7

ECHANGES : les catégories

A PROPOS DES CATEGORIES

Le Bulletin n° 297 contient un article de Jacqueline FOURASTIE intitulé : "Dans dix ans, la théorie des catégories remplacera-t-elle celle des ensembles ? ".

Avec un retard dont la Rédaction s'excuse, voici d'abord deux articles écrits tout de suite après cette parution, et ensuite une réponse de Jacqueline Fourastié.

1 - Réponse à l'article de Jacqueline Fourastié

par Bernard CHARLES, Université des Sciences et Techniques de Montpellier

J'ai lu avec beaucoup d'intérêt l'article de Jacqueline Fourastié sur la théorie des catégories car je suis de ceux qui pensent qu'on ne peut plus enseigner les mathématiques sans tenir compte de l'apport de cette théorie.

L'étude des objets mathématiques a conduit à les classer suivant leur structure : ensembles, groupes, anneaux, corps, espaces vectoriels, etc... On conçoit difficilement aujourd'hui d'étudier des groupes particuliers sans introduire assez vite la structure générale de groupe et on ne peut plus dire que cette structure soit ressentie comme particulièrement abstraite. Il en est de même pour les anneaux, corps,espaces vectoriels, etc...

A partir du moment où l'on étudie de nombreuses structures on éprouve le besoin de définir de façon générale ce qu'on entend par structure. C'est à ce besoin que répond parfaitement et de façon très simple la notion de catégorie, bien que son origine historique soit ailleurs, comme nous le préciserons plus loin. La définition d'une catégorie est très simple : objets et morphismes entre couples d'objets, le tout vérifiant un petit nombre d'axiomes aussi faciles à assimiler que ceux de la théorie des groupes.

L'intérêt de la théorie des catégories est de dégager un certain nombre de notions qui se retrouvent dans toutes les structures usuelles et dont l'identité n'était pas toujours reconnue. Les premières qui se présentent sont les suivantes :

a) Sous-objet (sous-ensemble, sous-groupe, etc...)
b) Objet quotient (ensemble quotient, groupe quotient etc...)
c) Produit (communément appelé produit direct)
d) Coproduit (appelé tantôt somme directe, tantôt produit libre).

On peut développer la théorie des catégories d'une façon fructueuse et d'ailleurs assez élémentaire au-delà de ces premières notions. Une notion intéressante est celle de dualité (qui fait par exemple correspondre les notions de sous-objet et d'objet quotient). On peut définir des classes particulières de catégories, par exemple les catégories additives (existence d'une addition des morphismes vérifiant des axiomes convenables).

Bien que les premiers éléments de la théorie des catégories soient aussi simples que ceux de la théorie des groupes, ils ne peuvent pas être introduits trop tôt dans l'enseignement car l'élève doit avoir une bonne familiarité avec un certain nombre de structures avant qu'on puisse lui parler de structures en général. Je tiens à souligner en passant que j'estime néfaste de passer trop de temps à des développements formels. Il ne faut pas non plus faire de tels développements de façon prématurée. Mais il me semble très souhaitable que l'enseignant qui enseigne les notions de groupe, anneau, corps, etc... possède les premiers éléments de la théorie des catégories, ne serait-ce que pour éviter de faire des présentations hétérogènes d'une même notion telle que sous-objet, objet quotient, produit ou coproduit.

Les brefs développements qui précèdent permettent de répondre à l'article de Jacqueline Fourastié et de nuancer certaines de ses affirmations. Tout d'abord ses craintes sur le caractère très abstrait de la notion de catégorie semblent tout à fait exagérées. Si l'on se place dans le cadre des mathématiques usuelles, je ne pense pas que la théorie des catégories se présente en concurrente de la théorie des ensembles mais qu'elle représente un couronnement tout naturel de l'axiomatisation des mathématiques (je me place d'un point de vue naïf en laissant volontairement de côté l'aspect fondement des mathématiques qu'il y a intérêt à séparer de l'aspect formel élémentaire de la notion de catégorie). Je pense enfin que les craintes de Jacqueline Fourastié sur le caractère trop restrictif de l'axiome d'associativité viennent d'une appréciation inexacte du rôle de la théorie des catégories.

Bien que la façon de loin la plus simple et la plus naturelle de présenter la notion de catégorie me semble être celle qui est suggérée ici, ce n'est pas ainsi que les choses se sont passées historiquement. L'origine de la notion de catégorie est dans l'étude des foncteurs définis par la construction des groupes d'homologie d'un espace topologique. La notion de foncteur est très importante car elle permet d'établir un lien entre deux catégories.