Tour d'horizon

par J.M. CHEVALLIER

Au cours des récents mois un certain nombre de textes concernant les angles et les questions connexes viennent de paraître. D'une part, outre la notice déjà ancienne SECTEUR (n° 279), la Commission du Dictionnaire a publié dans les numéros 299, 300, 301 les notices ANGLE, DIEDRE, PHASE, la dernière accompagnée d'un texte d'introduction de Chastenet de Géry et d'une importante annexe due à Tissier et Zirah. D'autre part, deux collègues font connaître leur sentiment soit au sujet de textes d'examens portant sur les angles, soit au sujet des notices elles-mêmes : à savoir Mme Lelong-Ferrand dans le présent numéro et Siros dans le n° 301 page 793. Enfin le "*Savoir minimum en fin de Troisième*" comporte naturellement des fiches relatives aux angles ou à la trigonométrie du premier cycle.

Personne ne s'étonnera qu'en cette occasion je saisisse moi aussi mon goniomètre pour faire un tour d'horizon sur la question. D'ailleurs, Arnould avait annoncé la chose dans le n° 301, sans dissimuler que, sur certains points au moins, mes vues ne coïncidaient pas avec celles de la Commission du Dictionnaire — ce qui ne m'empêchera pas, on le conçoit, de défendre celles-ci sur beaucoup d'autres points.

* * *

Mettons d'abord à part la question soulevée par le début de l'article de Siros. L'élève actuel du premier cycle a entendu parler de bissectrice, il a pu reconnaître dans quelques situations que les bissectrices de deux saillants adjacents supplémentaires sont perpendiculaires, il n'a vraisemblablement pas fait d'assez nombreux exercices de ce genre pour en avoir tiré un procédé familier de démonstration. Pythagore est donc le seul recours dont il dispose "normalement" pour établir une orthogonalité. Que ce recours apparaisse comme passablement lourd à ceux qui ont été entraînés dans leur jeunesse à "voir" les choses autrement, comment le nier ? Mais on ne peut faire grief à un problème d'examen de se conformer aux possibilités des candidats, qui elles-mêmes découlent des programmes.

Cela posé, vu qu'on ne peut pas tout enseigner, les programmes ont-ils tort ou raison de sacrifier, à ce niveau,la géométrie "visuelle" à une autre géométrie plus algébrique ? Je pense que c'est là le sens de la question de Siros, et elle est tout-à-fait légitime. Mais on aperçoit tout de suite où cette question de fond m'entraînerait si j'entreprenais de la traiter ici.

* * *

Mon propos concerne essentiellement les problèmes de langue : les liens entre les objets, les mots, et éventuellement les notations. On m'excusera de rappeler cette banalité : *tout fait de langue est un fait sociologique avant d'être un fait philologique ou logique*. Vouloir accélérer ou arrêter, même pour des motifs louables et apparemment justifiés, l'évolution d'une langue est toujours hasardeux. J'en ai fait l'expérience avec *trope* : le mot était court, nullement rébarbatif, d'étymologie correcte, et réduisait à néant les risques de confusion (car, pour prendre une figure de rhétorique pour un angle, ou vice versa, il faut vraiment le faire exprès). Ce néologisme n'avait qu'un seul vice, mais rédhibitoire : il n'a jamais été adopté par les usagers. Que faire, sinon prendre acte du rejet de ce greffon ?

Certains ont cherché à réserver le mot *angle* pour son seul emploi "noble" : le groupe des angles du plan euclidien. Dès lors il n'était plus question de le galvauder pour des usages subalternes. A la suite de ce parti-pris le mot a été totalement escamoté de certains manuels du premier cycle, et les *Commentaires* eux-mêmes ont entériné ce tabou, ainsi que le rappelle Mme Lelong-Ferrand, non sans le déplorer. J'avais de mon côté signalé à plusieurs reprises que la mise en quarantaine d'un mot qui appartient au langage le plus courant était une manière de gageure, sans doute vouée à l'échec ; et dénoncé, dans les numéros 285 et 287, le pataquès que cette attitude forçait nos modernes "Jargonautes" à introduire dans l'enseignement élémentaire.

C'est donc sans aucune réserve que je me réjouis de voir notre collègue participer à la réhabilitation de cet angle élémentaire.

Mais tout aussitôt je crains que notre accord n'aille pas beaucoup plus loin. Que l'on m'entende bien : je ne la critique pas de vouloir maintenir certaines habitudes de langage (et de pensée), je l'y aiderais même volontiers dans la mesure de mes moyens ; ce qui me gêne plutôt, c'est qu'elle, elle ne nous aide guère à le faire.

Si l'on veut dépouiller l'angle du vieux sens d'ensemble ponctuel qu'il traîne derrière lui depuis ... Horace, la première condition est de disposer d'une bonne dénomination pour ces ensembles ponctuels. Or, cette dénomination, nous l'avons ; ou plutôt nous l'aurions si les programmes n'avaient inventé — ô cohérence ! — au moment même où ils instauraient le tabou de l'angle, l'expression "secteur angulaire". Nous nous étions bien gardés de la mentionner dans la notice SECTEUR, car c'est là le genre d'expression bâtarde que l'on répète machinalement, quitte à s'étonner ensuite que les élèves "disent n'importe quoi" ! D'une part il existe des parties du plan, euclidien ou non, qui sont des *secteurs* (des saillants, des rentrants, des secteurs plats si l'on a besoin de préciser) ; d'autre part, dans le plan euclidien, on définit usuellement des *mesures* (angulaires, si l'on y tient) de ces secteurs. Cela suffit pour s'exprimer clairement, sans mélanger les registres, et permet de rendre à l'angle — l'angle de tout le monde, celui du triangle équilatéral comme celui du prisme — la place qu'il n'aurait jamais dû perdre. Quant à l'affubler du sobriquet de "géométrique", cela présente autant d'intérêt et autant de sens que de parler de "montagnes géographiques".

Cela dit, il n'est pas question de tomber dans le travers symétrique, qui serait au moins aussi grave : refuser de voir plus loin que le sens élémentaire (le plus courant dans la pratique non mathématique), et frapper d'interdit le sens qui pour nous est le plus "constructif", à savoir celui qui apparaît dans le groupe des... des quoi, au fait ? Ici encore il faut bien un nom (et Dieu sait si je l'ai quémandé). Or on constate avec regret que Mme Lelong-Ferrand semble n'avoir à suggérer que des "angles orientés", sans doute l'expression la moins défendable du vocabulaire traditionnel. Nous avions pris nos responsabilités dans la notice ANGLE et formulé une mise en garde très précise contre cette expression bâtarde — encore une — qui a fait jadis tant de ravages dans les esprits (dans le mien, en tout cas, et je n'en suis pas plus fier). Si nous nous sommes trompés, il aurait été intéressant de lire une réfutation de notre critique, une justification de cette prétendue orientation, qui donnât à celle-ci quelque consistance. Faute d'avoir rien lu de tel, on ne peut que répéter aux collègues : Cet "angle orienté" est un fantôme, et de l'espèce la plus maléfique ; gardez-vous-en, et gardez-en vos élèves !

On sait à quelle solution nous nous sommes arrêtés : appeler respectivement "angle-de-paire" et "angle-de-couple" l'angle élémentaire et l'angle du groupe ; en outre, distinguer ce dernier de la rotation elle-même, ce qui est au moins une commodité en géométrie vectorielle, une nécessité en géométrie affine... et semble répondre au voeu de Mme Lelong-Ferrand. Pourquoi dit-elle alors que nous avons fait cela "pour être en accord avec les programmes" ? Je ne vois rien qui justifie pareille assertion, ni dans la lettre des programmes, ni dans notre esprit que n'a jamais étouffé l'inconditionnalité. L'explication est beaucoup plus simple : nous nous sommes efforcés *d'appeler par leur nom exact, et de noter de la façon la plus naturelle, des choses entre lesquelles aucune confusion n'est plus tolérable ; et cela sans faire subir aucune violence au vocabulaire existant, sans choquer personne à aucun niveau, et en laissant la porte ouverte aux abréviations du langage courant.*

Par exemple, si l'on est dans le plan affine et qu'une rotation envoie deux points A et B respectivement sur A' et B', on peut continuer à dire, sans obscurité ni abus de langage, que l'angle du couple $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ est égal à l'angle de la rotation ; et dans l'espace, si SABC est une pyramide régulière de sommet S, il est également correct de dire que l'angle de la paire $\{\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}\}$ est celui de la paire $\{\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC}\}$. Honnêtement, je ne vois pas comment on pouvait mieux respecter les usages ni imaginer une solution plus simple et plus modérée.

* * *

Abordons à présent la mesure des angles.

Le triptyque "objet, classe d'objets, mesure" se rencontre partout où intervient la "grandeur physique". Cette notion donne naissance à des attitudes variées, qu'on peut schématiser de la manière suivante :

A — La classe d'équivalence est une réalité (la "grandeur") à laquelle bien entendu la mathématisation cherchera à donner un aspect quantitatif par le biais de la mesure.

B — En fait la mesure est sinon le seul moyen, du moins le seul qui soit scientifiquement exploitable, de construire des classes d'objets.

C — Dès lors la "grandeur" en tant que classe s'évanouit ou du moins se confond avec la valeur de la mesure, et l'on peut en faire l'économie.

Entre A et B il n'y a pas franche opposition, la différence réside plutôt dans les "états d'âme". Au contraire l'attitude C me paraît difficile à défendre intégralement, j'ai déjà dit pourquoi (n° 298) : s'il n'existe pas, sous-jacente à la mesure, quelque invariance physique (donc quelque équivalence mathématique) relativement aux changements d'unités ou, plus généralement, de procédés de mesurage, quelle signification et quel intérêt peut bien présenter la valeur de la mesure ? Si l'on va au fond des choses, on trouve à la base de chaque "grandeur" *deux* relations d'équivalence, qui s'expriment par le redoublement du mot *même* dans la formule habituelle "avoir même mesure dans les mêmes conditions".

Ayant rappelé cela, et aussi les glissements de sens constants et quasi-inévitables entre les trois volets du triptyque (mesure d'un segment, longueur d'un segment, mesure d'une longueur...), on ne voit pas pourquoi les angles feraient exception. Et, puisqu'il existe indubitablement une mesure des secteurs saillants, le plus tolérable des glissements de langage ne consiste-t-il pas à la transférer aux angles-de-paire (comme aux arcs de cercle, aux secteurs de disque, aux dièdres, aux fuseaux sphériques...) ?

Nenni, rétorquent les puristes, car ce ne serait pas une "vraie" mesure. L'argument ne tient guère, et Mme Lelong-Ferrand en fait justice. Mais cela les touche peu, car à leurs yeux il n'y a pas d'angles à mesurer ! Et d'introduire *l'écart angulaire* (pour la cohérence, voir ci-dessus "secteur angulaire"). La notion est inattaquable tant qu'elle s'applique à des demi-droites... et à peu près inutilisable sous cette forme trop restreinte : si bien que les *Commentaires*, et les manuels à leur suite, s'empressent d'élaborer "l'écart angulaire d'un angle géométrique", ce qui est à la fois une quintessence de charabia et l'aveu ingénu que les faits sont obstinés.

Mais le purisme ne s'en tient pas là. Seul le Nombre est grand, et innombrables sont ses prophètes. Puisque les valeurs de l'écart angulaire sont des nombres, à nous les notations : $E_D(\widehat{BAC}) = 90$, $E_{180}(\widehat{ABC}) = 45$, $E_G(\widehat{BCA}) = 50$, etc. ! Et, une fois que c'est parti, comment s'opposer à l'irruption des $\cos_{180} 60$, $\sin_G 50$ ... ?

Cette avalanche d'indices nous ramène à la partie finale de l'article de Siros. Sur le plan formel Siros a tort (ou du moins il fait semblant) : car, si l'on joue le jeu, l'écart angulaire a étant un *réel*, c'est bien une fonction de **R** vers **R** qui donnera la tangente cherchée, fonction que le texte du BEPC note tg_{180} ; et ce serait une *autre* fonction (tg_{200}) qui la donnerait si l'unité choisie était le grade. Mais bien entendu, sur le fond sa protestation me paraît on ne peut plus justifiée.

Et c'est là, je l'avoue, que je comprends de moins en moins Mme Lelong-Ferrand. Quand elle "se demande si cette notien bien lourde d'angle géométrique est nécessaire", répondons-lui que — le mot "géométrique" mis à part — cette notion sert justement à nous libérer de la tyrannie des indices, à nous permettre d'écrire, sans nous sentir "culpabilisés", des choses que nous avons tous écrites, comme $\widehat{BAC} = 90° = 100\,gr$, ou comme $\cos 60°$, ou comme $tg\,\widehat{ABC}$, etc. Il se peut que je scandalise certains ; mais, scandale pour scandale, je préfère celui-là à $tg_{180}(E_{180}(\widehat{ABC}))$ qui, officiellement, serait la seule écriture correcte ! Ce n'est vraiment pas la peine d'habituer nos élèves, de très bonne heure, à appliquer un ensemble source dans un ensemble but, *numériques ou non*, si cela doit ne servir à rien, sinon à une vaine virtuosité (?). Nous avons là l'occasion rêvée de définir des fonctions sinus, cosinus, tangente, qui appliquent dans **R** un ensemble *non numérique*, celui des angles.

Refuser les angles en tant que "grandeur", ou (ce qui revient au même) les confondre avec des réels, c'est justifier par avance les notations sophistiquées qui hérissent nos manuels. Seule l'attitude contraire permettra la démystification réclamée par Siros. J'ai plaisir à signaler que le "*Savoir minimum en fin de Troisième*", quoique bien indulgent encore pour l'état de choses présent (programme oblige, hélas), amorce une évolution que pour ma part je considère comme un retour au bon sens.

* * *

La "mesure" des angles-de-couple ne se ramène pas au schéma précédent, du fait qu'il n'y a pas isomorphisme, mais seulement homomorphisme de $(\mathbf{R}, +)$ vers le groupe $(\mathcal{A}, +)$ des angles-de-couple. Cela nous prémunit, ou devrait nous prémunir, contre les identifications hâtives, mais ne laisse pas d'engendrer d'autres difficultés.

Pour se tirer de là, on a coutume de considérer des "angles généralisés" (ou "cinématiques") qui ont le bon goût de s'additionner *comme* des réels. Mais de nouveau la question se trouve posée : sont-ils des réels ou des "grandeurs" ? Le plus souvent, on s'abstenait de répondre nettement ; et les physiciens, que nos scrupules agacent, préféraient réserver leur curiosité à des choses plus fondamentales. On en connaît pour qui le radian est une sorte de synonyme de 1 (ce qui ne les empêche pas, éventuellement, de faire de bonne physique).

Une telle discrétion, si généralement observée, trahissait au fond un malaise. Nul ne conteste l'importance théorique, voire pratique, du radian, lié à l'exponentielle complexe ; et celle-ci, bien qu'elle ne soit pas la *seule* voie rigoureuse qui mène aux homomorphismes continus de **R** sur $\mathcal{A}$ (*), est assurément la voie royale. Cependant il ne serait pas raisonnable non plus de concéder au radian un quasi-monopole, comme si toute autre "unité" était inexistante ou inavouable. Que dire en particulier du tour, usuel dans les applications techniques, sinon qu'il s'impose à tout esprit non drogué par l'usage immodéré des mathématiques comme étant l'unité la plus naturelle ? Le simple fait qu'*il n'y a pas de tour en géométrie et qu'il y en a un en mécanique* est assez éloquent.

Sur tout cela la Commission du Dictionnaire était tombée facilement d'accord, et elle en tirait la même conclusion que plus haut : il convenait de donner le caractère intrinsèque d'une "grandeur" à cette notion, aussi bien en raison de sa signification concrète que pour la commodité de l'écriture mathématique. La dénomination de *phase* qui a été adoptée montre que l'interprétation physique n'est pas loin ; quant à la construction mathématique, c'était celle d'une droite vectorielle des phases, isomorphe à **R** certes, mais qu'on peut distinguer de **R** si le besoin s'en fait sentir.

Chastenet de Géry a exposé dans le précédent *Bulletin* l'idée qui a inspiré la notice PHASE : définir les phases comme étant les homomorphismes eux-mêmes qui appliquent (continûment) **R** sur $\mathcal{A}$. Séduisante, l'idée l'est assurément ; à tel point que la majorité de la Commission a été conquise. Pourquoi donc n'ai-je pas succombé au charme tournoyant de ces phases ?

(*) Voir l'article de Tissier et Zirah, fondé sur le procédé relativement élémentaire du "rapporteur binaire"

La rigueur de la construction n'est pas en cause ; et, vu que rien ne ressemble à une droite R- vectorielle comme une droite vectorielle sur R, je ne perdrai pas mon temps à chercher laquelle est la bonne. Mes réserves portent sur deux points :

1° Le caractère intrinsèque de la construction ne m'apparaît nullement. D'après elle, dire que l'homomorphisme h est une phase de l'angle α signifie que $h(1) = \alpha$. J'avais suggéré, par manière de boutade, que l'on remplace 1 par 365,2422 : cela ne changerait pas un iota au reste de la notice et mettrait en évidence le rôle éminent joué dans l'affaire par l'année tropique... Sérieusement, je ne vois pas que 1 y joue un rôle plus net. Je répète que la traduction d'une invariance "physique" est toujours de quelque manière une équivalence mathématique, et je ne la vois nulle part. Certes on peut toujours remplacer une classe d'équivalence par un de ses représentants ; encore faut-il avoir construit la classe et dire quelle convention on fait. C'est pourquoi je suis insensible à l'argument de "simplicité" qui m'a été opposé : on ne simplifie pas un problème en le traitant par prétérition ; et, entre la convention ainsi introduite et celle qui consistait à confondre radian et unité, y a-t-il finalement de quoi motiver une préférence ?

2° Déranger des habitudes est acceptable, souhaitable même, quand un plus grand bien doit en résulter, à brève ou longue échéance ; dans le cas présent je crains surtout qu'on inquiète, sans contrepartie avantageuse. Alors que cette notion de phase devrait rester accessible au plus grand nombre possible, était-il bien indiqué d'introduire dès le début une multiplication externe (trop) astucieuse, qui risque de jeter le trouble dans les âmes innocentes et dont les conséquences sembleront au moins étranges ? Certes, on ne peut pas empêcher un angle d'avoir une infinité de "déterminations", qui se confondent avec les mesures de ses phases ; mais s'imposait-il vraiment que l'angle possède pour *chacune* de ses phases un tel système de déterminations, de surcroît *inversement proportionnel* à la phase considérée ? — le record toutes catégories appartenant à la phase nulle, grâce à laquelle n'importe quel réel apparaît comme un antécédent (ici, on n'a pas osé dire une "détermination") de l'angle nul ! Tout cela est si "naturel" qu'une erreur nous a échappé à tous (moi compris, lors de la correction des épreuves d'imprimerie) :

ERRATUM — *Fiche* PHASE 1/6 *verso*, § 1.2, *ligne* 7 :

Lire (à deux reprises) $\frac{m}{n}$ *au lieu de* $\frac{n}{m}$.

De toute évidence il s'agit d'un simple lapsus, mais bien révélateur : disons qu'on a glissé du côté qu'on avait savonné....

Je suis sans doute un entêté (c'est de naissance), mais je maintiens qu'il valait beaucoup mieux prendre le problème dans l'autre sens : *calquer les phases sur des "mesures"* (et non sur des "unités" comme on l'a fait) — en d'autres termes considérer, plutôt que les homomorphismes h (continus, et non nuls) de R vers $\mathcal{A}$, *les images-réciproques* $\overleftarrow{h}$. Ce qui, de toute façon, est à la base de nos constructions, c'est que, suivant le choix de h, l'image-réciproque est déterminée à une homothétie non nulle de R près (exactement comme si les $\overleftarrow{h}$ étaient des mesures en mètres ou en centimètres, en grammes ou en tonnes, en ampères ou en milliampères,..). Dès lors, x, x' désignant des réels, et h, h' des homomorphismes, la condition $x'\overleftarrow{h} = x\overleftarrow{h'}$ définit sur l'ensemble des couples (x, h) une relation d'équivalence, et pour tous les couples (x, h) d'une même classe, $h(x)$ est le même angle α : par définition cette classe est *une phase* de l'angle α, en particulier, si $m\mathbf{Z}$ est le noyau de h, les classes de (m, h) et de $(-m, h)$ sont les *tours*.

Les lois de composition sont à peu près immédiates :

$$\mathrm{Cl}\,(x, h) + \mathrm{Cl}\,(y, h) = \mathrm{Cl}\,(x+y, h)$$
$$\lambda\,\mathrm{Cl}\,(x, h) = \mathrm{Cl}\,(\lambda x, h)$$

et la droite vectorielle des phases est construite.

A partir de là les choses "vont toutes seules", et l'on arrive très vite aux objectifs qu'on s'était fixés. Cela n'est pas une remarque en l'air ; car, de toutes les notices publiées depuis 1967, la notice PHASE est la seule à comporter 6 fiches ; or on pouvait dire autant, sinon plus, avec une fiche de moins *. J'aurais aimé, en particulier, qu'on revienne sur les notations Cos, $\widetilde{\mathrm{Cos}}$, COS, cos, etc... pour signaler ceci. Nous les avons introduites par souci de rigueur, pour éviter de noter de même façon des applications différentes : nous ne croyons pas que distinguer une fonction cos qui est périodique d'une fonction Cos qui ne l'est pas soit une "préciosité". Cela dit, il est de fait qu'à des restrictions et des isomorphismes près ces diverses fonctions se ramènent les unes aux autres, et que dans la pratique les fonctions usuelles ont encore un

* NDLR — L'auteur parle ici, bien entendu, de cinq fiches calibrées *au gabarit habituel* ; à la mise en pages s'est produite, sur la hauteur des fiches, une erreur par excès de 8 mm dont la Rédaction du *Bulletin* tient à s'excuser auprès des lecteurs.

bel avenir, même si leur usage entraîne parfois des abus de langage dont chacun sait qu'ils sont commodes. Nous avions pris soin d'ailleurs (notice ANGLE, 1.2) de signaler que la notation $\widetilde{\text{Cos}}$ était *provisoire* ; mais, comme la chose semble n'avoir pas frappé tous les lecteurs, ni toutes les lectrices, on peut regretter que l'occasion de préciser ces choses-là n'ait pas été saisie dans la notice PHASE.

* * *

Comment conclure ce tour d'horizon tous azimuts ? Visiblement la modernisation de notre enseignement, ni la rénovation du langage qui lui est liée, ne pouvaient se réaliser vite ni sans quelques accrocs. Ce qui perd les conservateurs, disait Paul Valéry, c'est le mauvais choix des choses à conserver. Le propre de ce genre de formules est qu'elles se retournent fort bien : ce qui perd les démolisseurs, c'est le mauvais choix des choses à démolir ; il n'est pas rare, même, que l'on perde sur les deux tableaux, en démolissant le bon et conservant le mauvais. Heureusement la réaction normale de tout organisme sain est de réparer les lésions et de rejeter les tissus nécrosés. Je tiens l'A.P.M. pour un organisme sain, et suis persuadé qu'en ses diverses cellules — le Dictionnaire, la Commission "Mots", le *Savoir minimum*, des centres de travail et de réflexion dans les IREM et d'autres endroits que j'ignore — se poursuit, sans bruit mais avec ténacité, un effort dont les résultats sont déjà perceptibles : les choses vraiment importantes, et les moyens pour les exprimer, apparaissent sous un jour meilleur qu'il y a dix ans. Des réserves doivent être formulées, des erreurs doivent être corrigées ? Si après treize années de Dictionnaire je l'ignorais encore, ce serait de l'inconscience pure ! Mais en ce premier numéro de l'année je peux bien révéler un grand secret, aussi valable pour ceux qui accélèrent que pour ceux qui modèrent l'allure :

Mettre la main à la pâte en 76 vaut mieux que de critiquer en 77.