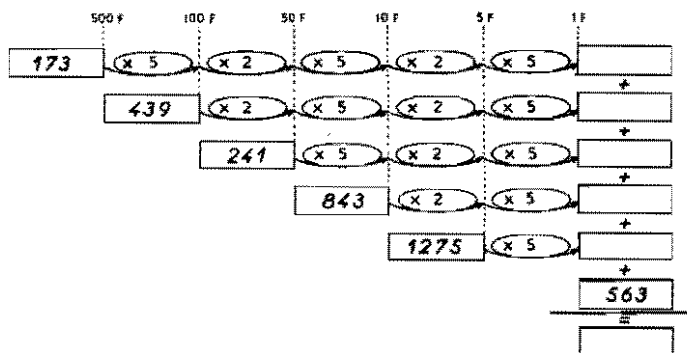
Pour faire le calcul sur une machine sans mémoire, deux possibilités :

1 - Amélioration de la description du problème

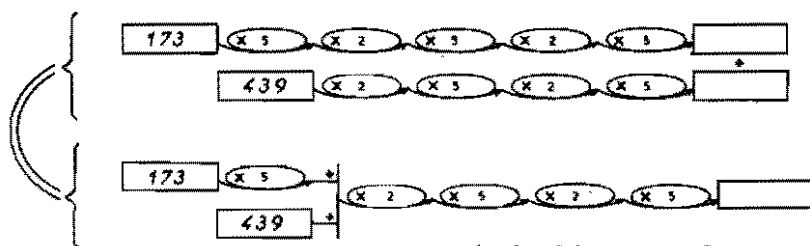
Le graphique proposé ne visualise pas parfaitement le jeu de multiples et de sous multiples des unités d'argent.

Ex : 5 billets de 100 F donnent 1 billet de 500 F.

Une description plus complète serait :

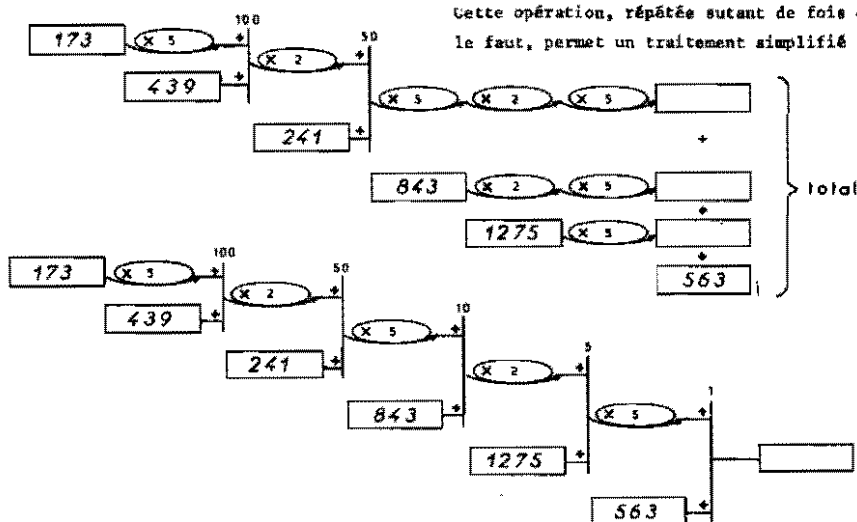


Cette description permettra d'imaginer plus facilement la transformation des 173 billets de 500 F en (5 x 173) billets de 100 F qui, ajoutés aux 439 billets de 100 F, donnerait (865 + 439) x 2 billets de 50 F, etc ...



opération faisable en chaîne sur machine.

Cette opération, répétée autant de fois qu'il le faut, permet un traitement simplifié :



Soit, plus schématisé,
un traitement en escalier :

