# 5

# C. E. T.

## Les mathématiques dans l'enseignement professionnel

*par J. BLION, C.E.T. annexe de l'E.N.N.A. de Lyon*

Les opérations de fraisage, régulièrement espacées sur le pourtour des pièces de révolution, en vue de réaliser une denture d'engrenage, une surface prismatique régulière, une graduation, etc., se déroulent par cycles comprenant trois phases :

— avance de la table et action de l'outil sur la pièce ;
— recul de la table ;
— arrêt de la table et rotation de la pièce.

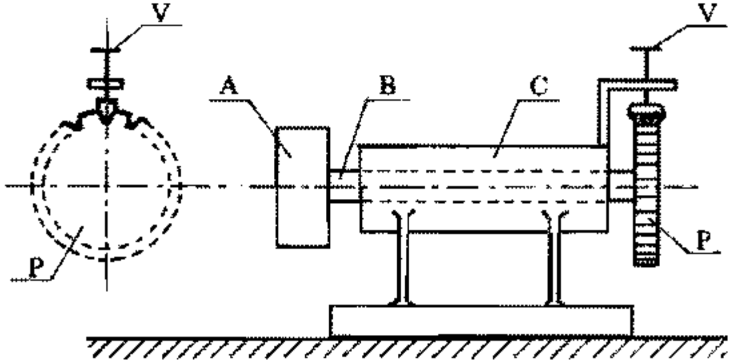
La rotation qui se produit au cours de la troisième phase est commandée à la main par l'opérateur. Pour assurer le contrôle précis de cette opération, celui-ci dispose d'un plateau à encoches dans les cas les plus simples, et, plus généralement, d'un diviseur universel.

Ces appareils se fixent sur la table de la machine. Ils possèdent une broche mobile en rotation qui porte la pièce. Leur bonne utilisation occasionne des calculs où peuvent intervenir :

— les opérations dans l'ensemble des rationnels,
— les équations à solutions entières,
— la divisibilité dans N,
— les suites décimales périodiques.

## I — Utilisation d'un plateau à encoches

### 1 — *L'appareil*




Le bâti C, traversé par la broche B sur laquelle sont fixés le plateau P et la pièce A.

Le plateau P porte sur sa périphérie $k$ encoches régulièrement espacées.

Un verrou V immobilise l'ensemble à volonté.

### 2 — *Aspect mathématique*

D(k) est l'ensemble des diviseurs de $k$ . Description de D(k).

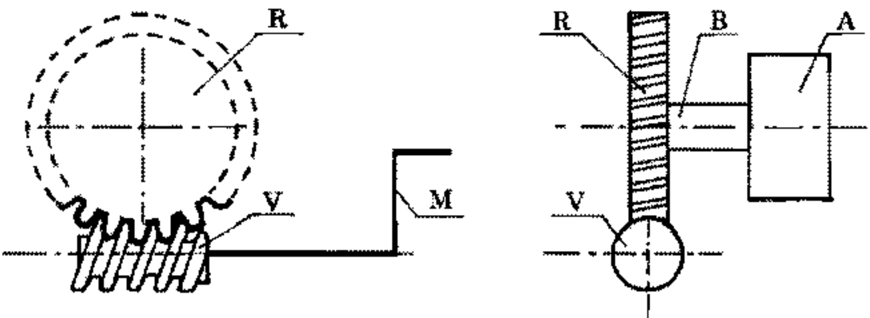
On veut réaliser $z$ opérations régulièrement espacées sur le pourtour de la pièce A.

- Condition de possibilité : $z \in D(k)$.
- Mesure de la rotation de la pièce entre deux opérations par le calcul du nombre d'encoches dont on fera tourner le plateau.

## II — Utilisation du diviseur universel

### 1 — *L'appareil*

a) Organes d'entraînement de la pièce.



Sur la broche B qui porte la pièce A est clavetée une roue dentée R. Selon les appareils cette roue possède 40 ou 60 dents. Dans la suite nous désignerons par k ce nombre de dents.

Une vis sans fin à un filet V engrène avec la roue R. La manivelle M, clavetée sur l'axe de la vis, permet de faire tourner à la main la vis, la roue et la pièce.

b) Premières considérations d'ordre mathématique :

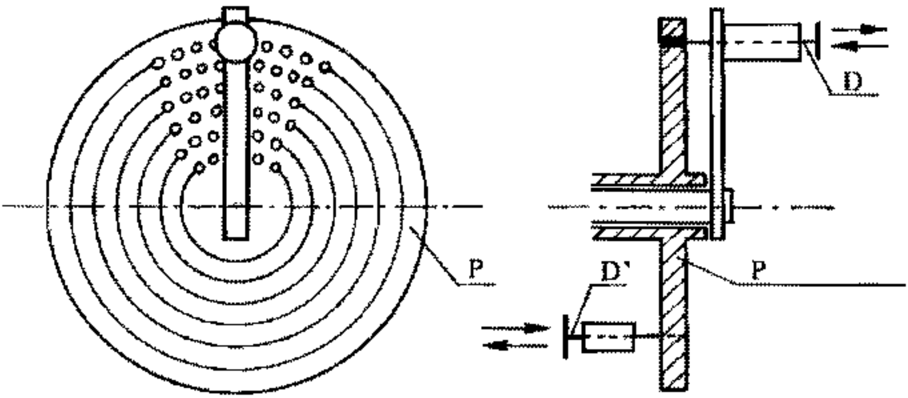
— raison de la transmission vis-roue ou manivelle-pièce $\frac{1}{k}$ ;

— si on veut réaliser sur la pièce z opérations régulièrement espacées, il faut que la pièce tourne de $\frac{1}{z}$ tour entre deux opérations successives.

Cette rotation est obtenue par t tours de manivelle.

$$t \times \frac{1}{k} = \frac{1}{z} \quad \text{donc} \quad t = \frac{k}{z}$$

c) Organes de contrôle de la rotation de la manivelle.




— Un plateau amovible P est monté fou sur l'axe de la vis et de la manivelle. Il est perforé de trous disposés sur six cercles concentriques. Les trous de chaque cercle sont équidistants.

— Le doigt plongeur D' permet d'immobiliser le plateau à volonté par pénétration dans un trou.

— On dispose de quatre plateaux interchangeables. A chacun d'eux correspond l'ensemble des nombres de trous des six cercles concentriques.

| | |
|---|---|
| plateau I | $E = \{17, 21, 25, 29, 33, 41\}$ |
| plateau II | $F = \{18, 22, 26, 30, 35, 43\}$ |
| platrau III | $G = \{19, 23, 27, 31, 37, 47\}$ |
| plateau IV | $H = \{20, 24, 28, 32, 39, 49\}$ |

— La poignée de la manivelle comporte un doigt plongeur D. Elle peut glisser sur la manivelle et être placée en face d'une des six rangées de trous. La pénétration du doigt dans un trou du plateau immobilise la manivelle, la vis, la roue et la pièce.

2 — *Contrôle de la rotation de la manivelle mesurée par* $\frac{k}{z}$.

Soit $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$, l'écriture réduite de $\frac{k}{z}$.

Plusieurs situations peuvent se présenter :

A) *L'ensemble $E \cup F \cup G \cup H$ contient un multiple de b.*

Soit m ce naturel. Alors, on peut trouver $n (n \in \mathbb{N})$ tel que $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$. Dans ce cas on monte le plateau possédant le cercle de m trous sur le diviseur. Entre deux opérations de l'outil, on fait tourner la manivelle en comptant n intervalles sur le cercle de m trous.

B) *L'ensemble $E \cup F \cup G \cup H$ ne contient pas de multiple de b,* mais ***il existe deux naturels c et c'***, strictement inférieurs à b, tels que $c \times c' = b$ et $E \cup F \cup G \cup H$ contient au moins un multiple de c et un multiple de c'.

Alors, si on peut trouver deux entiers x et x' tels que $\frac{x}{c} + \frac{x'}{c'} = \frac{a}{b}$, le diviseur universel permet de réaliser la rotation mesurée par $\frac{a}{b}$.

a) *Résolution de l'équation dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$*

Soit g le p.g.c.d. de c et c'.

— *Si $g > 1$*, en posant $c = g\,d$ et $c' = g\,d'$, l'équation s'écrit

$$g(d'x + dx') = a$$

Comme $\frac{a}{b}$ est irréductible, g qui divise b ne peut diviser a ; *l'équation est sans solution.*

— *Si $g = 1$*, c et c' sont étrangers.

Rappelons le théorème de Bachet : "Si a et b sont deux entiers étrangers, il existe au moins deux entiers x et y tels que $ax + by = 1$".

L'équation $c'x + cx' = 1$ admet donc une solution (u,v).

*L'équation* $c'x + cx' = a$ *admet la solution (au,av)* ainsi que *toute solution (x,x') telle que :*

$$c'(x - au) + c(x' - av) = 0$$

Comme c et c' sont étrangers, pour tout entier p cette égalité est vraie si et seulement si $x - au = pc$ et $x' - av = -pc'$ : $x = pc + au$ et $x' = -pc' + av$. Ainsi toutes les solutions de l'équation sont connues si on connaît le couple (u,v).

Une méthode pour trouver ce couple est d'écrire les éléments successifs des ensembles $c\mathbf{N}$ et $c'\mathbf{N}$ jusqu'au moment où l'on trouve un couple $(u', v')$ tel que $u' \in c\mathbf{N}$ et $v' \in c'\mathbf{N}$ et $|u' - v'| = 1$.

b) *Retour au diviseur universel*

$E \cup F \cup G \cup H$ contenant un multiple m de c et un multiple m' de c', et une solution (x,x') de l'équation précédente étant retenue, on peut trouver les entiers n et n' tels que :

$$\frac{x}{c} = \frac{n}{m} \quad \text{et} \quad \frac{x'}{c'} = \frac{n'}{m'} .$$

Avec un plateau possédant un cercle de m trous et un cercle de m' trous, ou avec deux plateaux possédant l'un un cercle de m trous, l'autre un cercle de m' trous, on peut réaliser successivement les rotations de la manivelle mesurées en trous par $\frac{n}{m}$ et $\frac{n'}{m'}$. Le doigt D' est utilisé pour contrôler une de ces deux rotations si on monte deux plateaux l'un contre l'autre.

c) *Exemple*

Avec un diviseur à roue de 40 dents, on veut diviser le pourtour d'un cylindre en 77 parties égales.

$$\frac{k}{z} = \frac{a}{b} = \frac{40}{77} \quad \text{et} \quad 77 = 7 \times 11$$

— Examen des conditions requises :
- 7 et 11 sont étrangers. $c = 7$ ; $c' = 11$
- Existence de multiples de 7 et de 11 dans $E \cup F \cup G \cup H$ :

| plateaux | I | II | III | IV | nb. mult. |
|---|---|---|---|---|---|
| multiples de 7 | 21 | 35 | — | 28;49 | 4 |
| multiples de 11 | 33 | 22 | — | — | 2 |

Il y a 8 possibilités matérielles de réaliser la division. Les plus simples sont celles qui n'utilisent qu'un plateau : plateau I ou II.

— Résolution de l'équation $\frac{x}{7} + \frac{x'}{11} = \frac{40}{77}$

$$11x + 7x' = 40 \begin{cases} 11N \longrightarrow & 0, 11, 22, 33, \ldots \\ 7N \longrightarrow & 0, 7, 14, 21, 28, \ldots \end{cases} \quad |22-21| = 1$$

Une solution de l'équation $11y + 7y' = 1$ est $(2\ ;\ -3)$. Son ensemble de solutions est donc :

$$\{(2 + 7p\ ;\ -3 - 11p) \mid p \in \mathbf{Z}\}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $11x + 7x' = 40$ est :

$$\{(80 + 280p\ ;\ -120 - 440p) \mid p \in \mathbf{Z}\}$$

Pour $p = 0$ on a la solution $(80\ ;\ -120)$.

— Rotation de la manivelle :

$\frac{40}{77} = \frac{80}{7} - \frac{120}{11}$. Avec le plateau I, on écrira cette somme $\frac{240}{21} - \frac{360}{33} = 11 + \frac{9}{21} - 10 - \frac{30}{33} = 1 + \frac{9}{21} - \frac{30}{33}$. On fera tourner la manivelle d'abord d'un tour complet ; ensuite, dans le même sens, de 9 intervalles comptés sur le cercle de 21 trous ; enfin, dans l'autre sens, de 30 intervalles comptés sur le cercle de 33 trous. *C'est la division composée.*

Si les conditions mathématiques requises par cette méthode ne sont pas satisfaites, deux autres méthodes peuvent être mises en oeuvre.

C) *La méthode différentielle*

a) *Principe*

On provoque une rotation contrôlée du plateau pendant la rotation de la manivelle. Ainsi, au cours d'une opération, trois rotations peuvent être considérées :

— rotation absolue de la manivelle mesurée par $t = \frac{a}{b}$ ;

— rotation de la manivelle par rapport au plateau $t'$ ;

— rotation absolue du plateau mesurée par $t''$.

$t$, $t'$ et $t''$ sont des rationnels liés par la relation :

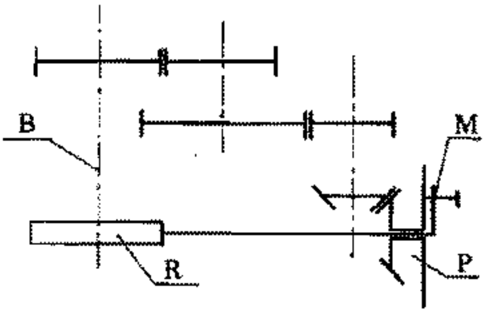
$$t = t' + t''$$

$t'$ est choisi aussi voisin que possible de $t$ et aisément réalisable au moyen d'un seul cercle de trous.

$t'' > 0$ signifie que le plateau tourne dans le même sens que la manivelle.

$t'' < 0$ signifie qu'il tourne en sens contraire.

b) *Problème technique :* Contrôle de la rotation du plateau.




Solution : En établissant un train d'engrenages comportant un couple conique de raison 1 entre l'axe de la broche et le plateau, on crée une liaison cinématique de la manivelle au plateau. La rotation de ce dernier est contrôlée par celle de la manivelle.

c) *Problème mathématique :* Calcul de la raison du train d'engrenages, r. Détermination des éléments de ce train.

— *Calcul de r*

L'ensemble de la transmission du mouvement de la manivelle au plateau a pour raison $\frac{1}{k} \times r$. Donc $t \times \frac{1}{k} \times r = |t''|$ ; et comme $t'' = t - t'$, $\qquad r = \frac{k\,|t - t'|}{t}$.

— *Composition du train d'engrenages*

Parmi l'ensemble des roues dont on dispose, on choisit des éléments dont les nombres de dents peuvent vérifier la relation $\frac{p}{p'} = r$.

($p$ = produit des nombres de dents des roues menantes
$p'$ = produit des nombres de dents des roues menées).

Ce choix dépend du nombre d'axes intermédiaires dont la parité est définie par le signe de $t''$ :

$t'' > 0$, nombre impair d'axes ; $t'' < 0$, nombre pair d'axes.

d) *Exemple*

On veut diviser en 302 parties égales le pourtour d'un cylindre à l'aide d'un diviseur à roue de 40 dents. Les roues dentées dont on dispose ont des nombres de dents qui forment l'ensemble $J$ :

$J = \{20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 90, 100, 120\}$.

$t = \frac{40}{302} = \frac{20}{151}$ ; 151 est premier ; la méthode de la division composée est inapplicable.

— *Choix de t'* $\qquad \frac{20}{151} \approx \frac{2}{15} \qquad t' = \frac{2}{15}$

La rotation de $\frac{2}{15}$ de tour est facilement réalisable (plateau II ; cercle de 30 trous).

— *Calcul de r*

$t = \frac{20}{151}$ et $t' = \frac{2}{15}$ ; alors $t'' = -\frac{2}{151 \times 15}$

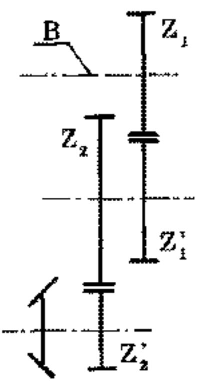
$$r = \frac{40 \times \frac{2}{151 \times 15}}{\frac{20}{151}} \qquad r = \frac{4}{15}$$

— *Parité du nombre d'axes* intermédiaires (y compris l'axe d'attaque du couple conique) :

$t'' < 0$ ; le nombre d'axes est pair.

— *Choix des roues du train*

La raison $\frac{4}{15}$ peut être obtenue avec deux axes et quatre roues. Les nombres de dents $Z_1$, $Z'_1$, $Z_2$, $Z'_2$ de ces roues doivent satisfaire aux conditions suivantes : $\{Z_1, Z'_1, Z_2, Z'_2\} \subset J$ et $\frac{Z_1 \times Z_2}{Z'_1 \times Z'_2} = \frac{4}{15}$




Une solution à ce problème qui en a plusieurs peut être obtenue en factorisant les termes de $\frac{4}{15}$, $\frac{2 \times 2}{3 \times 5}$ par exemple, et en cherchant deux naturels p et q tels que $2p = Z_1$, $3p = Z'_1$, $2q = Z_2$, $5q = Z'_2$ (dans l'exemple choisi), et que $10 \leqslant p \leqslant 30$ et $10 \leqslant q \leqslant 24$.
De plus les nombres $Z_1$, $Z'_1$, $Z_2$, $Z'_2$ doivent être distincts deux à deux, ce qui exclut $p = q$ ou encore $p = 10$ et $q = 15$ par exemple.
Avec $p = 20$ et $q = 10$ on obtient
$Z_1 = 40$, $Z'_1 = 60$, $Z_2 = 20$ *et* $Z'_2 = 50$.

D) *La méthode des suites décimales*

C'est une méthode approchée de division composée qui utilise uniquement, quel que soit le problème posé, un cercle de 100 trous et un cercle de 99 trous.

L'erreur introduite doit être estimée. On la néglige si elle n'excède pas les tolérances de fabrication ; sinon, on la corrige.

a) *Principe*

Il existe un naturel p tel que $\frac{p}{10\,000}$ soit l'approximation décimale de $\frac{a}{b}$ à 0,000 05 près.

Exemple : si k = 60 et z = 257, alors $\frac{a}{b} = \frac{k}{z} = 0{,}233\,463...$ $\frac{a}{b} \approx 0{,}2335$ et $p = 2335$

On détermine deux entiers x et y tels que :

$$\frac{x}{100} + \frac{y}{99} \approx \frac{p}{10\,000} \approx \frac{a}{b}$$

Sur le diviseur on exécute successivement les rotations de la manivelle mesurées en tours par $\frac{x}{100}$ et $\frac{y}{99}$.

b) *Calcul de x et y*

— Il existe deux entiers v et y tels que $|y| \leqslant 50$ et $\frac{v}{100} + \frac{y}{10\,000} = \frac{p}{10\,000}$

Exemples :

si $p = 2335$, $\quad \frac{23}{100} + \frac{35}{10\,000} = \frac{2335}{10\,000}$

si $p = 2377$, $\quad \frac{24}{100} + \frac{-23}{10\,000} = \frac{2377}{10\,000}$

Plus généralement

$$\text{si } p - 100\,E(\frac{p}{100}) < 50, \quad \begin{cases} v = E(\frac{p}{100}) \\ y = p - 100\,E(\frac{p}{100}) \end{cases}$$

$$\text{si } p - 100\,E(\frac{p}{100}) \geqslant 50, \quad \begin{cases} v = E(\frac{p}{100}) + 1 \\ y = p - 100[E(\frac{p}{100}) + 1] \end{cases}$$

— Valeur de x :

$$\frac{p}{10\,000} = \frac{v}{100} - \frac{y}{100} + \frac{y}{100} + \frac{y}{10\,000} = \frac{v-y}{100} + (\frac{y}{100} + \frac{y}{10\,000})$$

On pose $v - y = x$

— De plus :

$$\frac{y}{100} + \frac{y}{10\,000} \approx \frac{y}{10^2} + \frac{y}{10^4} + \frac{y}{10^6} + \ldots + \frac{y}{10^{2n}} + \ldots$$

Cette somme est le développement décimal du rationnel $\frac{y}{99}$. Ainsi $\frac{p}{10\,000} \approx \frac{x}{100} + \frac{y}{99}$

d) *Estimation et correction de l'erreur*

Soit à réaliser 151 divisions équidistantes sur le pourtour d'une pièce au moyen d'un diviseur à roue de 60 dents.

$\frac{k}{z} = \frac{a}{b} = \frac{60}{151} = 0{,}397351 \ldots \qquad p = 3974$

74 ⩾ 50. Donc $v = 39 + 1$ $\qquad y = 74 - 100$

$v = 40 \qquad y = -26$

$x = 40 - (-26) = 66$

$\frac{a}{b} = \frac{66}{100} - \frac{26}{99}$

— Mesure de l'erreur en tour

Pour la manivelle à chaque opération :

$$\left(\frac{66}{100} - \frac{26}{99}\right) - \frac{60}{151} = \frac{34}{1\,494\,900}$$

Pour la pièce après 151 opérations :

$$\frac{34}{1\,494\,900} \times \frac{1}{60} \times 151 = \frac{34}{594\,000}$$

— Mesure de l'erreur périphérique en mm si la pièce a un diamètre de 250 mm : $250 \times \pi \times \frac{34}{594\,000} = e$

$$0{,}0495 < e < 0{,}0496$$

Cette erreur positive indique un excès de rotation. Voisine de 0,05 mm, elle peut être hors tolérance.

— Réduction de l'erreur par compensation :

Si on prend $\frac{67}{100} - \frac{27}{99}$ au lieu de $\frac{66}{100} - \frac{26}{99}$ pour valeur approchée de $\frac{a}{b}$, l'erreur à chaque opération devient $\left(\frac{67}{100} - \frac{27}{99}\right) - \frac{60}{151} = -\frac{117}{1\,494\,000}$ ; erreur négative qui indique une rotation insuffisante dont la valeur absolue est à peu près le triple de l'erreur précédente.

On effectuera une rotation mesurée par $\frac{67}{100} - \frac{27}{99}$ suivie de trois rotations de $\left(\frac{66}{100} - \frac{26}{99}\right)$ tour. Les 151 opérations peuvent se répartir ainsi :

$$\left(\frac{67}{100} - \frac{27}{99}\right) \times 37 + \left(\frac{66}{100} - \frac{26}{99}\right) \times 114$$

Ainsi l'erreur linéaire sur la périphérie de la pièce de 250 mm de diamètre est mesurée par

$$\left(\frac{34}{1\,494\,900} \times 114 - \frac{117}{1\,494\,900} \times 37\right) \times \frac{1}{60} \times 250 \times \pi \approx -0{,}004$$