

3

LES ANGLES

La notion d'angle

par Jacqueline LELONG-FERRAND

*"Hic mihi praeter omnes angulus
ridet" (Horace)*

*(Cet angle me plaît plus que tous les
autres).*

A l'origine le mot "angle" a un sens ensembliste : c'est celui que l'on trouve déjà dans le vers d'Horace cité ci-dessus, où il désigne ce que nous appellerions aujourd'hui "un petit coin tranquille". Mais, par la suite, l'angle a été considéré comme une "grandeur" analogue à la "longueur". En mathématiques, comme dans le langage courant, le mot "angle" désigne donc plusieurs réalités différentes, ce qui peut être assez déroutant ; et il pouvait sembler nécessaire d'y mettre un peu d'ordre. Mais la terminologie imposée par les programmes actuels n'est pas satisfaisante : elle s'écarte à la fois du langage courant et de celui que continuent à employer les utilisateurs et les mathématiciens ; elle introduit des pléonasmes artificiels tels que "l'écart angulaire d'un secteur angulaire" ; et elle est d'une lourdeur paralysante (pour désigner un angle orienté de $\frac{2\pi}{3}$, il faut dire : l'angle dont un représentant de la mesure est $\frac{2\pi}{3}$). Enfin, les programmes actuels font de l'angle une sorte de tabou dont on évite de prononcer le nom, et qu'on se refuse à utiliser : l'étude des "angles orientés" s'arrête d'ailleurs au moment où elle aboutirait à la seule notion importante : celle de "mesure". En classe de troisième, les triangles n'ont plus d'angles, et il faut s'exercer à parler d'un triangle (ABC) rectangle en A, en se gardant de dire qu'il a un angle droit : cela tient plus du dressage ou de l'acrobatie verbale que d'une saine pédagogie.

Exposer la notion d'angle à des élèves n'est pas un problème de pure axiomatique ; c'est une véritable oeuvre pédagogique, qui doit partir des notions intuitives acquises par l'enfant, pour aboutir au problème mathématique de la mesure, et de la définition des fonctions trigonométriques. Quelle que soit la tentation de faire une belle théorie, il faut être persuadé que la notion d'angle est une notion utile, qui doit rester simple, et que le problème de sa définition n'est pas en but en soi : de toute façon, on ne peut d'ailleurs faire une théorie rigoureuse tant qu'on n'a pas défini l'exponentielle complexe, ce qui est du niveau universitaire.

Après avoir analysé la situation actuelle, je ferai quelques suggestions en vue d'une simplification.

Analyse de la notion d'angle dans les programmes actuels.

Sixième : Le programme comporte : cercle, longueur, arcs de cercle et secteurs angulaires ; il n'est pas question de "mesure" de ces secteurs. Les commentaires, qui insistent longuement sur le repérage des points d'une ville, sont muets sur la question de la mesure des angles ; les mots "rapporteurs" et "mesure des angles" figurent cependant dans le § intitulé "travaux pratiques" (p. 47). Cela me paraît déroutant pour le professeur : si la mesure des angles n'est pas bannie des programmes, il faut le dire explicitement, et préciser quelles unités on utilise (degrés, grades, radians ?). En tous cas, on en a besoin pour définir la longitude et la latitude, comme il est demandé dans ce même programme.

Cinquième : Le programme de géométrie ne parle absolument pas d'angle ni de secteur angulaire. Pourtant l'étude de quelques polyèdres qui est suggérée s'accompagnerait fort bien d'une mesure de leurs angles. Comment d'ailleurs distinguer un pavé oblique d'un pavé droit si l'on ne sait ce qu'est un "angle droit" ?

Quatrième : Le programme traitant uniquement de géométrie affine ignore évidemment la notion d'angle.

Troisième : On définit "l'angle géométrique" comme classe d'équivalence de couples isométriques de demi-droites de même origine ; ensuite on définit le "repérage" d'un point sur un demi-cercle, et on utilise cette "mesure" pour définir l'écart angulaire de deux directions orientées. Enfin on définit les lignes trigonométriques d'un "écart angulaire".

Les Commentaires (p. 87) précisent que l'on commence par définir les "angles géométriques", puis "l'écart angulaire d'un

angle géométrique” pour aboutir, si l'on veut, à “l'écart angulaire de deux directions” ; ils font remarquer à juste titre que cet écart a les propriétés d'une distance ; puis ils reconnaissent que ce vocabulaire s'écarte assez sensiblement du vocabulaire utilisé jusqu'ici ; et le commentateur prétend, à tort, que les mathématiciens réservent le mot “angle” pour désigner les “angles orientés”.

En présence de ces programmes on peut se demander si cette notion bien lourde d'angle géométrique est nécessaire : point n'est besoin de classes d'équivalence pour voir que deux couples isométriques de demi-droites ont le même “écart”. D'autre part, il nous paraît choquant d'employer le mot d'écart pour désigner la mesure d'une grandeur, et l'expression “écart angulaire d'un angle géométrique” est un non-sens, qui est aussi peu naturel que peu scientifique. Si l'on appliquait le même purisme aux longueurs et distances, l'analogue de cette expression serait “distance métrique d'un segment géométrique”, dont l'absurdité n'est pas à démontrer.

Classe de Seconde : Bien qu'on dispose déjà des lignes trigonométriques le programme insiste encore sur le “rapport de projection orthogonale”, notion essentiellement provisoire et même inutile. Rien de nouveau en ce qui concerne les angles. Visiblement c'est un outil dont on se méfie : le rapport de projection orthogonale de deux vecteurs \vec{i}, \vec{j} , est noté $\cos(\vec{i}, \vec{j})$, sans que l'on explique ce que signifie le symbole (\vec{i}, \vec{j}) .

Classe de Première. L'angle de deux demi-droites D, D' est l'unique rotation vectorielle amenant D sur D' . On définit le “grand cosinus” et le “grand sinus”, puis on admet l'existence de l'application canonique de \mathbb{R} sur \mathbb{U} et on introduit enfin le “petit cosinus” et le “petit sinus”.

Terminale. On revient sur la notion “d'angle rotation”, et on définit l'angle de deux droites. Il n'est pas question de “mesure” des angles de demi-droites et de droites. Le professeur en parle s'il veut.

Réflexions sur les programmes de Première et Terminale

Mathématiquement, il n'y a pas d'inconvénient à identifier le groupe additif des angles orientés avec le groupe des rotations $SO(2)$ (ou le groupe multiplicatif \mathbb{U}), puisque ces groupes sont isomorphes. Mais la démarche pédagogique consiste plutôt à les définir séparément, et à constater ensuite leur isomorphisme.

Est-il bien nécessaire d'introduire ce grand cosinus et ce grand sinus qui font sourire tous les mathématiciens, et qui sont des préciosités propres à l'enseignement secondaire français ? Les lignes trigonométriques des "angles" compris entre 0 et π ont été déjà définies en troisième. Pourquoi y revenir en changeant de notations ?

Ce qui est sûr, c'est qu'on oublie l'essentiel : la mesure des angles orientés, qui est laissée à l'initiative du professeur, mais qu'il ne peut traiter sans une lourdeur de langage paralysante, puisqu'on l'oblige à parler des "représentants de la mesure de l'angle". N'est-ce pas tourner en rond que de définir l'angle d'une rotation comme étant encore une rotation, et à quoi sert une telle trivialité ? C'est imposer aux professeurs un pédantisme stérile, dont il faut les libérer en introduisant les abus de langage nécessaires.

Malheureusement, les Commentaires officiels des programmes ont créé une telle psychose de purisme, qu'il est bien difficile à l'enseignement du second degré de revenir aux notions usuelles : on peut s'en rendre compte en lisant la rubrique "angles" récemment mise au point dans le Dictionnaire de l'A.P.M. : pour être en accord avec les programmes, cette rubrique distingue les "angles de paires", les "angles de couples", "l'angle de couple d'une rotation plane" et les "invariants métriques d'une rotation plane" ; elle introduit encore de nouvelles notations telles que $\text{Co}\tilde{\text{s}}$ et $\text{Si}\tilde{\text{n}}$, et ne nous semble guère éclairer les problèmes pédagogiques. De même, certains candidats à l'agrégation ne savent plus parler d'angle sans introduire une bonne demi-douzaine d'isomorphismes.

En fait, il me semble que le problème des angles a été artificiellement compliqué par le refus de reconnaître les diverses acceptions réelles de ce mot, et par une algébrisation outrancière qui a prétendu réserver le nom de "mesure" à un isomorphisme de groupes. Pourtant la mesure des angles, au sens le plus élémentaire, n'est qu'un cas particulier de la mesure de Haar sur un groupe localement compact.

Je vais donc essayer de donner un plan progressif et constructif de l'étude des angles, conforme à l'usage qu'en font aussi bien les mathématiciens que les navigateurs, les astronomes, les dessinateurs et tous les ingénieurs.

Pour cela, je distinguerai trois notions, correspondant à trois étapes de la vie scolaire, et qui se complètent sans se détruire : ce sont les notions de secteur angulaire, d'écart angulaire de deux demi-droites, et d'angle orienté.

Première étape (enseignement du premier degré, sixième, cinquième)

La notion la plus concrète semble bien être celle de *secteur angulaire* conçu comme partie du plan limitée par deux demi-droites de même origine : elle correspond au sens étymologique du mot "angle", rappelé ci-dessus. Pour les élèves de sixième, c'est un excellent exemple d'ensemble, permettant d'illustrer les opérations d'intersection et de réunion ; ils peuvent apprendre à mesurer les secteurs au moyen d'un rapporteur, et constater la proportionnalité de l'angle avec la mesure de l'arc de cercle intercepté ; enfin, ils doivent se familiariser avec les changements d'unité, en liaison avec les applications. La "mesure" ainsi introduite est d'ailleurs bien une mesure, au sens mathématique du terme : c'est la mesure de Haar sur le groupe $SO(2)$, et il n'y a pas lieu d'introduire le terme barbare de "mesurage" pour la désigner.

En cinquième les élèves peuvent s'exercer à mesurer les faces d'un trièdre ou d'un polyèdre, et constater certaines égalités, ou inégalités. En quatrième, ils pourraient utilement comparer les secteurs angulaires limités par des demi-droites parallèles : ce serait l'occasion d'introduire une notion métrique, et de s'évader de la monotone structure affine.

Deuxième étape (troisième, seconde) Lorsqu'on aborde sans dogmatisme la géométrie métrique, c'est la notion d'*écart angulaire de deux demi-droites* de même origine qui s'introduit naturellement : cet écart est la mesure du secteur saillant ou plat limité par ces demi-droites, et il vérifie l'inégalité triangulaire : dans le plan, la démonstration en est immédiate ; dans l'espace, cette inégalité traduit les "inégalités entre les faces d'un trièdre" que l'on étudiait autrefois sans bien en comprendre l'intérêt. C'est donc bien un "écart" au sens mathématique du terme ; et, sur l'ensemble des demi-droites d'origine donnée, c'est une distance : nous avons ainsi un exemple naturel d'espace métrique borné.

Les angles d'un triangle peuvent alors être définis comme écarts angulaires de ses côtés, pris deux à deux.

Chose curieuse, c'est cette notion élémentaire d'angle qui a été bannie des programmes, alors que c'est peut-être la plus utilisée : elle est en effet valable dans l'espace, alors que la notion d'angle orienté est propre au plan. En fait, c'est une notion de géométrie hilbertienne ; et l'on définit couramment l'angle de deux vecteurs unitaires a, b d'un espace préhilbertien comme étant l'unique réel θ vérifiant $0 \leq \theta \leq \pi$ et $\cos \theta = a \cdot b$, ce réel

pouvant être noté $\widehat{a, b}$. Bien entendu, cette définition suppose une connaissance préalable des fonctions trigonométriques, mais il est à la portée d'un élève de troisième de concevoir l'angle de deux demi-droites comme l'analogue de la distance de deux points, et de le mesurer en radians ; les lignes trigonométriques sont alors définies comme fonctions d'une variable numérique, sur l'intervalle $[0, \pi]$: cela évite les notions provisoires de "grand sinus" et de "grand cosinus" et introduit d'emblée les fonctions utiles.

Troisième étape (classe de Première et Terminale)

La dernière étape est celle d'angle orienté (de demi-droites, puis de droites). On peut définir l'angle orienté comme classe d'équivalence de couples de demi-droites, et démontrer ensuite l'existence d'un isomorphisme avec le groupe des rotations vectorielles. Mais l'essentiel est d'admettre les propriétés de l'exponentielle $x \longmapsto e^{ix}$, pour aboutir à la mesure des angles et des rotations dans un plan orienté, et de prolonger à \mathbb{R} les fonctions sinus et cosinus. Tout en conservant le principe que la mesure d'un angle orienté est une classe modulo 2π , on peut convenir que chaque élément de cette classe est "une mesure" de cet angle ; et il est nécessaire que les élèves puissent comprendre et utiliser l'expression courante "angle θ " ou "rotation d'angle θ ", où θ désigne un réel (1). En vue de la Physique et de la Mécanique, il faut également introduire la notion de "rotation d'angle θ (réel) autour d'un axe" en faisant une convention d'orientation des plans orthogonaux à cet axe (pour voir les difficultés introduites en Mécanique par l'abandon de cette convention, voir le livre de Mécanique de M. Brousse).

De façon générale, il faut admettre, en les expliquant, tous les abus de langage nécessaires : ces abus sont utilisés sans inconvénient depuis bien des années ; ils consistent essentiellement à identifier la notion d'angle non orienté avec un réel compris entre 0 et π , et celle d'angle orienté avec une classe de réels (modulo π ou 2π selon qu'il s'agit d'angles de droites ou de demi-droites).

Pour terminer, j'insisterai sur l'analogie entre les angles et les longueurs. Cette analogie devrait nous servir de garde-fou, et nous éviter de nous créer des complexes à propos des angles, alors que la

(1) Notons que le sujet de baccalauréat de TE donné à Paris en 1975 comportait l'expression "rotation d'angle θ ", où θ désignait un réel. J'ignore s'il y a eu des protestations, mais il faut féliciter les auteurs de ce sujet de ne pas s'être laissés influencer par les Commentaires des programmes.

notion de longueur nous paraît toute naturelle, et que nous identifions sans peine les longueurs avec leurs mesures.

Segment	Secteur angulaire
Longueur du segment	Mesure (ou ouverture) du secteur
Distance de deux <u>points</u>	Ecart angulaire de deux demi-droites
Mesure algébrique AB	Mesure de l'angle orienté (u, v)