3 - Réponse à B. Charles et A. Bouvier

par Jacqueline FOURASTIE, maître assistant au C.N.A.M.

Je remercie vivement les auteurs des articles qui précèdent, ainsi que les personnes qui m'ont écrit ou ont pris directement contact avec moi. J'espérais une discussion et je suis heureuse de l'avoir obtenue.

Il est réjouissant pour moi qu'Alain Bouvier inaugure son article par une citation du Professeur Dugué qui a précisément suivi toute ma recherche (thèse de 3e cycle et thèse d'Etat). J'ajoute que cette citation tirée de son contexte pourrait faire penser que M. Dugué est plus favorable qu'il ne l'est effectivement à la "modernisation" des mathématiques.

Alain Bouvier souligne avec juste raison que faire des mathématiques, c'est avant tout résoudre des problèmes. Son analyse de l'enseignement actuel des mathématiques est sévère, mais j'y souscris : son contenu est trivial pour les mathématiciens, inintéressant pour les utilisateurs. Il peut cependant intéresser certains élèves, ceux dont l'esprit, à cause de leur jeunesse, se complaît à tous les "jeux", qu'ils aient une signification ou non.

Je suis étonnée, après m'être sentie si en harmonie avec ses premières lignes.... qu'Alain Bouvier ne se sente pas aussi en accord avec moi ! Bien sûr, j'aurais dû parler des morphismes fonctoriels (ou équivalences naturelles). Je ne nie absolument pas leur importance. Simplement, j'ai voulu montrer qu'un exposé abstrait de la théorie commence déjà à être essoufflant au niveau des foncteurs ; l'apprenti moyen a par conséquent du mal à parvenir aux morphismes fonctoriels (ma formule était peut-être trop ironique !). Il faut ajouter, d'ailleurs, que l'exposé de la théorie est plus facile à l'aide d'un exemple.... Je ne suis pas sûre qu'elle aurait eu tout le succès qu'elle a obtenu si Mac Lane et Eilenberg, au point de départ de leur découverte (1), n'avaient fait l'exposé sur l'exemple remarquable des espaces vectoriels. Ils ont d'ailleurs ainsi été amenés à définir d'abord les "équivalences naturelles", ce qui donne raison à Alain Bouvier. Je me sens donc en accord avec Bernard Charles pour penser qu'il est nécessaire que les professeurs enseignant à un certain niveau connaissent la théorie des catégories, au moins dans ses premiers développements, pour enseigner les structures (de groupe, anneau, corps....) d'une façon suffisamment homogène.

Par contre, je maintiens contre Bernard Charles le caractère trop restrictif de *l'axiome d'associativité*. En effet, cet axiome me semble typique d'une mathématique enfermée en elle-même, dans laquelle en fait les "morphismes" ne sont guère que des fonctions réelles, *continues*, d'une variable réelle. Un certain nombre de contre-exemples ont été cités dans l'article de février 1975 ; deux autres seront pris ici, parmi les compositions de fonctions :

1° Soient les trois fonctions définies de $\mathbf{R}_*$ dans $\mathbf{R}$ pour l'une, de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ pour les deux autres :

f $\quad x \longmapsto$ valeur entière de x (noté $[x]$)

g $\quad x \longmapsto 1/x$

h $\quad x \longmapsto x^2$

Si l'on compose ces trois fonctions pour x compris entre 0 et 1, la composition de g et h est possible, celle de f et g ne l'est pas.

Il n'y a pas associativité. Pour trouver pareil exemple, il a suffi d'introduire une fonction présentant une discontinuité.

2° Soient maintenant trois fonctions ; f est définie de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^+$, et les autres de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$:

f $\quad x \longmapsto \sqrt{x}$

g $\quad x \longmapsto -x$

h $\quad x \longmapsto x$

(1) "Natural Isomorphism in group theory" *Proc. Nat. Acad. Sci.* (1942, p.537-543) et "General theory of natural equivalences" *American Mathematical Society Transactions*, vol. 58, 1945, p.231 à 295.

Nous sommes dans le cas où l'une des compositions est absurde : $f \circ g = \nu$ (ν morphisme absurde).
On ne peut pas réaliser la composition des fonctions, encore moins parler d'associativité.

J'ai tenu à donner ces deux exemples car ils correspondent aux morphismes que les mathématiciens utilisent le plus souvent. Force est de constater qu'il n'y a pas associativité !

Le Professeur J. A. Ville m'a communiqué une note (2) absolument passionnante sur cette question. Il précise que dans la théorie des catégories, "on admet une double associativité, d'abord l'associativité des permissions de multiplier, ensuite l'associativité, lorsqu'il est permis de calculer des produits, des résultats de ces multiplications. Cela est très naturel. Mais cela ne mène pas à grand chose. Il faut ajouter un axiome concernant les unités.

Cet axiome sur les unités est très fort. Si on l'exprime en théorie des relations, sa restrictivité apparaît tout de suite. Si $A(x, u)$ est la relation "Autorisation de faire le produit $x\,y$", l'axiome devient

$$A(x, y) = [\varphi(x) = \delta(y)]$$

c'est-à-dire : on peut multiplier x et y si *quelque chose* qui est la fin de x est également le début de y. Ou encore : tout élément x peut se décomposer en une queue, un corps et une tête".

Je n'aurais aucune inquiétude si tous les enseignants et auteurs de programme partageaient les idées d'Alain Bouvier (sous-jacentes aussi, me semble-t-il, chez Bernard Charles) : n'introduire un outil de mathématique qu'à partir du moment où il apparaît nécessaire. Ce qui m'inquiéterait, ce serait que le chapitre "avant zéro" soit placé tout au début de l'enseignement.

Pourrions-nous conclure avec G. Papy (3) : "La théorie des catégories est une théorie très importante, mais présentée encore actuellement d'une manière si abstraite qu'on est souvent très loin de pouvoir aider le mathématicien non spécialiste. Il est bien plus urgent d'en trouver une bonne approche didactique que de faire une nouvelle thèse où on aurait modifié légèrement un axiome" ?

(2) *Les axiomes qui en disent plus qu'il n'en ont l'air*. Nous espérons que cette note sera publiée intégralement, et que les exemples très vivants que donne le Professeur Ville permettront de faire avancer encore la réflexion sur l'utilisation de la théorie des catégories.

3) "Apprendre à enseigner" interview dans *Sciences et Avenir*, numéro spécial : "La crise des mathématiques modernes", 1973.