7

ECHANGES

A propos de la périodicité

par Rudolf BKOUCHE, IREM de Lille

Cher Collègue,

Voici quelques réflexions inspirées par la "Périodicité" telle qu'elle est décrite dans le numéro 301 du Bulletin de l'A.P.M. (Colmez, Perucca,...), réflexions que je vous propose pour publication au Bulletin.

D'accord avec Colmez lorsqu'il propose de distinguer en physique mouvement périodique et mouvement sinusoïdal, les difficultés du calcul trigonométrique masquant parfois des aspects plus simples des phénomènes de propagation. Mais ceci n'implique pas qu'on ramène la trigonométrie à l'étude axiomatique des fonctions périodiques satisfaisant à des propriétés données à priori ; la propriété C :

Une fonction a la propriété C si pour tout réel a , la somme de ses translatées par a et —a lui est proportionnelle.

$$\forall a \in \mathbf{R} \quad \exists k \in \mathbf{R} \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad f(x-a) + f(x+a) = kf(x)$$

n'a rien de naturel (la pseudo-motivation physique ne vaut pas mieux), sauf peut-être pour celui qui *connaît déjà* les fonctions trigonométriques et qui en cherche une caractérisation parmi les fonctions périodiques.

En fait la position de Colmez s'explique par un refus de tout recours à l'intuition, et plus particulièrement à l'intuition géométrique (ceci est dit explicitement dans le texte: "on obtient d'une manière élémentaire toutes sortes de propriétés et de formules qui se trouvent être, après identification, les formules trigonométriques connues, et ceci sans aucune référence à la géométrie"), refus qui exprime la tendance principale de l'enseignement actuel des mathématiques et qui confond progrès des connaissances mathématiques et sophistication des mathématiques (si la sophistication s'avère nécessaire pour explorer certains domaines des mathématiques, elle n'est qu'un moyen d'exploration).

Ce refus du recours à l'intuition apparaît de façon exemplaire dans tout ce qui touche aux angles et à la mesure des angles. Pour ne pas parler de longueur d'un arc (je suppose qu'on ne peut le faire sans calcul intégral ! ! !), on a inventé une série de gadgets qui fleurissent dans les divers ouvrages d'enseignement et qui ne servent qu'à masquer la réalité ; sous prétexte d'éviter une difficulté réelle (la périodicité !) on a créé des difficultés parasites, mais qui ont l'avantage "enhaurme" de supprimer l'intuition ; ainsi les élèves sauront qu'il n'y a aucun rapport entre l'angle géométrique et la notion naïve qu'ils ont avant de faire "des mathématiques" (si jamais ils se sont un jour posé la question). On finit ainsi par écrire à propos du fameux k qui mesure le demi-cercle : "les mathématiciens utilisent un rapporteur qui donne pour le demi-cercle la mesure π où π est un nombre réel dont la valeur approchée par défaut à un dix-millième près est 3,1415" (Queysanne — Revuz, Classe de troisième).

Sont-ils fous ces mathématiciens pour aller chercher un aussi bizarre nombre (moi, j'aurais préféré $\log\sqrt{2}$, question de goût !). Evidemment il n'est pas question de dire que π est la longueur du demi-cercle de rayon 1 , ou que le radian est la mesure de l'arc qui a même longueur que le rayon (sans calcul intégral voyons !).

A la limite, l'enseignement actuel prend les élèves pour des imbéciles.

Il est vrai qu'en Première on fait mieux puisqu'on définit π comme étant la valeur de k telle que la dérivée de la fonction sinus à l'origine soit égale à 1 ; que veut-on enseigner à travers ce discours ésotérique ?

On recommence, pour les fonctions trigonométriques, la démarche de ceux qui, il y a quelques années (et encore aujourd'hui...), cherchaient les axiomatiques les plus astucieuses pour "construire" la géométrie en évitant tout recours à l'intuition et à toute connaissance "naïve".

En fait, et quoi qu'on en ait dit, la tendance principale de l'enseignement reste à la "construction des mathématiques" et à l'ésotérisme. Cette démarche qui tend à couper la science mathématique de ses sources et à la transformer en un spectacle dont seuls quelques-uns (les "doués", futurs "préparationnaires aux grandes écoles", futurs "cadres") auront le droit de connaître les coulisses, se retrouve dans le même sens que les réformes ou tentatives de réformes de Fontanet hier ou Haby aujourd'hui. L'A.P.M. veut se situer (à juste titre) contre la réforme Haby, mais il faudrait que cela se fasse non seulement dans des déclarations générales, mais aussi dans sa pratique et sa réflexion sur l'enseignement des mathématiques ; la démocratisation de l'enseignement ne consiste pas seulement à amener les enfants de tous les milieux sur les bancs de l'école ; si on leur tient un discours incompréhensible pour la majorité d'entre eux, on ne peut que contribuer à la sélection, selon le désir de la classe dominante et du pouvoir.

APPENDICE : Sur la mesure des angles.

Ceci n'a rien d'original ; il répond à une question posée par des stagiaires de l'I.R.E.M. de Lille qui n'osaient pas parler de mesure des longueurs, ou de mesure des angles, parce que quelque part dans le sommet de la Science, il y avait une théorie de la mesure, d'accès difficile, et qu'ils craignaient de dire des inepties. La réponse a été un exposé qualitatif pour dire simplement que la mesure de Lebesgue d'un segment de droite n'est autre que sa longueur, et que la mesure de Haar d'un arc de cercle n'est autre que sa longueur si on a choisi comme mesure du cercle tout entier la longueur du cercle, à savoir $2\pi R$ (R étant le rayon du cercle !). Il se trouve que la définition naïve de la mesure de Haar sur le cercle comme mesure additive d'ensemble, satisfaisant en outre à la propriété suivante :

Si deux arcs sont définis par des angles égaux et s'ils sont de même nature (tous deux plus petits que le demi-cercle, par exemple), ils ont même longueur.

a amené la réponse soulagée d'une stagiaire : "mais c'est comme çà que je faisais avant, et que je continuais à faire *avec remords* aujourd'hui".

Eh oui ! la mesure de Haar sur le cercle, c'est naïvement la longueur des arcs et je ne vois pas pourquoi on se priverait de le dire (les sophistications à ce niveau sont plus proches du point de vue "naïf" que les sophistications de ce qu'on appelle les mathématiques modernes dans l'enseignement secondaire !) ; l'orientation du cercle, avant d'être liée au signe d'un déterminant, c'est un sens de parcours qu'on compare à celui des aiguilles d'une montre. Avec ces deux ingrédients (longueur des arcs, sens de parcours) on a de quoi fabriquer tous les homomorphismes de **R** vers A qu'on veut ; et quoi qu'on dise, c'est une activité mathématique, et c'est même de cette activité "naïve" que sont nées les sophistications ultérieures de la théorie de la mesure ; sophistications nécessaires, non pour elles-mêmes, mais parce qu'elles permettent de résoudre des problèmes que les théories "naïves" étaient incapables d'appréhender.

Tout ceci semble une "évidence" et pourtant il faut le dire, car cette "évidence" semble oubliée ; lorsqu'un enseignant de mathématiques ne connaît pas le lien entre cette théorie de la mesure (qu'il a peut-être entrevue un jour dans un cours universitaire) et la mesure des longueurs avec la règle, ou la mesure des angles avec le rapporteur, c'est que l'enseignement qu'il a reçu est aberrant, et que l'enseignement qu'il transmet ne peut que continuer cette aberration : ce clivage théorie (la mesure) — pratique (la règle et le rapporteur) qui rend incapable le théoricien de comprendre l'utilisation de ses théories, et qui terrifie le praticien devant cette théorisation inacessible.

Pour revenir à la périodicité et à l'article de Colmez, avant de chercher comment définir "de façon rigoureuse" les fonctions trigonométriques , il faudrait réfléchir sur les aberrations actuelles dans l'enseignement des notions liées aux angles ; pour terminer, une question : quels rapports font les élèves entre les angles de Troisième et les angles de Première ? Réponse d'un enseignant stagiaire à l'I.R.E.M. de Lille : aucun, mais ça ne fait rien, puisqu'ils n'ont rien compris en Troisième (et qu'ils l'ont oublié lorsqu'ils arrivent en Première).