Des points et des nombres

par P. MAHAUT

I. Préliminaires :

Le matériel pédagogique est souvent absent de notre vie et de nos classes, ne pourrions-nous pas trouver un petit budget pour l'acheter ou mieux pour le construire nous-mêmes ?

L'expérience conjuguée du Thème-Noyau et du 10 %, si elle est exécutée suivant certaines conditions, nous montre à la fois son absence et la manière de nous le procurer.

Faire un effort vers une vue plus intuitive des choses, ce n'est pas vouloir se substituer au raisonnement ; observer, ce n'est pas démontrer, mais l'un précède l'autre. Observer, construire, imaginer, pour notre esprit, c'est déjà abstraire.

Mettre nos élèves en position de recherche sur des expériences particulières, les amener à généraliser, à structurer en partant de ces cas particuliers, c'est les former à leur vie de demain plutôt que de leur ingurgiter des notions dont ils ne sauront pas se servir le moment venu.

Même l'arithmétique, si elle est prise comme un jeu, est propre à ouvrir l'esprit des enfants.

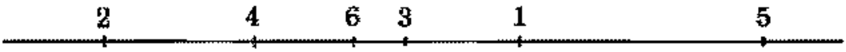
Je vais maintenant vous soumettre quelques travaux faits en 10 % avec mes élèves ; ce ne sont là que quelques notes éparses que je soumets à votre réflexion.

II. Une première étude de la translation

La droite physique est une notion bien connue de nos élèves car ils ont pris contact avec elle dès leur plus jeune âge.

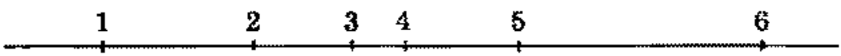
Soit un sous-ensemble de points physiques de cette droite ; un ensemble que l'on peut considérer comme fini, tout au moins pour commencer.

Nous pouvons mettre cet ensemble de points en bijection avec un ensemble de nombres (Par exemple un sous-ensemble de nombres naturels).

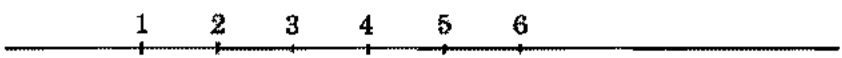


La position des points sur la droite est-elle fonction des nombres avec lesquels on les met en relation et comment ?

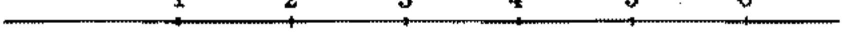
La relation d'ordre qu'est l'inégalité définie dans N sera ainsi découverte et nous amènera à la proposition suivante :



L'enfant possède de manière intuitive la notion de longueur. Admettre que deux segments sont isométriques est finalement *axiomatique*. Depuis le plus jeune âge, l'enfant étalonne son système nerveux à l'aide de grandeurs physiques usuelles telles que longueur, temps, température... Il a appris que les adultes font correspondre un nombre à une longueur ; il arrivera très vite, trop vite même, à la disposition suivante qui lui semble naturelle :



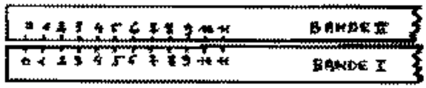
Question qu'on ne manquera pas de lui poser : pourquoi pas cette représentation ?



On lui apprend alors comment reporter une longueur au compas ou avec l'aide d'une bande de papier.

Quels sont les avantages et les inconvénients d'une représentation par rapport à une autre représentation ?

Nous demanderons ensuite aux enfants de construire le petit matériel dessiné ci-dessous :



La bande I est fixe, la bande II est mobile.

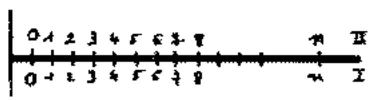
Quelles sont toutes les bijections que l'on peut former en se servant de ces deux règles ? (Pour parler de bijection, il faut préciser les ensembles source et but)

Il est intéressant de donner très tôt à l'enfant une idée de ce que peut être une famille de bijections.

Afin de les aider, on peut leur proposer de remplir les tableaux ci-dessous correspondant aux manipulations qui sont dessinées à côté.

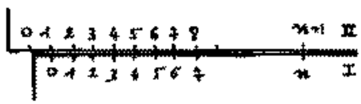
I	0	1	2	3	n
II	0	1	2	3	n

B_0



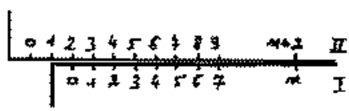
I	0	1	2	3	n
II	1	2	3	4	$n+1$

B_1



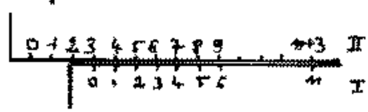
I	0	1	2	3	n
II	2	3	4	5	$n+2$

B_2



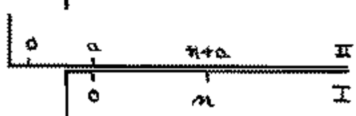
I	0	1	2	3	n
II	3	4	5	6	$n+3$

B_3



I	0	1	n
II	a	$a+1$	$a+n$

B_a

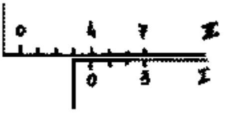


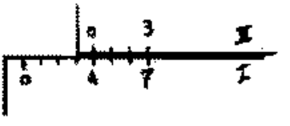
Peut-on utiliser une de ces bijections pour faire une addition ? Les élèves trouveront seuls comment se servir des deux règles pour additionner des nombres et ils seront heureux de cette découverte qui les paiera de leur effort. Il sera *nécessaire* de leur faire exprimer ce qu'ils font pour additionner deux nombres car ils s'en serviront à nouveau dans la suite.

Pour faire l'opération a + b on place le 0 de I sous la graduation a de II. Le résultat se lit sur la règle II en face de la graduation b de I.

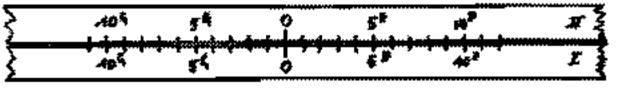
On leur demande ensuite de faire une découverte analogue leur permettant de procéder à une soustraction. Il sera bon de les amener à faire les deux soustractions 7—3 et 3—7 par exemple. On justifiera la soustraction 3—7 en invoquant un jeu quelconque où l'on a gagné 3 points et perdu 7 points.

Cette argumentation, jointe aux deux expériences dessinées ci-dessous :





les amène à prolonger la règle II, puis la règle I, pour pouvoir faire tous les calculs de points gagnés et perdus. A droite de 0 ils graduent la droite pour représenter les points gagnés, à gauche de 0 ils graduent la droite pour représenter les points perdus. La règle ainsi construite possédant deux fois le même nombre, ils sont amenés à compléter pour les uns : 1d, 2d, 3d... et pour les autres : 1g, 2g, 3g... ; ils possèdent donc maintenant le matériel ci-dessous :



En faisant la même manipulation que pour l'opération + précédente, on leur demande alors de faire les calculs suivants :

3d + 7d =	puis	3d + 7g =
3g + 7g =		3g + 7d =

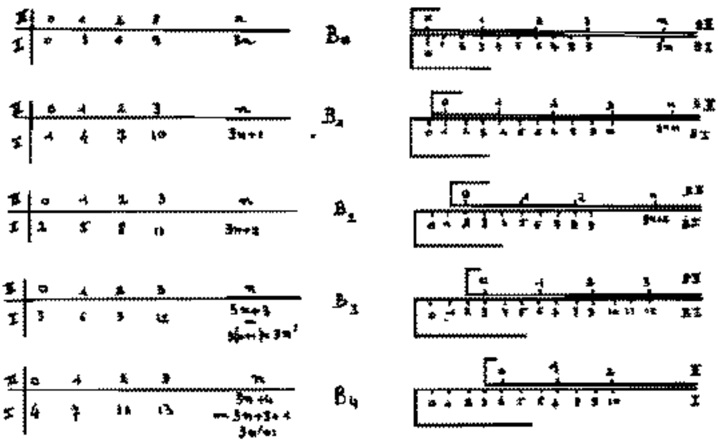
Ils découvrent ainsi les propriétés de l'opération + dans ce nouvel ensemble. Il est ici évident que **N** est identique à **Zd** et que cette nouvelle addition est plus puissante que la précédente puisqu'elle nous permet de faire le calcul 3 — 7 en le remplaçant par 3d + 7g = 4g.

III. Le linéaire et l'affine au secours des classes modulo x :

On reprend la bande I utilisée dans les manipulations précédentes.

On demande aux élèves de construire une nouvelle bande que l'on appellera Bande II modulo 3. Pour cela on prend une bande de papier moitié moins large que les précédentes et l'on dessinera une graduation où les points sont trois "fois plus" espacés que pour la Bande I.

On demande alors aux élèves quelles sont toutes les bijections qu'ils peuvent construire en utilisant ce matériel. Pour les aider nous pouvons leur donner à remplir les tableaux ci-dessous.



Peut-on introduire dans cette famille de bijections une relation d'équivalence et comment ?

Peut-on faire une partition dans l'ensemble de ces bijections ?

On s'aperçoit que B0, B3, B6,.. B3n.. sont des bijections qui à N font correspondre un sous-ensemble de l'ensemble des multiples de 3.

On peut appeler Classe 0 ou $\overline{0}$ l'ensemble des images ainsi obtenues :

$\overline{0}$ = 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, ... 3n ...

De même les bijections B1, B4, B7, ... B3n + 1 sont des bijections qui mettent N en bijection avec les images :

$\overline{1}$ = 1, 4, 7, 10, ..., 3n + 1 ...

Les bijections B2, B5, B8, ... B3n + 2 sont des bijections qui mettent N en bijection avec les images :

$\overline{2} = \{2, 5, 8, 11, ..., 3n + 2 ...\}$

Les classes $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}$ forment-elles une partition de N ?

Que se passe-t-il si on ajoute deux éléments de la classe $\overline{0}$? Le résultat se trouve-t-il obligatoirement dans une classe ? Peut-on le voir avec le matériel que nous avons construit ?

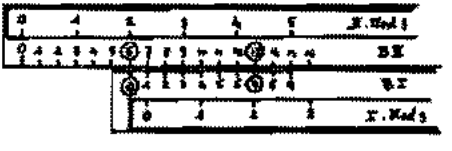
Exemple :

On place les bandes BI et BII de façon à additionner les deux éléments donnés (ici 6 et 9). On place la bande II mod. 3 de façon à indiquer que 6 est élément de la classe $\overline{0}$. On place la bande I mod. 3 de façon à indiquer que 9 est élément de la classe $\overline{0}$. On s'aperçoit que le résultat 15 est en bijection avec le 5 de II mod. 3, donc le résultat est élément de la classe $\overline{0}$. Cette disposition montre d'ailleurs qu'il en est de même pour toute somme d'éléments de la classe $\overline{0}$; d'où l'idée d'inventer une nouvelle opération dans l'ensemble $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ où l'on doit avoir $\overline{0} + \overline{0} = \overline{0}$.

Cherchons maintenant $\overline{0} + \overline{1}$, si cela est possible.

Nous nous y prendrons en deux étapes :

1ère étape :

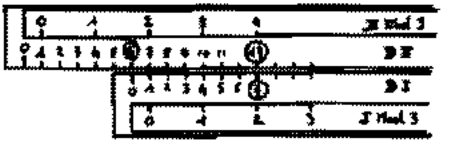


_ La disposition de II mod. 3 sur BII montre que 6 est élément de $\overline{0}$.

_ La disposition de I mod. 3 sur BI montre que 7 est élément de $\overline{1}$.

13 n'est pas en bijection avec un élément de II mod. 3, donc n'est pas élément de la classe $\overline{0}$.

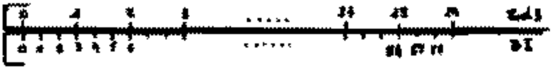
2ème étape :



On fait glisser II mod. 3 sur BII pour savoir quelle est la classe du résultat 13. Après plusieurs manipulations de ce genre on déduit intuitivement que $\overline{0} + \overline{1} = \overline{1}$. On peut ainsi faire construire la table de l'opération + dans l'ensemble $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$.

Après cette étude des modulos (j'ai fait faire d'autres modulos), j'ai posé un certain nombre de questions amenant les enfants à se servir de ces règles pour faire des divisions, des encadrements, et la division euclidienne avec lecture du reste.

Exemple : Quelles sont les bijections qui amèneraient le point 84 de la règle I en correspondance avec une graduation de la règle mod. 3 ?



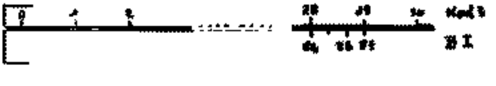
Quelle bijection est la plus intéressante ?

Ces deux bandes juxtaposées permettent de lire tous les multiples de 3 ainsi que les quotients des nombres par 3.

Si les quotients ne tombent pas juste, on peut se servir des classes de bijections précédentes pour lire les quotients et les restes des opérations.

Exemple : Diviser 86 par 3.

1ère étape :



$$84 \leqslant 86 < 87$$

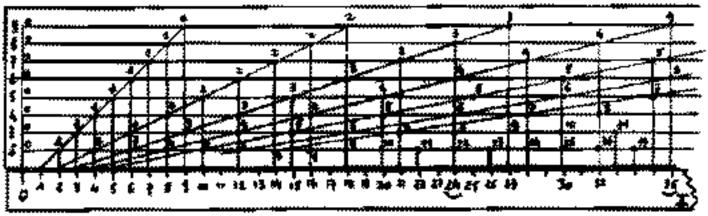
$$28 \times 3 \leqslant 86 < 29 \times 3$$

2ème étape :

86 est un élément de la classe $\overline{\overline{2}}$. Le reste est donc 2.

Nous pouvons faire construire une bande par modulo et par quotient.

Voici une bande permettant de faire des divisions pour des quotients compris entre 1 et 10.



Exemple : Si on regarde la droite correspondant au nombre 24 de la règle I on s'aperçoit qu'elle possède cinq points renforcés qui ont pour noms 12, 8, 6, 4, 3, ce qui veut dire : les premiers diviseurs de 24 sont 2, 3, 4, 6, 8 ; et les quotients correspondants sont 12, 8, 6, 4 et 3.

On remarquera que, pour trouver, par exemple, les diviseurs communs à 24 et 36, il suffit de chercher les points qui, sur les verticales 24 et 36, se trouvent sur une même horizontale. On trouve : (12, 18), (8, 12), (6, 9), (4, 6) qui correspondent aux diviseurs communs 2, 3, 4 et 6. Il faudrait avoir une règle plus haute pour voir apparaître le P.G.C.D. 12 de cette manière. Il est cependant évident que 12 est le P.G.C.D. car, en parcourant les droites verticales correspondant à 24 et 36, on trouve les diviseurs 12, 8, 6, 4, 3 et 18, 12, 9 ..., ce qui prouve que 12 est le P.G.C.D. puisque les diviseurs vont en diminuant.

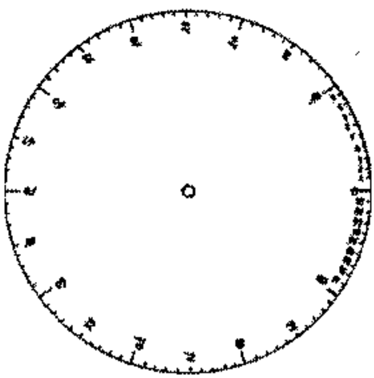
En recommençant pour d'autres nombres, on découvre les nombres premiers, les nombres étrangers (ou premiers entre eux).

IV. Vers une nouvelle présentation du même problème :

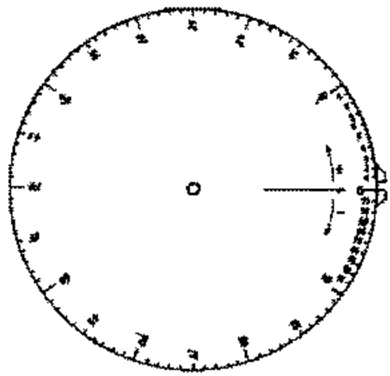
Ce travail nous a permis de comprendre certaines propriétés, mais les règles que nous avons construites ont le gros défaut de porter peu de nombres dans un encombrement raisonnable. Nous avons alors eu l'idée de prendre pour supporter nos points des cercles et non des droites.

Un cercle de 10 cm de rayon aura un périmètre approximatif de 628 mm ; aussi pourrons-nous disposer 100 points qui seront séparés par une distance curviligne approximative de 6,28 mm, ce qui rend les nombres très lisibles. Nous avons pris 100 points puisque nous ferons les lectures dans le système décimal, mais nous pourrions nous servir des mêmes propriétés dans une autre base. Nous pourrons lire des nombres supérieurs à 100 en faisant faire plusieurs tours au disque.

Ainsi, les deux disques suivants, tournant autour d'un même axe, serviront à faire les additions et les soustractions :

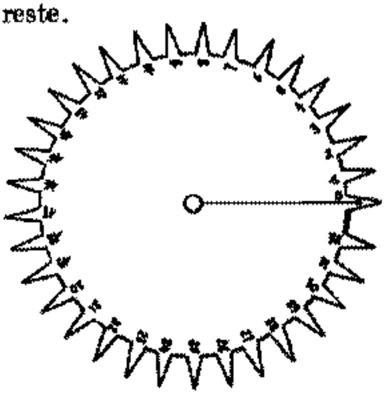


Disque de base

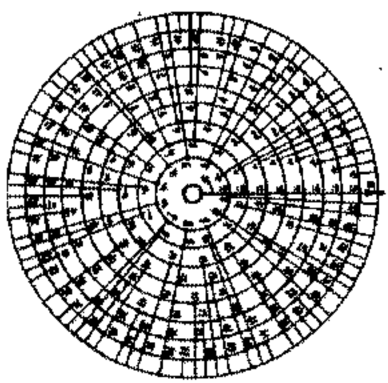


Disque Additif Soustractif Général

Par contre, les deux disques suivants permettent l'exploitation d'un travail sur les modulos, sur la division sans reste ou avec reste.



Disque Modulo 3



Disque de divisibilité avec reste
Modulo 2.3.4.5.6.7.8.9

V. Une autre présentation de la linéarité :

Dans une classe de sixième où je fais travail manuel, j'ai demandé à mes élèves de construire un tronc de pyramide régulière de 7 cm d'arête ayant pour grande base un carré de 8 cm de côté et pour petite base un carré de 4 cm de côté.

Mes élèves se sont donc posé le problème de construire le développement de cette pyramide.

Ne sachant pas le faire, ils ont eu l'idée de construire les quatre faces séparément, c'est-à-dire de construire quatre trapèzes isocèles superposables ayant les dimensions citées plus haut. Ils ont ensuite disposé ces trapèzes côte à côte de façon à obtenir le développement.

Je leur ai proposé de prolonger les arêtes ; ils ont ainsi découvert que leurs prolongements se coupaient en un point O. A la réflexion, ils ont trouvé cette propriété naturelle, car si la pyramide avait été entière le point O aurait existé, et ils avaient déjà construit un cône au début de l'année.

Mes élèves se sont alors aperçu que les deux cercles que l'on pouvait tracer avaient des rayons de longueurs respectives 7 cm et 14 cm. Ils ont fait cette constatation mais ont été, bien entendu, incapables d'expliquer pourquoi.

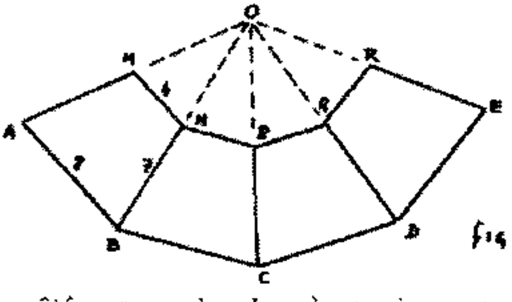


fig 1

Ayant arrêté mes recherches à ce niveau en sixième, j'ai décidé de les poursuivre à un niveau plus élevé en classe de troisième.

Ce que les élèves de sixième avaient fait en deux heures, les élèves de troisième l'ont fait en dix minutes.

Mes élèves de troisième avaient étudié Thalès, mais lorsque je leur ai demandé pourquoi la longueur de [OA] était 14 cm, ils n'ont pas su me le dire. Ils avaient même trouvé OA = 14 de manière intuitive, sans faire de mesure.

Pour les faire réfléchir, je leur ai posé d'autres questions comme : Quelle est la longueur de [OA] si AB = 8 et MN = 2 ou AB = 8 et MN = 6. Ils ont su donner les résultats sans calcul mais ne savaient toujours pas pourquoi, lorsque l'un d'entre eux s'est écrié : "C'est le théorème de Thalès" ; mais ce n'était encore qu'une intuition.

J'ai demandé à mes élèves de démontrer que si $\overrightarrow{MN} = k.\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{OM} = k.\overrightarrow{OA}$; j'ai précisé qu'il fallait utiliser l'axiome de Thalès et que des écritures vectorielles étaient conseillées. Ils se sont alors penchés, cours de mathématique en main, sur le problème.

En une dizaine de minutes mes élèves ont trouvé leur démonstration :

O M A alignés $\overrightarrow{OA} = k.\overrightarrow{OM}$

O N B alignés $\overrightarrow{OB} = k'.\overrightarrow{ON}$

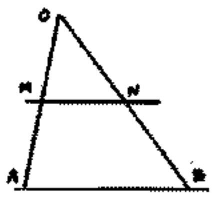
MN // AB donc $k = k'$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = k.\overrightarrow{ON} - k.\overrightarrow{OM}$$

$$= k.(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM})$$

$$\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{MN}$$

fig 2



Si AB est le double de MN, alors OA est le double de OM donc de MA. Il était donc normal de trouver 14 cm.

Alors m'est venue l'idée d'exploiter ces observations de manière plus générale.

Considérons la figure n° 3. Les points O, A, B, C, E, F ... K forment une graduation de la droite (OA). Les droites (AM), (BN), (CP) ... (KW) sont parallèles.

Les directions de (KW) et de (OA) peuvent être quelconques ou perpendiculaires.

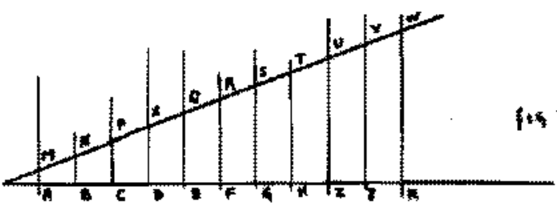


fig 3

En utilisant la démonstration précédente, nos élèves de troisième généralisent rapidement : si AM = L alors BN = 2L, CP = 3L ... KW = 10L.

Les élèves de sixième peuvent découvrir ces propriétés, mais pour eux il faut se servir de quadrillages et leur faire chercher des alignements de points.

Si nous mettons le point M en bijection avec le nombre a, les points N, P, X, Q, ... W sont alors en bijection avec 2a, 3a, 4a, ... 10a. Nous pouvons donc utiliser de tels alignements pour faire des multiplications ou des divisions.

Proposition d'étude :

Considérons les deux figures ci-dessous :

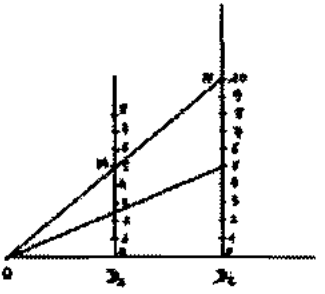


fig. 4

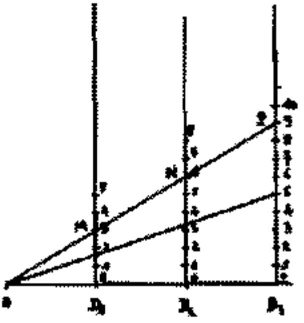


fig. 5

Fig. 4 : Considérons l'ensemble des points M éléments de D_1 auxquels on fait correspondre un nombre naturel. Les images N de ces points M obtenues par alignement avec O et se trouvant sur D_2 sont-elles en bijection avec des nombres naturels ? si oui, lesquels ?

Considérons l'ensemble des points N éléments de D_2 auxquels on fait correspondre un nombre naturel. Les images M de ces points N obtenues par alignement avec O et se trouvant sur D_1 sont-elles en bijection avec des nombres naturels ? si non, peut-on caractériser ces nombres ?

Fig. 5 : Les mêmes questions se posent pour cette nouvelle figure.

Considérons maintenant la figure 6 ci-dessous :

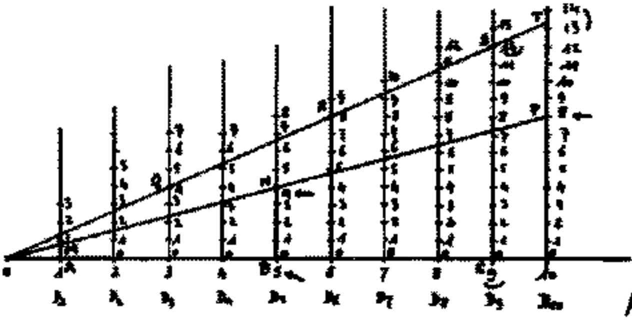


fig. 6

Soit à calculer $q = 4/5$. On repère 4 sur D_5 puis l'alignement O, M, N, P. M est en bijection avec 0,8 mais on ne peut lire que $0{,}5 < q < 1$; par contre, sur D_{10} , P est en bijection avec 8, donc $q = 0{,}8$.

Soit à calculer $q = 12/9$. On repère 12 sur D_9. L'alignement des points Q, R, S fait apparaître que $12/9 = 8/6 = 4/3$. L'alignement O, S, T fait apparaître que $1{,}30 < q < 1{,}35$.

VI. Vers une nouvelle présentation du même problème :

A. *Un peu de technologie* : Quels sont les principaux inconvénients de ce système de lecture ?

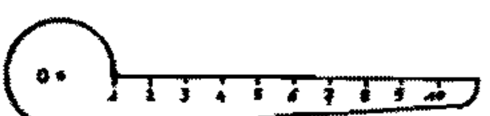
— Pour lire il faut tracer une ligne droite à l'aide d'une règle.

— On peut uniquement faire des divisions par les nombres de 1 à 9.

— Pour pouvoir diviser les 100 premiers nombres naturels, en supposant que les droites D_n supportent une graduation de 5 mm de pas, il faudrait une règle d'au moins 50 cm de long.

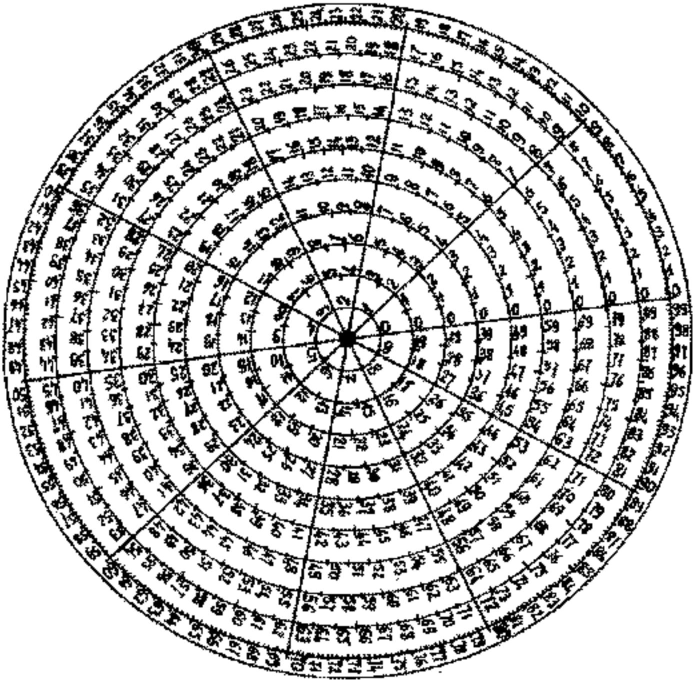
B. *Remèdes proposés* :

— Pour lire sans traçage on peut construire la règle en carton dessinée ci-dessous, que l'on fera pivoter en O à l'aide d'une attache parisienne ou d'un axe (pointe de compas, boulon et vis ...).



— Entre D_n et D_{n+1} on peut tracer 10 parallèles équidistantes qui permettront d'avoir des diviseurs entre 0 et 100.

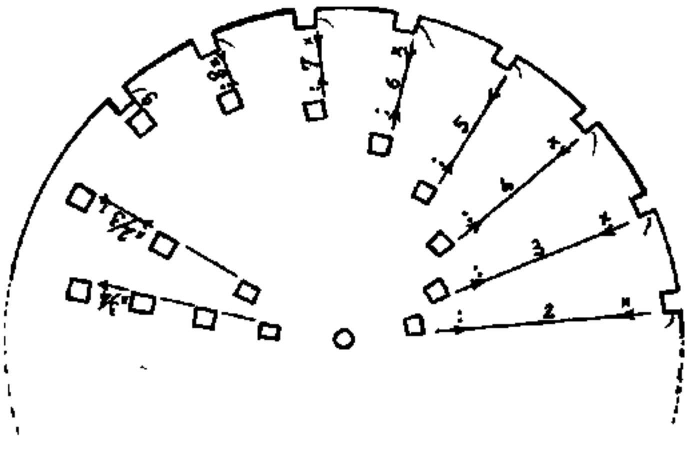
— Le premier remède nous a fait penser en terme de rotation ; les points portés par les droites D_n peuvent être portés par des cercles concentriques, les longueurs d'arcs seront bien proportionnelles aux rayons ($d_i = R\, d_0$). De plus, la règle tournante peut alors être graduée pour la lecture car le faisceau de cercles



Disque de base — fig. 5

de centre O coupe un rayon suivant une graduation qui reste de pas constant dans la rotation, ce qui n'était pas vrai dans les constructions précédentes.

C. Voici le disque de base ainsi construit ; nous pouvons l'incorporer à l'intérieur du disque précédemment construit pour les modulos ; il reste à construire quelques disques permettant l'exploitation des propriétés que nous venons de découvrir, afin de multiplier, diviser, simplifier les fractions ...



Disque produit quotient ; lecture décimale — fig. 6