10

DANS NOS CLASSES

Jeux de déduction*

par Amos EHRLICH, Département de l'éducation, Université de Tel-Aviv.

Traduit de l'anglais par Michèle LELARGE

Entraîner les élèves à faire des déductions correctes et élargir leur compréhension de certaines structures mathématiques sont deux buts principaux dans l'enseignement des mathématiques. Les jeux que nous allons décrire essaient d'aider à atteindre ces buts. Je les ai essayés avec des élèves de 14 à 17 ans, et avec quelques élèves plus jeunes.

Dans tous ces jeux, un joueur *actif* joue contre un *contrôleur*. Chacun des deux joueurs actifs peut servir de contrôleur à son adversaire et une personne peut contrôler le jeu de plusieurs joueurs actifs. Je ne vais décrire que le jeu d'un joueur actif et de son contrôleur.

Pour commencer une partie, le contrôleur détermine un ensemble de phrases, que j'appellerai dans cet article S (je donnerai ensuite des exemples de S). Le joueur actif ne connaît aucune des propositions de S, mais il en sait suffisamment pour pouvoir déduire tous les éléments dès qu'il en connaît quelques-uns.

Suivant la question du joueur, le contrôleur lui donne une première proposition de S. Si le joueur actif peut en déduire plusieurs propositions de S, il donne ses réponses au contrôleur et

* *Article paru dans le n° 67 de "Mathematics Teaching", bulletin de l'A.T.M. (Association of Teachers of Mathematics, Grande-Bretagne).*

marque 7 points par réponse correcte. Quand le joueur a l'impression qu'il ne peut plus rien déduire, il pose une question concernant un nouvel élément de S, obtient une réponse, et utilise tout ce qu'il sait pour découvrir d'autres éléments de S. Chaque déduction correcte à ce stade lui rapporte 6 points. Tout résultat que le joueur actif découvre après que le contrôleur lui ait donné un troisième élément de S, mais avant un quatrième, rapporte 5 points, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ait trouvé S entier ou jusqu'au septième stade du jeu.

Il n'est pas demandé au joueur d'expliquer la façon dont il a déduit ses résultats, mais s'il propose une proposition fausse, il perd deux fois le "prix" d'une bonne réponse, le contrôleur lui dit la réponse correspondante correcte, et il passe au stade suivant (en d'autres termes, après la pénalisation, la dernière déclaration du joueur est considérée comme une question).

Pour compléter la description d'un jeu particulier, nous devons définir la façon dont le contrôleur détermine l'ensemble des propositions S, spécifier ce qu'on saura au départ de S, et lui dire quel genre de questions il peut poser sur S.

Arithmétique dans les anneaux Z/pZ

Le contrôleur détermine un code par lequel chacune des lettres A, B, C, D, et E représente un chiffre de l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Le joueur actif sait que l'ensemble $\{A, B, C, D, E\}$ et l'ensemble 0, 1, 2, 3, 4 sont identiques, mais à aucun moment on ne peut lui donner le code.

S est l'ensemble des propositions vraies de la forme $x + y = z$ dans lesquelles x, y, z sont les chiffres codés, et + est l'addition modulo 5 ($x + y = z$ et $y + x = z$ sont considérées comme la même proposition). En d'autres termes, S est la forme codée de la table d'addition modulo 5.

S peut comporter $A + B = C$ ou $D + D = E$ (si elles sont vraies dans le code), mais ni $A = 0$ ni $A + B = C + D$. Le joueur ne gagne pas de point à découvrir de telles égalités, mais il peut, bien entendu, les utiliser pour déduire les éléments de S.

Les propositions qui sont données au joueur au début de chaque stade sont déterminées par ses questions. Ces questions sont du type "combien fait A + B ?"

Deux jeux de treillis

Le premier jeu de treillis est celui du treillis des parties de $\{1, 2, 3\}$, lui-même appelé V, l'ensemble vide est noté ϕ et pour tout autre sous-ensemble le contrôleur choisit un nom de code parmi les lettres A, B, C, D, E ou F.

L'ensemble S pour ce jeu est l'ensemble des propositions de la forme $x \cup y = z$ et $x \cap y = z$ où x, y et z sont différents de ϕ et de V et où $x \neq y$. $x \cup y = z$ et $y \cup x = z$ sont considérées comme la même proposition. De même pour $x \cap y$.

Le deuxième jeu de treillis ressemble au premier, mais les éléments du treillis sont $V = \{1, 2, 3, 4\}$; $\{1, 2, 3\}$; $\{1, 2, 4\}$; $\{1, 2\}$; $\{1, 3\}$; $\{1\}$; $\{3\}$; et ϕ. Ce sont les parties de V qui ont les propriétés

$$\text{(a)}\quad 2 \in X \Rightarrow 1 \in X \qquad \text{et} \qquad \text{(b)}\quad 4 \in X \Rightarrow 2 \in X$$

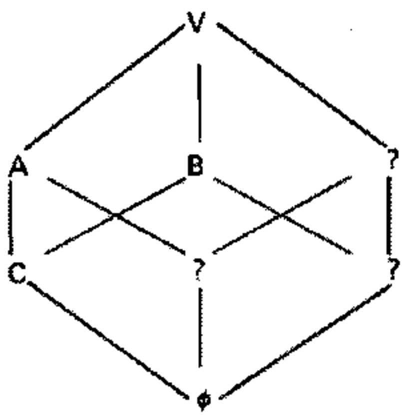
Remarquons que ces deux treillis sont isomorphes aux treillis des diviseurs de 30 et de 24 respectivement. Les étudiants ont préféré la forme "parties de V" à la forme "diviseurs de X".

Déductions types dans les jeux de treillis

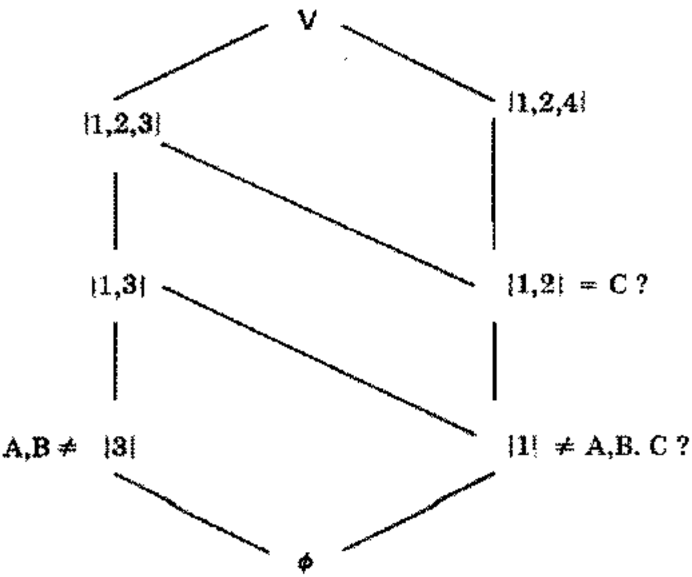
Les raisonnements typiques des étudiants sont "il semble raisonnable que" plutôt que "il s'ensuit nécessairement que". Pour accélérer la transition en déductions correctes (rigoureuses), il est recommandé que le professeur démontre quelques déductions. Les exemples qui suivent peuvent servir ce but. Dans cet article, je les utilise aussi pour montrer la différence entre les deux jeux de treillis.

Supposons que l'information soit $A \cap B = C$. De ceci, nous tirons que $C \subset A$ et que $C \subset B$ (ces deux propositions ne sont pas des propositions de S, donc ne donnent pas de points) et on peut en tirer (dans les deux jeux) que $A \cap C = C$, $A \cup C = A$, $B \cap C = C$ et $B \cup C = B$ (28 points). De plus, ni A ni B ne peuvent être des singletons, puisque l'intersection d'un singleton et de n'importe quoi d'autre est, soit vide, soit lui-même, alors que C n'est ni A, ni B, ni ϕ.

Pour le premier treillis, cela signifie que A et B sont des paires, et C est un singleton. Notre savoir peut donc se représenter par le diagramme suivant.

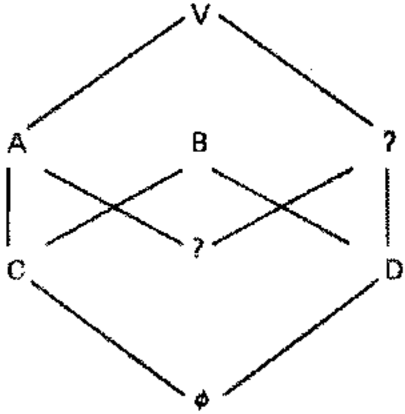


Pour le second treillis, nous savons que A et B ne sont ni {1}, ni {3} et que C est soit {1}, soit {1,2} (pourquoi ?). Cette information peut être représentée de la façon suivante.



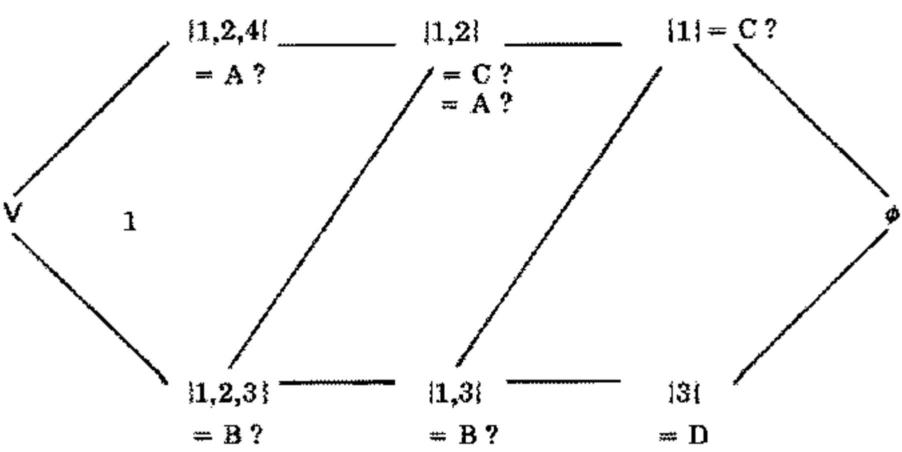
Maintenant, supposons que le contrôleur nous dise que $A \cap D = \phi$. Dans les deux treillis, on peut conclure que $C \cap D = \phi$ (6 points).

Dans notre premier treillis, l'intersection de 2 paires est un singleton et non ϕ, donc D est un singleton. Comme D n'est pas une partie de A, nous avons maintenant le diagramme :



et nous déduisons que $B \cap D = D$, $B \cup D = B$, $A \cup D = V$, et $C \cup D = B$ (24 points de plus).

Dans le second jeu, nous tirons de $A \cap D = \phi$ que, soit A soit D est $\{3\}$, mais $A \neq \{3\}$, donc $D = \{3\}$. Donc A est soit $\{1,2\}$ soit $\{1,2,4\}$, donc B est soit $\{1,3\}$ soit $\{1,2,3\}$.



Dans les deux cas, $B \cap D = D$ et $B \cup D = B$.

De plus, si $C = \{1,2\}$ alors $B = \{1,2,3\}$ puisque $B \subset C$, et si $C = \{1\}$ alors $B = \{1,2\}$ puisque $A \cap \{1,2,3\} = \{1,2\} \neq C$. Dans les deux cas, nous avons $C \cup D = B$.

Remarquons que dans les deux jeux, l'information $A \cap D = \phi$ elle-même ne nous permet pas de marquer des points.

Un jeu dans le produit cartésien $Z_3 \times Z_3$ ($Z_3 = Z/3Z$)

Le système mathématique est le groupe $Z_3 \times Z_3$. C'est-à-dire que les éléments sont les couples (x_1, x_2) où x_1 et x_2 sont des éléments de $\{0,1,2\}$ munis de la loi :

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (z_1, z_2) \quad \text{où } x_1 + y_1 \equiv z_1 [3] \text{ et } x_2 + y_2 \equiv z_2 [3]$$

Le couple $(0,0)$ est noté 0 ; les autres huit couples sont codés par les lettres de A à H. S est l'ensemble de toutes les propositions vraies de la forme $x + y = z$, sauf celles où l'un des termes est 0. Comme dans les jeux précédents, $x + y = z$ et $y + x = z$ sont considérées comme un seul et même élément de S.

Prenons quelques exemples de déductions dans ce jeu.

Supposons que notre première information soit

$$A + A = B \qquad (1)$$

En ajoutant A aux deux membres, nous obtenons $A + A + A = B + A$; mais, dans Z_3 et par conséquent dans $Z_3 \times Z_3$, $x + x + x = 0$; d'où $A + B = 0$.
Autre conséquence : $B + B = A + A + B = A$.

Si notre deuxième information est $A + C = D$, nous pouvons ajouter B aux deux membres et annuler $A + B$; d'où $C = B + D$.

Si notre troisième information est $A + D = E$, en répétant le même procédé, nous obtenons $B + E = D$.
De (2) et (3), nous déduisons $(A + C) + (A + D) = D + E$, d'où $A + A + C = E$, d'où $B + C = E$.

Ajoutons A aux deux membres de l'égalité $A + A + C = E$ et annulons $A + A + A$, nous obtenons $A + E = C$.

Remarquons que, pour cette égalité, nous n'avons pas utilisé (1).

Jeux équivalents

Il y a quelques systèmes mathématiques intéressants pour lesquels notre modèle ne peut pas réellement constituer un jeu, mais peut fournir un exercice. Bien que je n'aie pas essayé les exercices suivants avec les élèves, j'espère que chacun d'entre eux, ainsi que leurs recoupements, seront stimulants.

1. Soit de A à G les éléments non nuls de $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$.
   Supposons que $A + B = C$, $A + D = E$, $C + D = F$. Compléter la table d'addition dans $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$.

2. Soit de A à G les parties non vides de $\{1,2,3\}$ et supposons que $A \Delta B = C$, $A \Delta D = E$ et $C \Delta D = F$ (Δ étant la différence symétrique).