Détermination de l'indicateur d'Euler en application des propriétés de la fonction partie entière

par P. ANGLES (Université Paul Sabatier, Toulouse)

Cette démonstration, certainement connue, peut être introduite en Terminale C où l'on étudie la fonction partie entière, premier exemple simple de fonction numérique d'une variable réelle "en escalier", notamment pour définir "l'écriture normalisée" d'un réel.

I RAPPELS :

1) *Partie entière d'un réel*

a) *Définition*

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, il existe un et un seul entier c_x ($c_x \in \mathbf{Z}$) tel que : $c_x \leqslant x < c_x + 1$ Ce nombre c_x est appelé *partie entière*, ou caractéristique, du réel x, et noté $\mathbf{E}(x)$.

b) *Exemples* $E(-\pi) = -4$; $E(\sqrt{2}) = 1$

c) La fonction $E = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, G)$ où $G = \{(x,y), (x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $y = E(x)\}$ est appelée *fonction partie entière.* Dans tout ce qui suit, on considère la restriction $E|\mathbb{R}_*^+$ de E à $\mathbb{R}_*^+$. (1)

2) *Rappels sur l'indicateur d'Euler :*

a) Rappelons, tout d'abord, que 1 n'est pas premier pour des raisons qui n'apparaissent pas clairement en Terminale C et qu'on a intérêt à l'imposer comme tel dans cette classe.

b) On suppose connues les notions de naturels premiers et de naturels premiers entre eux.

On note, ici, $a \wedge b$ le plus grand commun diviseur de a et b $(a, b \in \mathbb{N})$.

a, b étant des naturels supérieurs à 1, a et b sont donc premiers entre eux si et seulement si (par définition)

$$a \wedge b = 1$$

c) *Définition*

> n étant un naturel supérieur à 1, le nombre $\varphi(n)$ des naturels m tels que $1 \leqslant m \leqslant n$ et tels que $m \wedge n = 1$ est appelé l'indicateur d'Euler de n.

II LEMME - CLEF PREPARATOIRE

> Pour m et n naturels supérieurs à 1, $n \geqslant m$, $E\left(\frac{n}{m}\right) = q$ est le nombre des naturels r inférieurs ou égaux à n et multiples de m.

Démonstration : Pour n, m naturels supérieurs à 1, $n \geqslant m$:

$$q = E\left(\frac{n}{m}\right) \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} q : q \leqslant \frac{n}{m} < q+1 \quad \Leftrightarrow \quad q : mq \leqslant n < m(q+1)$$

$$\Longleftrightarrow \quad q = \text{nombre des multiples } r \text{ de } m \text{ tels que } 1 \leqslant r \leqslant n.$$

(1) $\mathbb{R}_*^+ = \mathbb{R}^+ - \{0\}$ (Voir Dictionnaire de l'APMEP).

Ce lemme-clef va nous permettre de déterminer $\varphi(n)$ pour $n \in N_* - \{1\}$.

Avant tout, remarquons qu'il paraît naturel, comme pour bien des problèmes d'arithmétique, de décomposer n en facteurs premiers, soit $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ où $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}$ (ensembles des nombres premiers) et $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in N_*$

Puisqu'on suppose inconnue la valeur de $\varphi(n)$, il est normal d'étudier, en préliminaire, les cas simples où $n = p^\alpha$, p premier, $\alpha \in N_*$ et $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$ $(p_1, p_2 \in \mathcal{P} ; \alpha_1, \alpha_2 \in N_*)$.

III PRELIMINAIRES

1) *Détermination de* $\varphi(p^\alpha) ; p \in \mathcal{P}, \alpha \in N_*$

$\varphi(p^\alpha) \overset{\text{déf}}{=}$ (nombre des entiers $q ; 1 \leqslant q \leqslant p^\alpha$ et $q \wedge p^\alpha = 1$).

Il s'ensuit que :

$(p^\alpha \in N) ; \varphi(p^\alpha) = p^\alpha -$ (nombre des entiers $q ; 1 \leqslant q \leqslant p^\alpha$ et non premiers avec p^α)

Or, tout q entier tel que $1 \leqslant q \leqslant n$: *q non premier avec* p^α, $(p \in \mathcal{P})$

$\Leftrightarrow$ q entier, $1 \leqslant q \leqslant p^\alpha$, q divisible par p (bien évidemment), ce qui équivaut aussi à : *q entier,* $1 \leqslant q \leqslant n$, *q multiple de p.*

Vu, donc, le lemme-clef du II, le nombre des multiples de p inférieurs ou égaux à p^α est

$$E\left(\frac{p^\alpha}{p}\right) = E(p^{\alpha-1}) = p^{\alpha-1} \quad , \text{ puisque } \quad p^{\alpha-1} \in N .$$

Dès lors,

$$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^\alpha - \frac{p^\alpha}{p} = p^\alpha \left(1 - \frac{1}{p}\right) (p \in \mathcal{P} \text{ et } \alpha \in N_*)$$

2) *Détermination de* $\varphi(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2})$; $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$; $\alpha_1, \alpha_2 \in N_*$.

La méthode précédente s'applique :

$\varphi(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}) =$ (nombre des entiers $q : 1 \leqslant q \leqslant n$ et $q \wedge (p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}) = 1$)

$= p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} -$ (nombre des entiers $q : 1 \leqslant q \leqslant p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$ et non premiers avec $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$)

$= p_1^{\alpha_1}\ p_2^{\alpha_2}$ — (nombre des entiers $q : 1 \leqslant q \leqslant p_1^{\alpha_1}\ p_2^{\alpha_2}$, q *multiple de* p_1 ou *de* p_2)

(le ou étant le *ou* inclusif mathématique).

Il convient donc de rechercher le cardinal de $P_1 \cup P_2$ où

$$P_i = \{\text{multiples } q \text{ de } p_i : 1 \leqslant q \leqslant p_1^{\alpha_1}\ p_2^{\alpha_2}\}\ ;\ (i = 1,2).$$

Or, il est bien connu en Terminale C que :

(1) $\quad card(P_1 \cup P_2) = card\, P_1 + card\, P_2 - card(P_1 \cap P_2)$

et dès lors, vu le lemme-clef du II :

$$card(P_1 \cup P_2) = E\left(\frac{p_1^{\alpha_1}\ p_2^{\alpha_2}}{p_1}\right) + E\left(\frac{p_1^{\alpha_1}\ p_2^{\alpha_2}}{p_2}\right) - E\left(\frac{p_1^{\alpha_1}\ p_2^{\alpha_2}}{p_1\ p_2}\right)$$

$$= p_1^{\alpha_1}\ p_2^{\alpha_2}\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1\ p_2}\right)$$

d'où

$$\varphi(p_1^{\alpha_1}\ p_2^{\alpha_2}) = p_1^{\alpha_1}\ p_2^{\alpha_2}\left(1 - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_1\ p_2}\right)$$

$$= p_1^{\alpha_1}\ p_2^{\alpha_2}\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)$$

Ayant, ainsi, déterminé $\varphi(n)$ pour des cas simples, on peut, dès lors, aborder le cas général où :

$$n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} \quad (p_i \in \mathcal{P}\ ,\ \alpha_i \in \mathbb{N} \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant k)$$

A priori, on “peut penser”, guidé par les résultats précédents, que

$$\varphi(n) = n\left[\prod_{i=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right]$$

C'est ce que nous allons démontrer.

IV ETUDE DU CAS GENERAL OU $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$

Le même raisonnement fait au III.2) s'applique ; on doit déterminer, alors, le cardinal de $(P_1 \cup \dots \cup P_k)$ où $P_i (1 \leqslant i \leqslant k)$ désigne l'ensemble des multiples q de p_i tels que $1 \leqslant q \leqslant n$.

On utilise alors la propriété suivante, généralisation de la formule (1) du III.2), dont la démonstration a été rappelée par E. Ehrhart dans la Revue de février 1963 de Mathématiques Spéciales (Vuibert) :

1) *Théorème*

$P_1, P_2, \ldots P_k$ étant k ensembles donnés, on a :

$$(2) : \operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{k} P_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (\operatorname{card} P_i) - \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \operatorname{card}(P_i \cap P_j) + \sum_{\substack{i,j,\ell \\ 2 \text{ à } 2 \neq}} \operatorname{card}(P_i \cap P_j \cap P_\ell) + \ldots + (-1)^{k-1} \operatorname{card}\left(\bigcap_{i=1}^{k} P_i\right)$$

On peut démontrer cette formule (2) par récurrence ou directement comme suit :

Supposons qu'un élément x donné appartienne à r ensembles P_i. Cet élément x est compté *une et une seule fois* dans le premier membre de l'égalité (2). Au second membre, x est compté $C_r^1 = r$ fois dans $\sum_i (\operatorname{card} P_i)$; C_r^2 fois dans $\sum \operatorname{card}(P_i \cap P_j)$; ..... ; C_r^r fois dans $\sum \operatorname{card}(\underbrace{P_i \cap \ldots \cap P_\ell}_{r \text{ facteurs}})$.

Donc x est compté au second membre un nombre de fois égal à :

$$S_r = C_r^1 - C_r^2 + \ldots + (-1)^{r-1} \; C_r^r$$

Le calcul de S_r peut se faire à l'aide de "la formule du binome".

Plus explicitement :

$$S_r = 1 - \left[1 - C_r^1 + C_r^2 + \ldots + (-1)^r C_r^r\right] = 1 - [1-1]^r = 1$$

Donc x est compté *une et une seule fois* au second membre.

2) *Calcul de* $\varphi\left(p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}\right) = \varphi(n)$

Comme au III.2) $\varphi(n) = n - \operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{k} P_i\right)$

soit

$$\varphi(n) = n - \left[\sum_i E\left(\frac{n}{p_i}\right) - \sum_{i,j} E\left(\frac{n}{p_i\, p_j}\right) + \ldots + (-1)^{k-1} E\left(\frac{n}{p_1 \ldots p_k}\right)\right]$$

soit

$$\varphi(n) = n - n\left[\sum_i \left(\frac{1}{p_i}\right) - \sum_{i,j} \left(\frac{1}{p_i\, p_j}\right) + \ldots + (-1)^{k-1} \left(\frac{1}{p_1 \ldots p_k}\right)\right]$$

ou, donc :

$$\varphi(n) = n \left[1 - \sum_i \left(\frac{1}{p_i}\right) + \sum_{i,j} \left(\frac{1}{p_i\, p_j}\right) + \ldots + (-1)^{k} \left(\frac{1}{p_1 \ldots p_k}\right)\right]$$

Vu le développement de $\prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$

on trouve bien :

$$\boxed{\varphi(n) = n \left[\prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right]}, \text{ comme prévu.}$$

On peut, comme exercice, chercher $\varphi(7) = 7\left(1 - \frac{1}{7}\right) = 6$ (les nombres entiers q tels que $1 \leqslant q \leqslant 7$ et premiers avec 7 sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6) ;
et vérifier directement le résultat :

$$\varphi(25) = 25\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 20 .$$

Proposons un exercice simple de combinatoire, qui est aussi une application, abordable en Terminale C, du lemme-clef donné au II.

V DECOMPOSITION REMARQUABLE DE $n!$ pour $n \in \mathbb{N}$

Cet exercice est d'énoncé classique. Il m'a été proposé par C. Frasnay, Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse ; je l'ai aussi trouvé dans un livre d'exercices de A. Combes chez Vuibert, sous une forme légèrement différente.

1) Pour n entier > 1 et t entier $\geqslant 2$, on pose

$$u(n,t) = \sum_{k \geqslant 1} E\left(\frac{n}{t^k}\right)$$

Justifier "l'existence" de $u(n,t)$.

2) En déduire, en utilisant le lemme-clef du II, que, $\mathcal{T}$ désignant l'ensemble infini des nombres premiers,

$$n! = \prod_{t \in \mathcal{T}} t^{u(n,t)}$$