D'un ensemble fini vers un ensemble infini qui le contient

par James TOUILLET, C.E.S. de Parthenay

Pour passer du domaine fini au domaine infini, il y a un "saut" que les élèves ont des difficultés à réaliser. Il est sans doute nécessaire de le faire en aménageant de nombreuses étapes.

Dans un ensemble infini, les démonstrations pour généraliser certaines propriétés sont nécessaires : C'est sûrement une motivation pour le professeur, mais en est-ce bien une pour l'élève ? Le besoin de généraliser par un raisonnement cohérent n'est pas d'égale intensité pour tous.

Il y a quelque temps, mes élèves de Cinquième construisaient des fiches où des couples de naturels représentaient des entiers. Certains m'ont demandé combien il fallait trouver de couples ; il est vrai que c'était une Cinquième de type "allégé". La loi de formation des couples est assez bien comprise pour être utilisée, mais son domaine de validité ne préoccupe pas les élèves.

En Quatrième, la question "Dans **D**, l'intervalle $]1{,}50\ ;\ 1{,}80[$ a-t-il un plus petit élément ? " laisse les élèves dans l'embarras. Dans D_2, dans D_3, ils sont plus rassurés car ils peuvent trouver une réponse claire ; dans **D**, la situation est moins confortable. Il est peut-être psychologiquement bon de présenter, à côté de situations inconfortables, des situations plus confortables ; on laissera ainsi la possibilité d'étendre les réflexions quand on en aura les moyens.

Le plan est un ensemble infini de points; c'est facile à énoncer, mais cet infini n'est pas simple. Il est sûrement possible et intéressant d'exercer les recherches sur des ensembles finis d'éléments que des dispositions géométriques permettront d'explorer. Les enfants peuvent pratiquer des exercices de dénombrement et de construction sur des ensembles finis.

Toute paire de points est incluse dans une droite et une seule.

Si on donne 3 points, combien peut-on construire de droites ? Les élèves découvrent facilement qu'il y en a trois ou une. Si on donne 4 points, il y a trois cas de figure possibles. S'il y a 5 points, ils peuvent chercher, et on peut étendre cette recherche.

Un de mes professeurs de mathématique m'a dit un jour : "Un vecteur du plan ne peut pas être dessiné". Ce propos m'a frappé ; l'infini en effet est difficile à concevoir et impossible à représenter. Il est important de faire naître dans l'esprit de nos élèves la notion de classe d'équivalence de bipoints équipollents.

Dans un parallélogramme, on peut représenter 4 vecteurs. Dans un ensemble à 9 points codés par les éléments de $\{0;1;2\} \times \{0;1;2\}$, on peut rechercher des bipoints équipollents. Le vecteur $\vec{0}$ a 9 représentants ; le vecteur (1;0) en a 6, d'autres en ont moins ; et le désir d'extensions peut peut-être faire imaginer un ensemble plus étendu mais structuré de la même manière.

Voici un exemple de situation étudié en Quatrième, au moins pour le début.

$\mathcal{E}$ est un ensemble à 9 éléments A,B,C,D,E,F,G,H,I ; S est un sous-ensemble propre de $\mathcal{E}$.
Toute paire d'éléments de $\mathcal{E}$ est incluse dans un sous-ensemble S et un seul.
Si S_1 et S_2 ont un élément commun, ils sont "sécants" ; s'ils sont non-sécants, ils sont "parallèles".
Combien y a-t-il de paires dans $\mathcal{E}$? Les élèves trouvent assez facilement : 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36.

Comment construire un sous-ensemble S ? On peut considérer un ensemble de 3 éléments et l'appeler "triade". La triade $\{A,B,C\}$ contient 3 paires ; on peut espérer trouver 12 triades vérifiant la propriété : "toute paire est incluse dans une triade et une seule".

Si on dispose les éléments en tableau carré :

A	B	C
D	E	F
G	H	I

la recherche des triades est facilitée. On peut hésiter à appeler "droite" des assortiments comme $\{B,F,G\}$; mais dire que 2 triades $\{B,F,G\}$ et $\{A,B,C\}$ sont sécantes n'est choquant ni pour les élèves, ni pour les parents. On peut aussi bien parler de triades parallèles ; on dit bien que la $4^e{}_1$ et la $4^e{}_2$ sont des classes parallèles ... La relation de parallélisme est une relation d'équivalence facile à concevoir, et on obtient facilement les 4 directions.

Nous avons essayé, avec un ensemble à 16 éléments, la même recherche. Il y a déjà 120 paires. Un sous-ensemble S peut-il être une triade ?

Considérons les paires contenant A ; il y en a 15 :

AB AC AD AE AF AG AH AI
AJ AK AL AM AN AO AP.

Les triades contenant ces paires sont au nombre de 7, et il reste une paire non utilisée, par exemple AP.
Peut-on trouver un autre élément de l'ensemble à 16 éléments, qu'on pourrait associer à AP pour former une triade vérifiant la condition suivante : "toute paire est incluse dans une triade et une seule" ? On vérifie que c'est impossible.

S peut-il être un sous-ensemble à 4 éléments ?
Nous n'avons pas eu le temps de vérifier que c'était impossible.

A B C D		ABCD	EFGH	IJKL	MNOP
E F G H	nous donne :	AEIM	BFJN	CGKO	DHLP
I J K L		AFKP	BGLM	CHIN	DEJG
M N O P					

Ces 12 sous-ensembles S contiennent des paires contenant A, qui sont :

AB AC AD AE AF AI AK AM AP.

AG n'est pas utilisée. Peut-elle être utilisée avec BCDEFHI KLM OP ? Non. Il ne reste que J et N, mais AGJN et BFJN auraient deux éléments communs.

Si on avait eu le temps, peut-être qu'avec 25 éléments on aurait pu former des sous-ensembles S ayant 5 éléments, vérifiant "toute paire est incluse dans un sous-ensemble et un seul" ; on aurait pu chercher en utilisant les translations de $(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})^2$.

A B C D E v $\overset{h}{\Rsh}$	{A,B,C,D,E}	associé à (1h, 0v)
F G H I J		et on en obtient 5 de la même façon
K L M N O	{A,F,K,P,U}	associé à (0h, 1v)
P Q R S T	{A,G,M,S,Z}	associé à (1h, 1v)
U V X Y Z	{A,H,O,Q,Y}	associé à (2h, 1v)
	{A,I,L,T,X}	associé à (3h, 1v)
	{A,J,N,R,V}	associé à (4h, 1v)

On obtiendrait 30 sous-ensembles S à 5 éléments.

Un sous-ensemble S contient 10 paires. Comme l'ensemble à 25 éléments contient 300 paires, et que $30 \times 10 = 300$, il semble que la recherche soit achevée.

Cela m'amène à penser au petit tableau suivant :

n(E) : nombre d'éléments de l'ensemble "de points".
n($\mathcal{T}$) : nombre de paires incluses dans E.
n(S) : nombre d'éléments du sous-ensemble S.
n(dS) : nombre de sous-ensembles S.
n(pS) : nombre de paires par sous-ensemble S.
n($\mathcal{D}$) : nombre de directions.

n(E)	n($\mathcal{T}$)	n(S)	n(dS)	n($\mathcal{D}$)	n(pS)
9	36	3	12	4	3
25	300	5	30	6	10
49	1176	7	56	8	21
121	7260	11	132	12	55

Ceux qui verront plus tard les groupes finis pourront y voir plus clair ; et les autres n'auront peut-être pas perdu leur temps.