2 - A propos des catégories

par Alain BOUVIER, Université Claude Bernard, Lyon

A juste titre récemment, Daniel Dugué faisait remarquer que "moderniser un traité de mathématique, c'est écrire un chapitre nouveau en tête de livre et non à la fin".

Nous oublions trop souvent, dans notre enseignement, que faire des mathématiques c'est avant tout résoudre des problèmes et non pas introduire une liste suffisamment longue de définitions, de propriétés et exemples triviaux et éventuellement quelques théorèmes susceptibles, un jour, mais ce n'est pas certain, de servir à quelque chose.

Ainsi, en oubliant cela, notre enseignement est devenu caricatural. Il n'intéresse plus les utilisateurs des mathématiques puisque nous avons omis ce qui pouvait conduire à des utilisations. Il n'intéresse plus les mathématiciens puisqu'il se résume, sauf exception, à un catalogue de banalités et à du vocabulaire. Intéresse-t-il au moins les élèves ? A les en croire, il n'en serait rien.

Certains voudraient maintenant ajouter encore un chapitre de plus avant ce chapitre zéro évoqué par D. Dugué ; il concernerait les catégories.

Avant d'introduire telle ou telle notion, nous devons impérativement nous demander : à quoi ça sert ? Qui s'en sert ? Pourquoi ?

Prenons l'exemple des ensembles. Si nous relisons le traité d'analyse de Valiron (1), nous saisissons immédiatement pourquoi et comment la théorie des ensembles s'est dégagée et avérée un outil de travail indispensable pour éclaircir des notions délicates et faire découvrir des résultats substantiels. Evidemment, cela n'a rien à voir avec l'ensemblomanie délirante que nous avons vu fleurir de la maternelle à l'université depuis la mise en place de notre réforme.

Nous sommes un certain nombre à penser qu'une notion nouvelle doit être introduite seulement lorsqu'elle apparaît comme un outil unificateur de situations suffisamment variées permettant à l'élève d'en sentir immédiatement la portée, l'intérêt et l'utilité.

Je ne suis donc pas d'accord avec les idées développées par Jacqueline Fourastié dans son article du Bulletin numéro 297 au sujet des catégories.

D'abord elle affirme que l'intérêt essentiel de cette théorie tient à son grand degré de généralité. S'il en était ainsi, je suis certain qu'elle n'aurait pas connu le développement qui est le sien. Il est clair qu'en théorie des catégories, l'essentiel

— ce n'est surtout pas les catégories,
— c'est un peu les foncteurs,
— c'est surtout les morphismes fonctoriels.

Parce que des propriétés, des théorèmes, des résultats remarquables ne pouvaient s'énoncer simplement, des mathématiciens (Birkhoff, Cartan, Eilenberg, Mac Lane, Hilton, etc) introduisirent, développèrent et utilisèrent vers 1940 un outillage susceptible de donner à leurs travaux des énoncés plus parlants et des démonstrations plus élégantes.

Depuis, l'une des questions que l'on se pose à propos d'une nouvelle notion rencontrée s'exprime souvent ainsi : est-elle ou non fonctorielle ?

(1) Ou l'article de G. ARSAC du Bulletin 301.

Alors pourquoi, quitte à "faire des catégories", Jacqueline Fourastié voudrait-elle exclure *le seul point utile et digne d'intérêt* ?

Dans le même article, je lis que la théorie des catégories serait une théorie interne à l'algèbre (?). J'ignorais que l'algèbre englobât par exemple la topologie algébrique ou la géométrie algébrique, domaines où il en fut fait le premier usage et où aujourd'hui on ne pourrait, sans ces notions, énoncer clairement les résultats fort complexes obtenus.

Quelle utilité de dire "tel machin" est ou non une catégorie de même que de dire : "tel machin" est ou non un ensemble ?

La lecture du petit ouvrage de Peter Hilton (CEDIC) illustre très bien mon propos. Certes, il est facile de donner la définition d'une catégorie, des morphismes ou des foncteurs, mais tout cela nous laisse froids. Pour que notre intérêt commence à s'éveiller, il faut, pour le moins, arriver à des notions de type universel bien qu'en fait cela ne soit encore que broutille.

Tout commence vraiment lorsqu'un certain nombre de propriétés (par exemple en topologie) nécessite naturellement l'usage d'outils nouveaux. Alors, dans ce même ouvrage, on se rend compte immédiatement de la différence de niveau que cela suppose, même, comme c'est le cas ici, lorsqu'il s'agit en quelque sorte de vulgarisation.

On pourra toujours rétorquer que tel ou tel point est "enseignable" car on a pu l'enseigner dans telle ou telle circonstance. Mais quelle ignoble façon de concevoir les programmes ! Nous savons pertinemment que tout est enseignable. Tout devrait-il donc être enseigné ?

Un mathématicien ne se demande pas, lorsqu'il étudie des fonctions réelles de trois variables réelles, s'il doit ou non introduire la notion de dérivée partielle. Il le fait, car à propos de ces fonctions c'est l'un des outils de base, source de nombreux problèmes et indispensable pour la résolution d'un grand nombre de questions. En outre les physiciens et d'autres utilisateurs des mathématiques en font un usage permanent.

Pédagogiquement, nous excluons d'aller du général au particulier. Si l'on adopte la démarche opposée, ce *faux problème* à propos des catégories disparaît. L'étudiant ne rencontrera pas avant la maîtrise de mathématiques pures de situations où l'aspect fonctoriel soit simplificateur et où l'introduction du vocabulaire catégorique perde son aspect artificiel pour devenir indispensable.

Cessons donc d'augmenter le stock de vocabulaire infligé aux élèves et au contraire entraînons-les à faire des mathématiques, c'est-à-dire des problèmes précis.