Un peu d'espace

par Maurice THUILIERE, lycée Chateaubriand, Rome

Une fois reconnue "l'unicité" du groupe totalement ordonné "parfait" (*) $\mathbb{R}$ (merci à M. Samuel pour ses articles si enrichissants et si détendus ...), il est amusant de transposer certaines études classiques sur une autre facette de ce merveilleux diamant qu'est $\mathbb{R}$.

(*) Bulletin de l'A.P.M. n° 299, pages 341 à 351.

Considérons donc la version $(\mathbb{R}_*^+, \times)$ *du* groupe totalement ordonné parfait (où le neutre est 1). Pour la suite, ce groupe sera désigné par V. On définit sur V une loi externe $\top$ par

$$(\forall\ \alpha \in \mathbb{R}), (\forall\ x \in V), (\alpha \top x = x^{\alpha})$$

Un exercice bien simple permet de vérifier que $(V, \top)$ est un $\mathbb{R}$-vectoriel de dimension *un*, dont une base est ... surtout pas $\{1\}$! On peut alors passer à V^2 par une démarche classique ; quelques calculs simples (recherche du neutre $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, du symétrique d'un élément ...) permettront à des apprentis de se familiariser avec V^2.

*

* *

Essayons de traduire, en termes de V^2, considéré dans sa structure de $\mathbb{R}$-vectoriel de dimension *deux*, certaines notions vectorielles bien connues. Ainsi, les vecteurs $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$ sont *dépendants* si et seulement si il existe un réel α tel que ($a' = a^{\alpha}$ et $b' = b^{\alpha}$), étant convenu que le vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ est dépendant de tout autre vecteur. Par exemple $\begin{pmatrix}1/4\\1/2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ sont dépendants $(\alpha = -\frac{1}{2})$. De même, il est intéressant de traduire les notions de partie génératrice, de base, etc... On pourra par exemple vérifier que la recherche des composantes du vecteur $\begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix}$ $(a \neq 1)$ sur la base $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}a\\\sqrt{a}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\a^2\end{pmatrix}\right\}$ conduit à la solution (unique bien sûr) $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Bien entendu, il faudra parler un jour ou l'autre de logarithmes et d'exponentielles, décerner un diplôme de "base canonique" à l'un des couples de vecteurs indépendants. Sera-ce $\left\{\begin{pmatrix}e\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\e\end{pmatrix}\right\}$ (base canonique "népérienne" de V^2) ? Alors les composantes du couple $\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ seront de toute évidence (ln 5, ln 2) (logarithme népérien). Elles seraient de la même façon (log 5, log 2) sur la base $\left\{\begin{pmatrix}10\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\10\end{pmatrix}\right\}$.

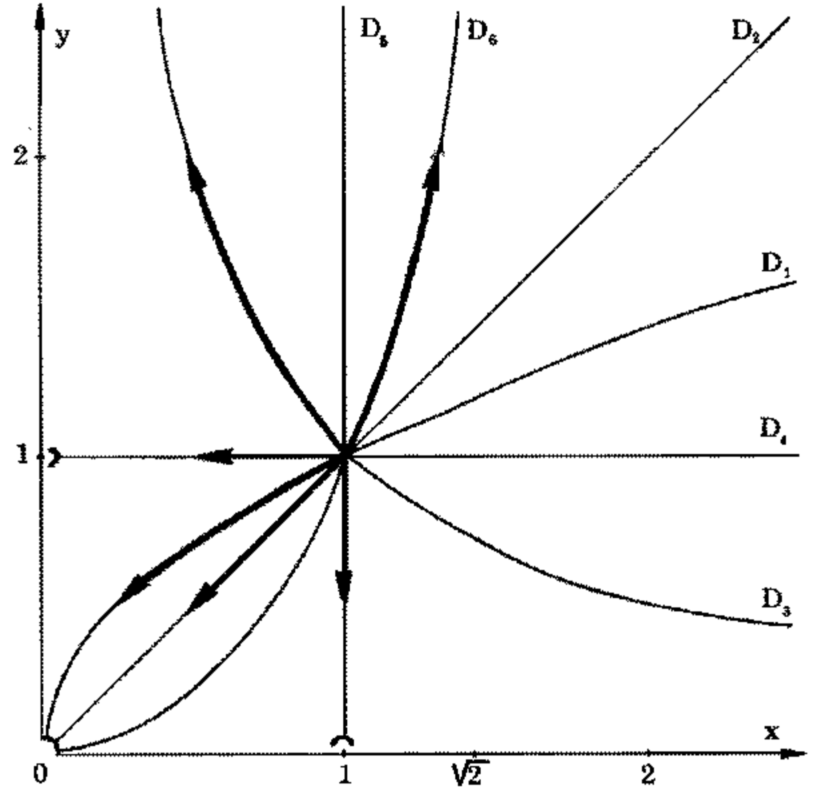
*

* *

Les équations paramétriques d'une droite vectorielle de V^2, de vecteur directeur $\binom{a}{b}$ $\left[\binom{a}{b} \neq \binom{1}{1}\right]$, sont ($x = a^\lambda$ et $y = b^\lambda$), λ parcourant R. L'"élimination" du paramètre λ entre les deux équations (en passant par exemple par les logarithmes népériens) fournit une équation cartésienne d'une telle droite :

$$y = x^{\frac{\mathrm{Log}\, b}{\mathrm{Log}\, a}} \qquad (a \neq 1)$$

Le rapport $\frac{\mathrm{Log}\, b}{\mathrm{Log}\, a}$, qui ne dépend évidemment pas de la base de logarithmes choisie, pourrait s'appeler le T-coefficient directeur de la droite.



Si on cherche alors à représenter l'image "euclidienne" des droites de V^2, on est conduit à se placer dans le "quart-de-plan"

$\mathbf{R}_*^+ \times \mathbf{R}_*^+$. Dans la figure ci-dessus, on trouvera les images euclidiennes des droites vectorielles D_i ($i \in$ 1,2,3,4,5,6) de vecteurs directeurs respectifs $\begin{pmatrix}1/4\\1/2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1/2\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1/2\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1/2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\2\end{pmatrix}$ (en gras sur la figure) de T-coefficients directeurs respectifs $\frac{1}{2}$, 1, -1, 0, "∞", 2. On reconnaît ainsi facilement que le réseau des droites vectorielles de V^2 coïncide avec le réseau des courbes x^α, avec les positions limites des droites D_4 et D_5 correspondant respectivement à $(b = 1)$ et $(a = 1)$.

Je vous souhaite d'apprécier cet espace V^2 (non encore pollué !), avec sa population de vecteurs bossus et ses forêts de droites biscornues, où professeurs et élèves pourront s'égailler — et même s'égayer !