Rubrique des problèmes de l'APM

Cette rubrique est pour le plaisir, celui qui nous fait choisir les mathématiques à vingt ans, et non directement pour notre enseignement.

Le niveau ne doit pas excéder celui des classes préparatoires ou des deux premières années de faculté. Un certain caractère d'originalité dans l'énoncé est souhaité, ce qui exclut, en particulier, les applications immédiates de théorèmes classiques, ou les problèmes déjà parus dans d'autres revues.

Si l'auteur d'un énoncé n'est pas en mesure d'en donner la solution, il doit accompagner son envoi du maximum d'informations concernant le problème, afin d'aider les responsables de la rubrique. Un astérisque signale un problème dont la solution n'est pas connue de ceux-ci. Le Bulletin publie les meilleures solutions.

Enoncés et solutions sur feuilles séparées et tapées à la machine S.V.P. N'oubliez pas de signer. Toute correspondance concernant la rubrique est à adresser à :

Charles AUQUE
Université de Clermont-Ferrand
Mathématiques Pures
B.P. 45 - 63170 AUBIERE

ENONCES

Enoncé n° 48 (CUCULIERE, IREM Paris-Nord)

Pour quels entiers p entre 1 et 9, existe-t-il deux nombres distincts, qui s'écrivent en utilisant une fois et une seule chacun des chiffres de 1 à p , tels que l'un divise l'autre ?

Enoncé n° 49 (EHRHART, Strasbourg)

On désigne par f(n) le nombre de points d'intersection des diagonales (considérées comme segments) d'un polygone régulier convexe à n côtés.

1° Déterminer f(12) et f(16).

2° Déterminer f(n) ou, à défaut, donner le meilleur encadrement possible de f(n).

Enoncé n° 50 (PERONNY, Clermont-Ferrand)

Existe-t-il une suite numérique réelle (u_n), telle que la série de terme général u_n^α soit convergente pour $\alpha = 1$ et divergente pour tout $\alpha \neq 1$?

SOLUTIONS

Enoncé n° 44 (BLANCHARD, Marseille)

Déterminer les naturels m et n tels que $\left|19^m - 2^n\right|$ soit un carré.

Solution (B. CHEVREAU, Ecole Polytechnique de Quito)

A) Soit d'abord l'équation

$$2^n - 19^m = a^2$$

Si $m \neq 0$, on a $n \geqslant 5$, d'où la congruence

$$19^m + a^2 \equiv 0 \text{ mod. } 16$$

Cette congruence est impossible, car les puissances de 19 sont congrues à 1, 3, 9 ou 11 et les carrés impairs à 1 ou 9.

Avec $m = 0$, n ne peut être supérieur ou égal à 2 (sinon le premier membre serait congru à -1 mod. 4 et le second à 1 puisque a est impair).

Il reste donc les deux solutions triviales :

$$m = 0, \quad n = 0, \quad a = 0 \qquad \text{et} \qquad m = 0, \quad n = 1, \quad a = 1.$$

B) Equation $19^m - 2^n = a^2$.

1) Supposons $n \geqslant 2$. Alors a est impair. La congruence modulo 4 conduit à m pair. Soit $m = 2r$.

De $(19^r - a)(19^r + a) = 2^n$, on déduit

$$19^r - a = 2^\alpha \text{ et } 19^r + a = 2^{n-\alpha} \text{ avec } \alpha \leqslant n - \alpha.$$

$$19^r = (2^\alpha + 2^{n-\alpha})/2 \quad \text{entraîne} \quad \alpha = 1.$$

On a alors $19^r - 1 = 2^{n-2}$ et une contradiction modulo 3.

2) Voyons maintenant $n = 1$. Le premier membre est congru à -1 modulo 3, et ne peut donc être un carré.

3) Il reste $n = 0$.

a est pair ; en considérant les deux membres modulo 4, on obtient m pair. Posons $m = 2r$. On a

$$(19^r - a)(19^r + a) = 1$$

Les deux facteurs sont égaux à 1, ce qui correspond à la solution $m = n = a = 0$.

Autres solutions : COQUET de Valenciennes, qui propose aux lecteurs l'équation voisine $19^m + 2^n = a^2$; QUENTON de Madrid et l'auteur.

Enoncé n° 45 (ADLER, Paris)

Soit P un polygone plan non convexe. On prend l'enveloppe convexe de ses sommets ; soit AB un segment de cette enveloppe convexe qui n'est pas entièrement un segment de P ; A et B divisent le polygone P en deux parties ; on prend la symétrique de l'une de ces parties par rapport au milieu de AB ; elle détermine, avec l'autre partie, un nouveau polygone P'.

Si P' est convexe, on achève l'algorithme, sinon on applique la même méthode au polygone P'. Démontrer qu'au bout d'un nombre fini d'opérations on obtient un polygone convexe.

Solution de l'auteur.

Les deux polygones P et P' ont des côtés deux à deux équipollents. Or, si nous partons d'une somme de n vecteurs nulle, il n'est possible de déterminer avec ces vecteurs qu'un nombre fini de polygones.

Par conséquent le processus défini est soit fini soit périodique. Ce dernier cas est exclu puisque l'aire du polygone augmente.

On peut remarquer que le polygone convexe obtenu est unique, à une symétrie-point et une translation près.