Les modèles logico-mathématiques dans la connaissance scientifique

par J. GADREY

Dans un texte précédent (*) j'avais indiqué, à propos du plan, comment on pouvait définir un *modèle mathématique* : à mi-chemin entre une situation ou une famille de *situations* (questions qu'on se pose à propos du réel, expériences, jeux ...) et une ou plusieurs *théories* globales, une théorie (mathématique) étant elle-même un couple (L, M) avec L langage logique et M ensemble de formules de ce langage, appelées *axiomes* de la théorie.

Mais ce texte avait pour seul objet de situer les places respectives de ces concepts *à l'intérieur du processus logique de mathématisation* (de certains aspects de la réalité). Il importe maintenant d'examiner quelle est la place de ce processus lui-même (et en particulier des modèles) dans la connaissance scientifique.

I Généralités

Ce texte est centré sur la place des *modèles* dans les sciences, mais on utilisera d'autres notions brièvement évoquées maintenant :

— La connaissance scientifique sera comprise comme le processus qui permet de saisir l'essence de l'objet d'étude (c'est-à-dire ce qui n'est pas immédiat ni apparent mais qui pourtant détermine en profondeur les manifestations phénoménales) afin d'être capable de prévoir et de maîtriser dans une certaine mesure le processus réel.

(*) Bulletin de l'APM N° 289 (juin 1973) "A propos du plan mathématique..."

— Les concepts scientifiques sont les outils fondamentaux de cette pénétration. Ils expriment les éléments principaux et les contradictions principales de cette essence. Ils sont obtenus par abstraction à partir de l'expérience, mais aussi de connaissances scientifiques antérieures. Ils sont à ce titre des produits historiques. La puissance d'une théorie se mesure au caractère pénétrant de ses concepts et non au raffinement des modèles qu'elle utilise.

Certains concepts scientifiques sont de type quantitatif : on parlera dans ce cas de *l'indicateur* d'un concept pour désigner la ou les fonctions numériques utilisées dans le repérage. C'est ainsi que les concepts de productivité, de période, de temps, de distance etc... peuvent chacun être précisés à l'aide de multiples indicateurs distincts. D'autres concepts scientifiques ne donnent pas lieu à un repérage numérique.

Enfin dans ces remarques préliminaires, il est utile de définir ce que nous entendons par connaissance concrète (ou représentation concrète) dans le travail scientifique (ou pédagogique). Spontanément, on tend à définir ce concret comme l'immédiat, le perceptible, l'apparent. La pratique pédagogique (en mathématiques tout particulièrement) et scientifique conduit vite à refuser cette réduction de la pensée concrète à la connaissance sensible primitive. L'étude même approximative des représentations mentales, des analogies, des références sous-jacentes dont procède toujours l'intuition, et souvent même la déduction mathématique (*), conduit à une notion plus riche du concret.

On peut schématiser le processus de connaissance par un double mouvement (qui sera précisé plus loin) d'abstraction (caractérisé par l'élaboration des concepts, leur mise en relation et l'étude déductive de ces relations, éventuellement à l'aide d'un modèle mathématique : c'est la recherche de l'essence du phénomène) et de "concrétisation" au sens où l'étude abstraite est mise en relation avec les phénomènes réels dans leur diversité, où la théorie abstraite "refait surface" (la connaissance selon une autre image spatiale de Noël Mouloud "s'enfonce dans le réel") et permet d'avoir prise sur le mouvement étudié. Le sujet connaissant

(*) "Mais si l'on ne fait pas indûment abstraction de la psychologie du mathématicien, on ne tarde pas à s'apercevoir qu'il y a dans l'activité mathématique plus qu'une organisation formelle de schèmes et que toute idée pure est doublée d'une application psychologique, d'un exemple qui fait office de réalité". (G. BACHELARD — Le nouvel esprit scientifique, p. 4).

parvient alors seulement à rassembler en un tout cohérent et en général vérifiable, l'étude abstraite menée à son terme et les données les plus immédiates, ce qui se voit et ce qui ne se voit pas mais qui est déterminant ; il aboutit à un *concret théorique*, ces deux termes retrouvant leur unité dans une *nouvelle perception de la réalité* : celle-ci apparaît "plus réelle que nature", plus concrète car mieux dominée dans son mouvement profond ; elle est perçue, comme on dit parfois, "dans toute son épaisseur". *Cette connaissance concrète pourra servir de support à de nouvelles abstractions* d'un niveau encore *supérieur*.

Par exemple : la droite réelle possède un référent réel ou graphique : le "continu géométrique", les segments, les tracés linéaires etc... A partir de divers problèmes et situations (en général déjà posés par les mathématiciens dans ce cas : infiniment petits, intersections de courbes, limites...) s'est constituée une construction abstraite de l'ensemble des nombres réels, comme classe d'équivalence de suites ou de parties de l'ensemble connu des rationnels. A son tour, cette théorie abstraite vient enrichir la représentation qu'on a de la droite réelle et de ses propriétés ; la preuve : on illustre en général sur cette droite graphique, les démonstrations théoriques concernant le corps des réels **R**. Mais comme le note J. Desanti (les idéalités mathématiques p. 49-50) "l'expérience pré-mathématique du continu" n'est pas un guide essentiel pour la construction formelle de **R** ; elle est un support, relativement "inerte". Ceci est parfaitement exact. S'il est vrai que les notions mathématiques d'infini, par exemple, finissent par devenir familières au mathématicien, elles ne relèvent pourtant pas de l'expérience sensible primitive.

Ces développements philosophiques sur la notion de connaissance concrète ont un intérêt *pratique*. En effet, un enseignement des mathématiques confondant concret et connaissance sensible pourrait tomber dans deux types de travers opposés

1 — *le formalisme* : si la connaissance concrète n'est jamais qu'un support pré-mathématique initial, le travail du mathématicien doit consister à s'en dégager au plus vite pour accéder à la véritable théorie *en forme et à ses développements abstraits*

2 — *l'empirisme ou le pragmatisme* : pour rester en prise sur le "concret" et sur la vie, les mathématiques doivent s'écarter le moins possible de l'expérience et des événements réels (empirisme), ou au mieux de la pratique humaine (pragmatisme).

Au contraire, une conception du concret comme *produit* d'une connaissance antérieure consolidée, fondée sur le degré de *maîtrise théorique et pratique* de l'objet, laisse la porte ouverte aux dépassements et abstractions successives, aux degrés dans la connaissance, aux étapes du développement intellectuel chez l'enfant. Sans doute pourrait-on introduire à ce sujet les concepts d'assimilation, d'accommodation et d'abstraction réfléchissante de Jean Piaget pour obtenir une autre approche de la notion de pensée concrète.

Note : Piaget n'utilise pas le terme de concret (lorsqu'il parle d'"opérations concrètes" ou de "pensée concrète") dans le sens défini précédemment, mais plutôt dans l'optique baptisée "pragmatique" ; toutefois sa profonde connaissance "concrète" des opérations de la pensée chez l'enfant le met à l'abri des deux formes de schématisme signalées précédemment.

II Positivisme et néo-positivisme

Revenons aux modèles. Dans tout ce qui suit, le terme de modèle sera exclusivement réservé aux modèles *logico-mathématiques* à savoir : ensemble d'hypothèses, lois ou relations supposées caractéristiques d'une situation étudiée, et traduites dans les termes formels d'une ou plusieurs théories mathématiques (car certains modèles peuvent faire appel à la fois à la théorie des espaces vectoriels et à celle des probabilités etc...).

Ceci posé, on constate, chez les scientifiques eux-mêmes, une grande diversité dans l'appréciation de la place des modèles dans la connaissance. Néanmoins, deux courants peuvent être distingués, qui renvoient finalement à deux "écoles" bien connues de la "philosophie des sciences".

1) *La conception empiriste ou positiviste* : pour elle, le travail du scientifique consiste à faire des expériences et à traduire les résultats à l'aide d'une loi ou d'un ensemble de lois qu'on peut baptiser provisoirement "modèle prescriptif". Pour le positivisme première manière, lois et théories étaient supposées absolues, définitives ; la science consistait à découvrir ces "lois de la nature". Par la suite, les héritiers du positivisme ont été contraints d'admettre que les lois puissent être remplacées par d'autres, et qu'un modèle pourrait être choisi, en fonction de son caractère plus ou moins "commode", parmi d'autres possibles.

Dans tous les cas, ce qui est déterminant dans la connaissance c'est la "pression" des choses, c'est l'expérience sensible, c'est le phénomène perçu. La théorie n'a guère plus de pouvoir que le stylo qui enregistre les résultats.

Ces conceptions étaient fréquentes dans les sciences "en voie de développement" à forte dominante empirique. Le positivisme généralise abusivement ce qui peut être une nécessité provisoire pour telle discipline encore dépourvue de totalisation théorique satisfaisante. Il a d'ailleurs eu des aspects "positifs", ne serait-ce que son intransigeance à exiger la sanction des faits et son refus des interprétations métaphysiques ou des hypothèses gratuites.

Pour lui, le schéma de la connaissance serait du type suivant :

modèles ou simples lois empiriques "collant" aux faits	=	symboles et langages *commodes* pour représenter les faits	□ □ □
			↕ ↕ ↕
			expériences, ou sensations, ou phénomènes

2) *Le néo-positivisme ou positivisme logique*, qui a pris le relais du positivisme classique, distingue deux sortes d'énoncés scientifiques et deux seulement :

a) les simples comptes rendus ou résultats bruts d'expérience, les constatations empiriques ;
b) les lois de la logique formelle, seules lois de la pensée pure.

La méthode scientifique consiste à combiner les propositions obtenues aux a) à l'aide des règles de b).

On aboutit à une surestimation du rôle de la logique et des mathématiques "pures" dans le travail scientifique : seul ce qui se formalise accède au statut de vérité, *le reste n'a pas de sens* ou bien est du domaine de la simple constatation.

On obtient un schéma tel que :

$\boxed{\text{Logique formelle}} \;\underset{\longleftrightarrow}{\overset{\longleftrightarrow}{}}\; \boxed{\text{constatations expérimentales}}$

Du point de vue philosophique, on peut se demander d'où viennent ces "lois de la pensée pure" et comment il se fait qu'elles s'appliquent avec succès au réel ; comment s'effectue la liaison entre les deux niveaux ? Le recours à un "sujet transcendantal" ou à l'un de ses substituts ne s'impose-t-il pas ?

Jean Piaget s'est employé à réfuter le néopositivisme et la prétention de ce dernier à identifier les lois de la pensée et celles de la logique formelle, et donc à soumettre la psychologie à la logique. Ce conflit semble aujourd'hui dépassé, ne serait-ce que par le fait des progrès de la psychologie.

Des exemples :

- qu'on ait pu entendre aussi souvent que la géométrie "intuitive" du temps passé n'était *pas scientifique* et que seule la géométrie entièrement axiomatisée était correcte, indique une conception idéaliste de la perfection scientifique, identifiée aux raisonnements de la logique formelle ; en réalité il s'agit de deux niveaux distincts et complémentaires dans l'approche scientifique de la réalité ;
- le terme même de mathématique *pure* ;
- les idées fréquentes (en particulier dans les sciences humaines et économiques) pour lesquelles on n'atteint la rigueur que dans les études formalisées, les autres étant condamnées aux aléas d'un "qualitatif" grossier et préscientifique ;
- l'abandon des recherches théoriques les plus profondes pour des développements mathématiques raffinés mais superficiels, c'est-à-dire l'abandon du concept pour le modèle.

Le néo-positivisme prolonge comme on le voit la tradition empiriste, en lui ajoutant une dose de logique formelle. Il faut dire que de grands logiciens sont à l'origine de ce courant : ceux du "Cercle de Vienne" (Carnap, Reichenbach, Wittgenstein), et de l'école anglo-saxonne (B. Russell, Ayer, Morris).

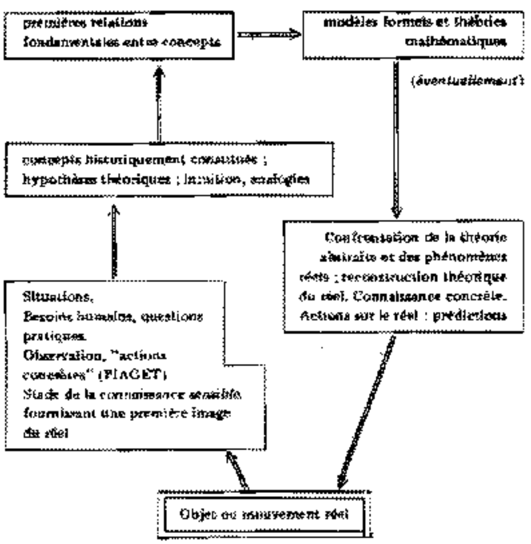
Bien que J. Piaget soit très éloigné de ce schématisme et qu'il l'ait combattu, ne peut-on déceler des traces de logicisme dans son insistance à voir dans la pensée formelle l'aboutissement, la forme d'équilibre supérieur de l'intelligence ? Ce formalisme beaucoup plus subtil qui consiste à faire de la logique mathématique non pas *la seule forme* de pensée scientifique, mais *la forme supérieure* n'est-elle pas une des caractéristiques du structuralisme ? Ces questions seront (seulement) évoquées plus loin.

Il reste que la théorie opératoire de la connaissance de J. Piaget, qui se place du point de vue génétique, apporte des indications importantes et des réfutations pertinentes du dualisme sommaire des néo-positivistes. Pour J. Piaget, les structures mentales du sujet ("les lois de la pensée") ne sont pas innées ; elles se développent par étapes, sous l'effet d'un double mouvement *d'assimilation* des données aux structures déjà formées et *d'accommodation* graduelle des structures mentales aux déséquilibres provoqués par le monde extérieur et, plus exactement, en ce qui concerne la pensée formelle, par les *actions* du sujet sur ce monde.

Ce que traite en priorité J. Piaget, c'est la façon dont la connaissance évolue *chez l'enfant*. Cette analyse est précieuse pour la théorie de la connaissance, mais on ne peut évidemment pas la transposer à l'étude du développement et des étapes *d'une science donnée*.

III Les étapes dans le processus de connaissance scientifique

Nous utiliserons le schéma ci-dessous pour illustrer nos remarques.



1) *Première remarque :* la construction *éventuelle* d'un modèle pour *traiter* les relations entre certains concepts ou groupes de concepts, ou l'utilisation de *lois* exprimées en termes mathématiques, ne sont jamais que *des moments du travail théorique* ; s'il faut mettre une étape en valeur dans la théorisation, c'est incontestablement celle de la recherche et de la mise en place des concepts fondamentaux, même si, dans les sciences les plus formalisées, la théorie mathématique exerce en retour une influence de plus en plus grande dans l'élaboration conceptuelle (justement parce qu'elle n'est pas coupée des autres étapes).

Insistons : Les modèles logico-mathématiques ne sont pas (sauf si on fait des mathématiques) l'objectif ultime du travail scientifique ni ce qui assurerait sa validité.

2) Le rôle du modèle est :

— d'assurer la puissance déductive de la théorie en voie de constitution et de faire fonctionner de façon féconde les relations retenues ou supposées.

— d'agir en retour sur les hypothèses, relations et concepts.

Comme on l'a vu à propos du "plan mathématique", le travail mathématique reste, à son niveau, en relation permanente (représentations et images mentales, analogies, utilisation d'exemples et de dessins, etc...) avec les autres niveaux, de la connaissance sensible à la connaissance concrète antérieurement consolidée.

3) Il est utile de distinguer modèle et loi d'origine empirique. Le modèle *fonctionne* à partir *d'hypothèses* reliant *des concepts* ou leurs indicateurs, en vue d'obtenir des relations nouvelles. C'est très différent du simple *ajustement* (*sans hypothèse* théorique) de résultats à l'aide d'une fonction mathématique.

Les positivistes les plus intransigeants devraient donc refuser l'idée même d'un modèle opératoire, compte tenu du mot d'ordre "pas d'hypothèses : des faits". On ne rencontre plus cette espèce chez les scientifiques aujourd'hui. Sous la pression des faits justement, le positivisme classique a dû céder le terrain au néopositivisme.

4) Comme on le voyait clairement avec les divers modèles axiomatiques du plan (modèle affine, projectif, vectoriel...) le rapport du modèle au réel n'est pas un couplage du type : un modèle pour un type d'objet réel ou un type de phénomènes réels. *Le modèle*, même si on fait abstraction des autres étapes du travail

scientifique ***est relatif à une problématique, à une famille de questions*** qu'on est amené à se poser à partir des phénomènes. Les mêmes phénomènes peuvent donner naissance à de multiples modèles

— soit parce qu'on améliore la modélisation, pour une même famille de questions, en ajoutant d'autres facteurs explicatifs, d'autres variables,

— soit parce qu'on étudie d'autres problèmes concernant les mêmes phénomènes.

Des modèles construits à partir d'axiomes différents peuvent être isomorphes (exemple des multiples axiomatiques du plan affine).

5) Le concept de modèle et celui de théorie mathématique sont de même nature. En général le premier est utilisé dans un sens plus local et le second dans un sens plus global. Mais dans les deux cas, il s'agit d'une construction formelle (c'est-à-dire suivant les règles d'un langage logique) à partir de propositions de bases ou *axiomes*. Il résulte de tout ce qui précède une distinction radicale entre *théorie (ou modèle) mathématique et travail théorique ou scientifique en général*, à savoir tout ce qui, dans le processus de connaissance, dépasse le stade de la connaissance sensible et des observations fortuites. Pour nous, l'expérimentation relève incontestablement du travail théorique dans la mesure où elle est précédée d'un *projet* lui-même guidé par la théorie en gestation.

Une distinction essentielle entre les concepts mathématiques mis en oeuvre dans les modèles et les autres concepts scientifiques est la suivante : alors que les premiers sont complètement *connus* par leur définition axiomatique (leurs rapports avec les autres concepts du même ordre sont déterminés "juridiquement" et "impérativement"), les seconds ne sont jamais épuisés par leur définition, celle-ci n'est jamais qu'un mouvement d'approche, destiné à être complété par tout un contenu empirique, de multiples indicateurs, des relations type formel ou non, des précisions sur les limites de validité de ce concept,etc...

6) Même lorsqu'ils sont très utiles dans une étude scientifique, les modèles (comme les structures mathématiques) ont une limite d'utilisation ; ils sont souvent bien adaptés à l'étude d'un phénomène à partir de relations stables, c'est-à-dire aux études "statiques" (étude d'un stade d'équilibre donné du développement par exemple) ou aux mouvements se déroulant suivant des lois

mathématiques connues. Mais ils sont en général impropres à traduire les changements les plus profonds, c'est-à-dire ceux qui nécessitent justement qu'on change de modèle, de relation, de concept ou de cadre théorique. Ils sont impuissants à expliquer pourquoi une relation devient caduque, pourquoi un équilibre se rompt et devient un autre, un facteur secondaire devient déterminant : ils n'expriment pas l'ensemble de cette *dialectique*, ils ne peuvent en saisir que des moments ou des aspects. Cela suffit à les rendre indispensables.