8

EXAMENS ET CONCOURS

Remarques sur le problème de terminale C, à Paris en Juin 1975

par A. TORTRAT, U.E.R. 48, Université Paris VI

Ayant pris connaissance du problème de terminale C de Paris, à motivation probabiliste, il m'a paru utile d'écrire quelques observations pour le Bulletin de l'A.P.M. : ce problème doit normalement retenir l'attention de nombreux collègues au cours de la prochaine année scolaire, à deux titres me semble-t-il :

1) le programme de Probabilités y intervient, 2) des parties diverses du cours s'y conjuguent pour donner un sens concret au problème ; la partie III n'est qu'une illustration particulière de la partie II, mais justifie la partie I, et le calcul numérique qui y est demandé, en lui donnant une signification probabiliste (tout calcul plus ou moins ennuyeux ne prend son intérêt que lorsqu'on lui donne une signification, laquelle dépend pour un même résultat numérique de l'application envisagée).

La motivation probabiliste de la partie III déborde le cadre précis du programme. Telle est la raison de mes remarques, mais aussi de montrer qu'on peut saisir l'occasion d'un problème concret, susceptible de retenir l'attention d'élèves pour des raisons non mathématiques, pour discuter du cadre mathématique (probabiliste) qu'appelle sa solution, poser des questions et introduire à des développements théoriques futurs, au lieu de procéder comme trop souvent : parachuter un cadre formel qui paraît intangible, des définitions elles aussi non significatives, alors qu'on gagnerait à expliquer chaque fois sur des exemples non artificiels les motivations vraies, la nécessité ou l'utilité des propriétés postulées.

Dans le cas présent, il s'agit en particulier de montrer que l'espace Ω habituel n'est ni unique ni indispensable (alors s'évanouit la question de savoir s'il est fini ou non !).

Une note de l'énoncé (en III 1e) invitait à ne pas chercher à définir l'espace de probabilité en question, car le programme est limité aux espaces Ω *finis*. Mais le problème posé appelle inévitablement cette recherche, qui nous paraît d'un certain intérêt.

1. S'il est bon qu'on habitue l'élève à baser un problème de probabilités sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sous-jacent ($\mathcal{A}$: algèbre de parties de Ω), il l'est peut-être moins que la définition même d'une épreuve (aléatoire) soit *identifiée* à un (et *un seul*) tel espace : dans le concret, ce qui doit être défini avec précision c'est une expérience au résultat aléatoire : alors vient la recherche d'une représentation mathématique, qui n'est presque jamais unique. Un événement E a une existence indépendante de l'espace de représentation, de même que sa probabilité ou l'espérance d'une variable aléatoire.
   L'habitude est prise par beaucoup de probabilistes de poser au départ un Ω *non défini*, c'est le support de v.a. dont on se donne les lois mutuelles ou certaines propriétés. Pour un calcul déterminé on cherchera souvent l'espace de représentation minimal concerné (alors il sera défini !), par exemple si les seules fonctions d'une même v.a. réelle sont étudiées, cette v.a. peut être identifiée à la fonction $f(x) = x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et sa loi définie directement sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

   Exemple. La loi de Bernoulli devrait être présentée comme liée à une épreuve répétée K fois (alors $\Omega = \{0,1\}^K$), mais, ne concernant que le nombre de réalisations d'un événement E (E_k à la k-ième épreuve) et non l'ordre de ses apparitions, on applique Ω sur $\Omega' = \{0,1,2,\ldots,K\}$, la loi en question est la probabilité *dans* Ω' : on la notera P' pour la clarté de l'explication initiale, mais on peut aussi la noter P, car *c'est P* sur une sous-algèbre de l'algèbre initiale (algèbre d'événements, ne l'oublions pas, dont les parties de Ω ne sont qu'une représentation).

2. Il est clair que l'essentiel, c'est la fonction P (à valeurs dans $[0,1]$), définie et *additive* sur une algèbre $\mathcal{A}$ d'événements. Les ω sont plus symboliques ; lorsque Ω est dénombrable, ils représentent, il est vrai, en général des événements, bien identifiés,

de $\mathcal{A}$. Lorsque Ω n'est pas dénombrable, il est, nous l'avons dit, souvent "posé" abstraitement, les ω n'ont pas de signification précise et *concrètement* Ω sera souvent en fait, *même si on ne le dit pas*, remplacé par un autre espace dont les points s'interprètent mieux.

3. L'énoncé en question concerne un problème particulier lié à la répétition infinie d'une partie opposant deux joueurs A et A' où A gagne avec la probabilité p non nécessairement égale à 1/2. Désignons par Ω_K l'espace $\{0,1\}^K$ lié aux K premières parties.
L'épreuve est ici en quelque sorte la réunion des Ω_K $(K = 1,2,...)$. Cela ne permet pas de définir directement des ω disjoints, car chaque ω_K (de Ω_K) se divise en deux ω_{K+1}. En fait on s'intéresse aux événements E_K = "A est ruiné à la K-ième partie", et E'_K (A' ruiné). Ces événements disjoints peuvent être pris pour événements élémentaires de l'épreuve globale (ou comme événements d'un Ω que nous ne précisons pas pour l'instant). C'est dire qu'alors Ω_K est réduit à $2K + 1$ points, les E_k, E'_k, $k \leqslant K$, et l'événement "la partie continue" qui se divise en trois à la partie suivante.
On voit qu'est parfaitement définie une algèbre d'événements, à savoir l'algèbre $\mathcal{A}_0$ engendrée par les E_K, E'_K. Dans $\mathcal{A}_0$, les E_K, E'_K sont des atomes, c'est-à-dire des événements insécables (comme les ω d'un Ω), et un dernier atome est l'événement $\Omega - \Sigma\, E_k - \Sigma\, E'_k$, soit E_∞ = "la partie dure infiniment". Tant qu'une algèbre est engendrée par des atomes en quantité dénombrable, une v.a. ("mesurable pour cette algèbre") est une fonction constante sur les atomes, et c'est en particulier à une telle définition que pourrait (devrait !) se borner l'enseignement tant qu'on se borne à des Ω *dénombrables.*

4. Le problème qui nous occupe (en sa partie III 1°) envisage les événements $\mathcal{E}_a = \sum_1^\infty E_k$ (ruine de A) et $\mathcal{E}'_{2a} = \sum_1^\infty E'_k$ (ruine de A') qui *ne sont pas* de $\mathcal{A}_0$. Mais le raisonnement de 1° b. fait intervenir (comme probabilités conditionnelles) des nombres r_n qui égalent les probabilités de ruine du joueur A si son avoir avant la première partie est n (et 3a − n celui de A'), il introduit les événements $\{X_K = n\}$: c'est dire que nous devons (pour appuyer ce raisonnement sur un couple $(\mathcal{A},P)$), utiliser l'algèbre engendrée par toutes les v.a. X_k, i.e. $\mathcal{A} = \bigcup a_K$, où

a_K est $\mathcal{P}(\Omega_K)$ ensemble de toutes les parties de Ω_K, et poser le problème d'y adjoindre $\mathcal{E}_a$ et $\mathcal{E}'_{2a}$, obtenant l'algèbre $\overline{\mathcal{A}}$.

5. En désignant par $r_{n\ell}$ la probabilité de ruine, en ℓ parties exactement, de A ayant au départ l'avoir n, et en posant $q = 1 - p$, on obtient la relation de récurrence

$$r_{n\ell} = p\, r_{n+1,\ell-1} + q\, r_{n-1,\ell-1}$$

On en déduit, en sommant sur ℓ de 1 à ∞, $1 \leqslant n \leqslant 3a-1$, que $\rho_n = \sum_1^\infty r_{n\ell}$ vérifie $\rho_n = p\,\rho_{n+1} + q\,\rho_{n-1}$ pour $n > 1$ (car $r_{n+1,0} = r_{n-1,0} = 0$) et aussi pour $n = 1$, en posant $r_{00} = 1$. Ainsi on a obtenu les valeurs de ρ_a et ρ'_{2a} et prouvé que $\rho_a + \rho'_{2a} = 1$.

6. Admettons l'existence *d'un* prolongement de P à l'algèbre $\overline{\mathcal{A}}$. Tout B de $\overline{\mathcal{A}}$ s'écrit $B_k + \sum_{k+1}^\infty E_\ell$, ou $B_k + \sum_{k+1}^\infty E'_\ell$, ou $B_k + E_\infty$, avec $B_k \in a_k$).

Le raisonnement de la question 1^e b. nous donne ces mêmes valeurs ρ_a, ρ'_{2a} de somme 1 pour r_a et r'_{2a}. C'est dire que $r_a = \sum_1^\infty r_{ak} = \sum_1^\infty P(E_k)$ (donc aussi que $P(\sum_{k+1}^\infty E_\ell) = \sum_{k+1}^\infty P(E_\ell)$), *et* que le prolongement est nécessairement unique.

Cela était clair en 4 aussi, car l'additivité de P *impose*

$$P\,(\text{ruine de A}) \geqslant \sum_1^K P(E_k) \text{ donc } \geqslant \sum_1^\infty r_{a\ell} = \rho_a.$$

De même P (ruine de A') $\geqslant \rho'_{2a}$.

Alors $\rho_a + \rho'_{2a} = 1$ *impose* l'égalité dans ces deux inégalités.

Ainsi "$P\,E_\infty = 0$" résulte de la solution de la question 1^e b., ce qui n'était pas sûr au départ, et n'est pas du tout trivial. L'existence du prolongement (unique) est assurée par $P(B_k + \sum_{k+1}^\infty E_\ell) = P(B_k) + \sum_{k+1}^\infty P(E_\ell)$ (de même avec $B_k + \sum_{k+1}^\infty E'_\ell$). Rappelons qu'un théorème standard assure l'existence et l'unicité d'un prolongement *σ-additif* de $\mathcal{A}$ à $\overline{\mathcal{A}}$ (car P est σ-additive sur $\mathcal{A}$, autre théorème standard), mais l'unicité du prolongement *additif* n'est ici assurée que grâce aux expressions de $\mathcal{E}_a$ et $\mathcal{E}'_{2a}$ dans $\mathcal{A}$ *et* à $\Sigma\, P(E_k) + \Sigma\, P(E'_k) = 1$.

7. Bien sûr le Ω naturel lié à ce problème est $\{0,1\}^N$. Mais il a la puissance du continu, *comme* E_∞. En effet, E_∞ contient tous les points ω ainsi obtenus : aux parties $2\ell + 1$ et $2\ell + 2$, A gagne d'abord puis perd ensuite ou inversement. Alors X_k demeure entre $a - 1$ et $a + 1$ et (si $a > 1$) la partie dure infiniment. L'ensemble de ces ω est de même cardinalité que $\{0,1\}^N$ et donc aussi E_∞.
Peut-être devrait-il être mieux connu que si on ne prend pas $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, ce n'est pas uniquement par inexistence d'une probabilité dénombrablement-*additive* (non triviale, prouvée dès que Ω est non dénombrable), mais parce qu'une probabilité *seulement* additive *répondant au problème* peut ne pas exister : sur la surface de la sphère Σ d'aire 1 de R^3, il n'existe pas de fonction additive P sur $\mathcal{P}(\Sigma)$ qui prolonge l'aire ordinaire de façon que P soit *invariante* par toute rotation.

Ce résultat de preuve assez élémentaire est dû à Hausdorff (1914) et étend un résultat antérieur concernant l'existence d'ensembles non mesurables (ici au sens de la σ-additivité) sur la circonférence. En fait le résultat de Hausdorff est beaucoup plus surprenant car il établit qu'une fois enlevés une infinité dénombrable de points, Σ se partage en trois parties égales entre elles (au sens de la superposition par rotation) et chacune égale à la réunion des deux autres. (*)
Dans le cas du problème, on peut appliquer Ω sur $[0,1]$ en faisant correspondre à $X_1 = a + 1$ le segment $[0,p]$ et à $X_1 = a - 1$ le segment $[p,1]$, puis ainsi de suite par divisions successives. Seul les points de Ω à coordonnées toutes égales à 1 (ou 0) sauf un nombre fini d'entre elles, ont une double représentation dans $[0,1]$, et ils peuvent être négligés. Alors l'image de P coïncide avec la mesure de Lebesgue dans $[0,1]$, et le prolongement (invariant par translation modulo 1) à $\mathcal{P}([0,1])$ existe (prouvé par Banach, vers 1920), donc aussi un prolongement *naturel* dans Ω (un prolongement arbitraire existe toujours, mais il n'est pas dénombrablement additif).

8. Un point peut et doit nous semble-t-il être porté à l'attention des élèves : l'établissement de la relation de récurrence prend en considération l'événement $E^{(k)}$ = "ruine de A, postérieure à k", conditionné par $X_k = n$ ou par $X_k = n, X_{k+1} = m$

(*) Cf. Paul LEVY, Le paradoxe de la sphère et les fissions en chaîne, (Annales Université Budapest 3.4 — p. 135-144).

($m = n + 1$ ou $n - 1$, $n \neq 0$ et $3a$). L'indépendance des parties successives, avec l'axiome (essentiel) des probabilités composées qui permet de construire la probabilité globale P à partir de celles de chacune des parties successives (sinon il faut parachuter P et jouer abstraitement de l'indépendance), prouve que la probabilité de cet événement $\{E^{(k)} \mid X_k = n, X_{k+1} = m\}$ ne dépend ni de k ni de n, c'est donc r_m.
Celle de $\{E^{(k)}, X_k = n\}$ est donc

$$r_{n+1}\, P\,\{X_k = n, X_{k+1} = n+1\} + r_{n-1}\, P\,\{X_k = n, X_{k+1} = n-1\}$$
$$= P\,\{X_k = n\}\,(p\, r_{n+1} + q\, r_{n-1}).$$

En divisant les deux membres par $P(X_k = n)$ on obtient

$$p\, r_{n+1} + q\, r_{n-1} = P\,\{E^{(k)} \mid X_k = n\} = r_n$$

En fait $P(X_k = n)$ n'est plus grand que 0 que si n a la parité de a pour k pair, la parité contraire sinon. On peut laisser tomber les autres cas de probabilité totale nulle.
On peut aussi raisonner à l'intérieur de $\{X_k = n\}$ (sous-entendu "la partie a duré jusqu'à cet instant"), espace conditionnel équivalent à $\{X_0 = n\}$, il reste alors seulement à conditionner par $X_{k+1} = n \pm 1$.

9. Ce qui précède ne nous donne pas les $P(E_\ell) = r_{n,\ell}$ mais, par la méthode de la partie II du problème, on obtient immédiatement leur fonction génératrice $\varphi_n(u) = \sum_{\ell=0}^{\infty} r_{n,\ell}\, u^\ell$ définie au moins pour $0 \leqslant u \leqslant 1$. En effet nous avons vu en 5. que pour $1 \leqslant n \leqslant 3a-1$

$$r_{n,\ell} = p\, r_{n+1,\ell-1} + q\, r_{n-1,\ell+1} \quad ;$$

de plus $r_{0,0} = 1$ et $r_{0,\ell} = r_{3a,\ell} = 0$ pour tout $\ell > 0$.
Multipliant par u^ℓ et sommant sur ℓ, nous trouvons

$$\varphi_n = u\,(p\,\varphi_{n+1} + q\,\varphi_{n-1})$$

dont la solution générale s'écrit $\varphi_n = \lambda\, t_1^n + \mu\, t_2^n$ où t_1 et t_2 sont les racines de l'équation $t = u\,(p\,t^2 + q)$.
Compte tenu de $\varphi_0(u) = 1$ et $\varphi_{3a}(u) = 0$, on obtient

$$\lambda + \mu = 1 \quad \text{et} \quad \lambda\, t_1^{3a} + \mu\, t_2^{3a} = 0.$$

D'où

$$\lambda = \frac{t_2^{3a}}{t_2^{3a} - t_1^{3a}} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{-\,t_1^{3a}}{t_2^{3a} - t_1^{3a}}$$

10. Il est clair que le résultat $r_a + r'_{2a} = 1$ équivaut à "La suite des variables aléatoires X_n converge avec la probabilité 1", car, suivant les chemins infinis, la suite X_n ne converge pas. On a donc prouvé, sur un exemple illustrant les idées essentielles, mais très simple parce que les trajectoires arrêtées au temps n sont en nombre fini, un théorème savant concernant la convergence d'une martingale définie par une suite croissante de temps d'arrêt τ_n : τ_n est l'instant aléatoire où X_i, $i \leqslant n$ atteint l'une des valeurs 0 ou $3a$ (l'un des joueurs est ruiné) et $\tau_n = n$ si aucun joueur n'est ruiné au temps n.