La didactique de l'analyse

(Conférence de Georges GLAESER au stage d'analyse de Strasbourg organisé par l'Inspection Générale)

I Le principe de l'enseignement en spirale

Des notions mathématiques particulièrement complexes ne peuvent pas être entièrement comprises en un seul instant, à un moment précis de la scolarité.

A leur propos, on peut opposer deux façons d'enseigner.

L'une d'elles, favorisée par la rédaction actuelle des programmes, consiste à *exposer en une seule fois* tout le contenu supposé de la matière à enseigner (par exemple : c'est en Quatrième que "l'on fait" les nombres réels et en Première que "l'on fait" la continuité). Mais comme la compréhension complète n'est jamais acquise d'emblée, on procède chaque année à des *révisions* du même exposé, en misant sur l'efficacité de la répétition. On pourrait croire que les élèves exceptionnellement doués comprennent dès la première fois. En fait, les enfants exceptionnellement curieux apprennent une foule de choses en dehors de l'école. Souvent, le premier cours du maître n'est qu'une synthèse d'une riche expérience vécue depuis longtemps.

L'autre méthode s'appuie sur une analyse préalable des difficultés à surmonter, sur une description *des seuils que l'élève doit franchir* pour accéder à une compréhension complète.

L'assimilation s'étend alors sur plusieurs années : à chaque reprise le niveau progresse ; on essaie de surmonter de nouveaux obstacles. C'est le principe de *l'apprentissage en spirale.*

Nous allons esquisser ici l'application de ce principe à l'étude des notions de limite, continuité, etc...

II Un peu d'histoire

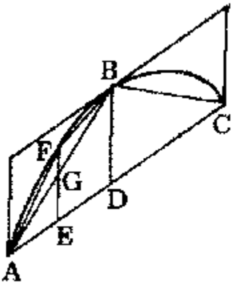
Une première approche de la notion de limite était familière aux Grecs cinq siècles avant J. C. (Zénon d'Elée — cf. aussi les Eléments d'Euclide).

En tout cas, la compréhension explicite de cette notion est définitivement acquise dans l'oeuvre d'Archimède (né en 287 avant J. C.). Reportez-vous à ses travaux sur l'aire et la longueur du cercle, sur la quadrature de la parabole, la détermination de la tangente à la spirale, etc. L'idée y est clairement et *rigoureusement* exposée. (*Archimède* — Les oeuvres complètes, traduites par P. Ver Eckes — A. Blanchard 1960 Paris). (Cf. aussi "Mathématiques et mathématiciens, DEDRON et ITARD — Magnard, Paris 1959).

"Cette démonstration lui paraissant manquer de rigueur, Archimède la reprend dans la *quadrature de la parabole* en remplaçant les lignes en nombre infini menées parallèlement au diamètre par des trapèzes et en démontrant ainsi que le triangle CAF n'est ni inférieur, ni supérieur au triple du segment.

Cependant, comme il fait encore appel à la mécanique, ce procédé ne le satisfait pas pleinement. Dans la seconde partie du traité sur la quadrature, calquant sa démarche sur celle d'Eudoxe dans la cubature de la pyramide, Archimède inscrit dans le segment ABC le triangle ABC ayant pour sommet B le sommet même du segment.

Il constate que ce triangle est plus grand que la moitié du segment, en le comparant au parallélogramme de base AC, dont la base supérieure est la tangente en B à la courbe.



Le segment comprend le triangle ABC et deux petits segments comme AFB. Dans chacun d'eux il inscrit, par le même procédé, un triangle comme AFB. Or,

triangle AFB : triangle ABD = FG : BD.

Mais $GE = \frac{1}{2} BD$ et $FE = \frac{3}{4} BD$, donc $FG : BD = \frac{1}{4}$.

Le triangle AFB est donc $\frac{1}{4}$ du triangle ABD ou $\frac{1}{8}$ du triangle ABC.

Les deux nouveaux triangles inscrits sont donc, au total, $\frac{1}{4}$ du triangle ABC. Prenons ce dernier pour unité ; en continuant le procédé nous obtenons les sommes :

$$1\ ;\quad 1+\frac{1}{4}\ ;\quad 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\ ;\quad 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}\quad \text{etc...}$$

qui mesurent des aires de plus en plus proches de l'aire cherchée, et qui pourront s'en approcher d'une quantité moindre que toute grandeur donnée.

On retrouve là la méthode même d'Eudoxe. Cependant Archimède ne la développe pas exactement comme fait Euclide au livre XII. Il remarque que $\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$ donc que

$$\frac{1}{4^n}+\frac{1}{3\times 4^n}=\frac{1}{3\times 4^{n-1}}.$$

A la somme

$$S_n = 1+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{4^n},$$

ajoutons $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4^n}$. Il vient :

$$S_n+\frac{1}{3}.\frac{1}{4^n} = 1+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{4^{n-1}}+\frac{1}{3.4^{n-1}}$$

$$= 1+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{4^{n-2}}+\frac{1}{3.4^{n-2}},\ \text{etc...}$$

$$= \frac{4}{3}$$

On peut maintenant démontrer par l'absurde que le segment de parabole a pour mesure $\frac{4}{3}$, ou est les $\frac{4}{3}$ du triangle inscrit.

Sinon il est soit supérieur, soit inférieur à $\frac{4}{3}$. Qu'il soit d'abord supérieur. Désignons-le par Σ, et posons $\Sigma = \frac{4}{3} + U$.

Inscrivons dans le segment une suite de triangles telle que $\Sigma - S_n < U$, ce qui est toujours possible. Alors $\Sigma < S_n + U$. Mais $S_n < \frac{4}{3}$, donc $\Sigma < \frac{4}{3} + U$, ce qui est absurde.

Supposons donc Σ inférieur à $\frac{4}{3}$ et posons $\Sigma = \frac{4}{3} - V$.

Inscrivons dans le segment une suite de triangles telle que le dernier terme ajouté, $\frac{1}{4^n}$, soit inférieur à V. Alors, comme $\Sigma + V = \frac{4}{3}$, S_n étant inférieur à Σ, $S_n + V < \frac{4}{3}$, ou $\frac{4}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{4^n} + V < \frac{4}{3}$, ou etc ..."

Cependant il a fallu attendre 2000 ans pour que l'humanité puisse digérer correctement ces découvertes. L'élaboration du calcul différentiel et intégral, reprise sous la Renaissance, s'effectue au 17ème siècle. (*Cavalieri, Fermat, Newton, Leibnitz*,etc.).

Puis, au XVIIIème siècle, les mathématiciens exploitent intensivement l'instrument (Bernoulli, Euler, Lagrange, Laplace, etc...). Ainsi, on avait déjà parfaitement compris les notions fondamentales d'analyse bien *avant d'être capable de les énoncer.*

Cette dernière étape linguistique n'a été franchie qu'au XIXème siècle, notamment par *Cauchy*, grâce à ses formulations en ϵ.

Cet aperçu historique prouve que la compréhension de la notion de limite ne se réduit pas à une question de langage.

Il est souhaitable que nos élèves aient *compris* ce qu'est une *limite* bien avant d'assimiler les formulations à la Cauchy.

III L'analyse épistémologique de la notion de limite

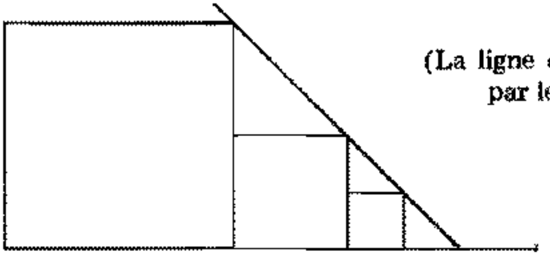
Sans prétendre à un inventaire exhaustif, signalons quelques seuils que l'élève devra franchir* .

A "*S'approcher de la limite d'aussi près que l'on voudra*"

Nous avons eu la chance d'écouter un exposé, à la Régionale de l'A.P.M., où un jeune instituteur racontait la découverte de la notion de limite par des écoliers du Cours Moyen.

* D'autres considérations sur l'enseignement de l'analyse se trouvent dans H. FREUDENTHAL — Mathematics as an Educational Task — Reidel Dordrecht 1973.

Le thème proposé par Madame Gilberte PEROT était l'étude de la figure :



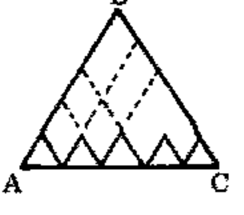
(La ligne oblique a été inventée par les enfants eux-mêmes)

Les écoliers ont parfaitement saisi ce que d'Alembert explique dans le texte que nous citons maintenant :

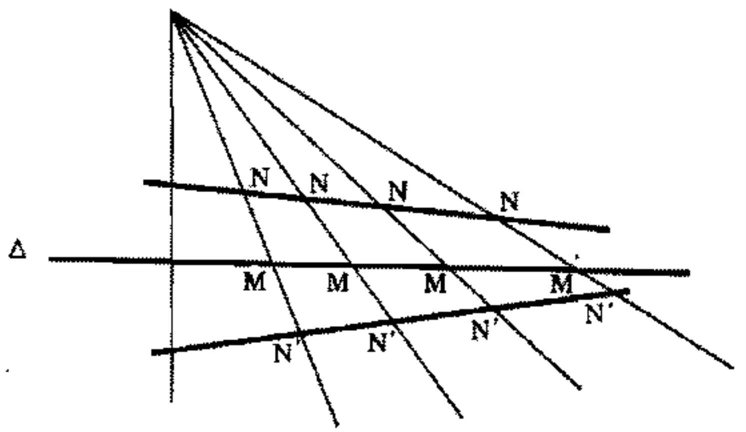
"Supposons cette suite de nombres fractionnaires à l'infini, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$, &c. & ainsi de suite en diminuant toujours de la moitié : les Mathématiciens disent & prouvent que la somme de cette suite de nombres, si on la suppose poussée à l'infini, est égale à 1. Cela signifie, si on veut ne parler que d'après des idées claires, que le nombre 1 est la *limite* de la somme de cette suite de nombres c'est-à-dire, que plus on prendra de nombres dans la suite, plus la somme de ces nombres approchera d'être égale à 1, & *qu'elle pourra en approcher aussi près qu'on voudra*. Cette dernière condition est nécessaire pour compléter l'idée attachée au mot *limite*. Car le nombre 2, par exemple, n'est pas la limite de la somme de cette suite, parce que, quelque nombre de termes qu'on y prenne, la somme à la vérité approchera toujours de plus en plus du nombre 2, mais ne pourra en approcher aussi près qu'on voudra, puisque la différence sera toujours plus grande que l'unité."

Un exercice instructif de niveau comparable est l'étude de la suite des "dents de scie" dessinée ci-dessous.

La suite des lignes brisées "tend, en un certain sens, vers le segment AC". Mais la longueur reste constante : elle est égale à AB + AC = 2AC.



Une autre manipulation précoce concerne le tracé de la *conchoïde de Nicomède.*



M décrit la droite Δ et les segments MN (resp. MN') gardent une même longueur.

Lorsque M s'éloigne sur la droite, la distance de N à Δ tend vers 0 sans jamais s'annuler.

Un jeune enfant peut constater tout seul que le point N s'approche indéfiniment de la droite Δ sans jamais l'atteindre.

La découverte du phénomène des *asymptotes*, si surprenant pour celui qui n'est pas encore initié, est une expérience très importante.

Elle peut précéder de plusieurs années l'aptitude à exprimer ce phénomène dans les formes requises, bien avant l'étude de la fonction homographique.

B *Une suite n'a pas nécessairement une limite*

Nos élèves ne tirent aucun bénéfice des définitions comportant la locution "*si elle existe...*" s'ils n'ont pas acquis au préalable un stock de souvenirs concernant l'existence ou l'inexistence.
On fera donc étudier beaucoup d'exemples analogues à

$$U_n = \frac{2 + (-1)^n n}{n + 1}$$

Je signalerai ici une expérience pédagogique que j'ai renouvelée avec des élèves du DEUG (option heuristique).

"Soit x un nombre réel fixe tel que $0 < x < 1$. On demande de décrire l'ensemble des nombres $(1 - x^n)^m$ où n et m décrivent l'ensemble des nombres entiers".

En une heure et demie, ces étudiants ont découvert, par eux-mêmes, les phénomènes de *densité*, de *bornes* (supérieures et inférieures) dont on ne leur avait pas encore parlé en cours.

Les connaissances préalablement requises ne dépassent pas la familiarité avec la suite géométrique. Cet exemple de pédagogie paradigmique ("Das Exemplarische Unterricht" inspiré de Martin WAGENSCHEIN) montre comment on peut préparer les élèves à comprendre une synthèse magistrale.

C *L'éducation de la rigueur*

L'élève doit être mis très tôt en présence de situations élémentaires où les propriétés algébriques des sommes finies ne s'étendent pas à des sommes infinies.

Voici un merveilleux exercice dû à CARATHEODORY.
Observons le tableau numérique infini suivant :

$$\begin{array}{|ccccccc}
0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \cdots & \cdots \\
-\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \cdots & \cdots \\
-\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \cdots & \cdots \\
-\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

On demande d'étudier la somme de tous ces nombres.

L'élève doit découvrir qu'en opérant d'abord par lignes (resp. par colonnes) puis en sommant les résultats, il trouvera $+ 2$ (resp. $- 2$). D'autres groupements "diagonaux" fournissent une somme nulle.

Bref, on se trouve dans une situation où l'associativité est en défaut.

Cette étape (éventuellement avec d'autres exercices) est indispensable à la plupart des individus pour *l'éducation de la rigueur* : si l'élève constate que des résultats plausibles, mais non démontrés, sont fréquemment faux, il admettra la nécessité de procéder à des démonstrations méticuleuses.

Par contre, le parachutage de la rigueur dont la nécessité n'est pas ressentie par les élèves est une faute pédagogique grave.

Heureusement, nous disposons de tout le matériel didactique nécessaire pour l'éviter (*). Un soin particulier sera apporté aux exemples où l'élève n'utilise qu'une partie d'un double-théorème dont l'énoncé comporte la locution "Une condition nécessaire et suffisante..." (ou "il faut et il suffit..." etc...).
Il faut apprendre à distinguer un énoncé de sa réciproque.

D *Majorer et minorer*

La compréhension de l'analyse exige une familiarité avec le mode d'emploi de la *valeur absolue* et de *l'inégalité du triangle*.

L'emploi de majorations et de minorations permet d'expliquer *rigoureusement* des phénomènes d'approximation *sans aucune phraséologie savante* :

Exemple 1 :

Remarquons que $\dfrac{2x+5}{x+1} = 2 + \dfrac{3}{x+1}$

Or $(x > 3000) \Rightarrow \left(\dfrac{3}{x+1} < \dfrac{3}{x} < \dfrac{1}{1000}\right)$

Donc 2 est une valeur approchée à moins de $\dfrac{1}{1000}$ près de la fraction $\dfrac{2x+5}{x+1}$ dès que $x > 3000$.

Exemple 2 :

Le nombre e défini par la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$ est irrationnel.

(Ce théorème est dû au mathématicien alsacien Lambert).

En effet, s'il était de la forme $\dfrac{p}{q}$ (avec $p \in N$ et $q \in N^*$) alors on aurait :

$$q\,!\ \frac{p}{q} - q\,!\ \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!} = q\,!\ \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Le premier membre serait un entier et le second membre inférieur à l'unité, comme le montre une majoration facile.

(*) Cf. Le livre du Problème — Fascicule 4 — La convexité

On peut alors dégager la méthode suivante :

En analyse, on découpe souvent les expressions E que l'on veut étudier en deux termes :

$$E = D + R$$

D est le "*développement*" qui se prête à un calcul aisé et R est le "*reste*" qui est "compliqué" mais "petit".

Le développement *se calcule*, mais le reste R (ou l'erreur) ne se calcule pas : *on le majore.*

A ce propos, on insistera sur la grande marge de manoeuvre dont on dispose pour majorer lorsque l'objectif est d'obtenir un résultat aussi simple que possible.

Mais parfois, il arrive que l'estimation a été trop grossière et que l'on ne peut plus conclure. Il faut alors "rectifier le tir" grâce à une estimation plus fine.

Ce genre d'aptitude ne s'acquiert qu'en décortiquant complètement des exemples types : c'est la vertu de "L'exemplarische Unterricht" de Martin WAGENSCHEIN déjà cité.

A titre d'exemple, on pourra chercher la limite de la suite de la somme des inverses des coefficients du binome :

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} + 1 \quad , \quad S_3 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 1 \quad , \quad S_4 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + 1$$

Dans certaines majorations, il faut apprendre à conserver avec soin certains termes significatifs, quitte à opérer des estimations très grossières de toutes les autres parties de l'expression.

Exemple 3 :

Pour démontrer la continuité de la fonction dans [2,3] $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, on majore l'expression

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\right| = \frac{\left|\sqrt{a^2+1} - \sqrt{x^2+1}\right|}{\sqrt{(x^2+1)(a^2+1)}} = \frac{\left|a^2 - x^2\right|}{\sqrt{(x^2+1)(a^2+1)}\left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{a^2+1}\right)}$$

en prenant soin de ne pas détruire "*la poule aux oeufs d'or*" $|a^2 - x^2|$ (ou $|a - x|$), pour aboutir à une estimation de la forme $K \times |a - x|$. Majorer $|a - x|$ par 6 serait correct, mais inutilisable.

E *Le nécessaire et le suffisant*

C'est généralement en Analyse que nos élèves sont confrontés avec un mode de raisonnement qui leur cause de grandes difficultés ; c'est le *raisonnement par raison suffisante.*

Je reproduis ici quelques lignes de mon livre "Mathématiques pour l'Elève-Professeur" 2ème édition.

"Il s'agit de jeter un pont de moyens termes entre l'hypothèse $\mathcal{H}$ et la conclusion $\mathcal{C}$.

On peut, pour cela, *raisonner par conditions nécessaires*, c'est-à-dire rechercher systématiquement des conséquences de $\mathcal{H}$: $\mathcal{H} \Longrightarrow \mathcal{N}_1 \Longrightarrow \mathcal{N}_2$, etc. On peut aussi analyser le problème à l'envers... $\mathcal{S}_2 \Longrightarrow \mathcal{S}_1 \Longrightarrow \mathcal{C}$ et *raisonner par conditions suffisantes.*

Evidemment la meilleure méthode est de tenter ces investigations par les deux extrémités.

On a observé que nos élèves abordent moins spontanément la recherche des raisons suffisantes et y réussissent moins bien. Que l'on songe cependant au rôle de la technique de majoration en analyse mathématique et l'on comprendra qu'un effort pédagogique particulier s'impose pour développer l'aptitude à raisonner par conditions suffisantes.

Exercice 2.VII.5. Analyser une démonstration typique d'analyse comportant quelques majorations successives et un découpage judicieux des ϵ. Mettre en évidence la recherche des conditions suffisantes.

Exercice 2.VII.6.

Au jeu du piquet de cheval, chaque joueur ajoute alternativement un nombre entier strictement positif, inférieur ou égal à 10, au total obtenu. Le gagnant est celui qui dit 100. Pour pouvoir dire 100 (resp. 89 resp. 78) *il suffit* de dire 89 (resp. 78 resp. 67...) "

Par exemple, pour que $|U_n + V_n|$ soit inférieur à $\frac{1}{100}$ il suffit que chacun des $|U_n|$ et $|V_n|$ soit inférieur à $\frac{1}{7000}$.

Cette technique de découpage des ϵ, dans laquelle le mathématicien dispose d'une grande marge de manoeuvre, cause beaucoup de difficultés au débutant.

On pourrait préparer les jeunes élèves beaucoup plus tôt à ce genre de situation en leur faisant pratiquer des jeux où *il suffit* de trouver de "bons coups" pour gagner sans que la stratégie gagnante soit forcément unique.

Citons encore l'exercice relatif à la limite de la suite $U_n = \dfrac{\cos n}{\sqrt{n}}$.

Pour que U_n soit inférieur à $\dfrac{1}{1000}$, *il suffit* que n soit supérieur à 1 000 000. Or, cos 1 000 000 est difficile à calculer : il se peut que, par hasard, $\dfrac{\cos 1\,000\,000}{1\,000}$ soit beaucoup plus petit que ce qu'on a exigé.

Inutile de la calculer : *il suffit* de connaître le résultat grossier :

$$|\cos 1\,000\,000| < 1$$

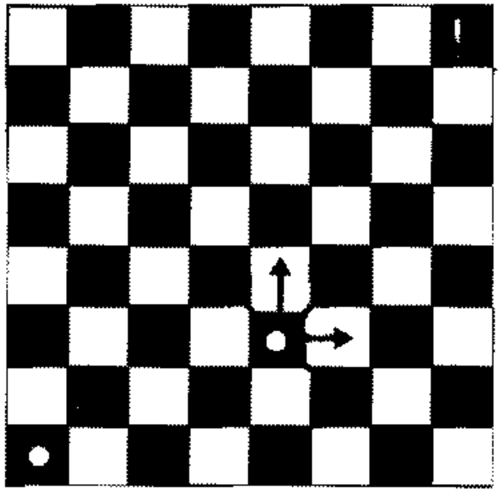
Autrement dit, il faut apprendre à l'élève à *perdre volontairement de l'information* : c'est une démarche fondamentale en mathématique qui ne s'acquiert pas toujours spontanément.

L'enchaînement au maniement des conditions suffisantes est une étape indispensable de l'éducation mathématique. La pratique du cours magistral masque complètement cette difficulté pédagogique. Pour que la leçon soit correcte, *il suffit* que le professeur ait compris et que les élèves répètent docilement.

A la demande des participants du stage, nous donnons encore deux exemples qui s'analysent aisément "à l'envers" (c'est-à-dire "par conditions suffisantes").

Exemple 1 : (traduit du russe, d'après KBAHT n° 1 — 1971)

Un pion se trouve initialement sur la case en bas et à gauche d'un échiquier. Deux joueurs déplacent ce pion alternativement. Le gagnant est celui qui parvient à placer ce pion sur la case diagonalement opposée, en haut et à droite. Les seuls coups autorisés sont désignés par les flèches du dessin ci-dessous :



Comment doit jouer le premier joueur pour gagner contre toute défense ?

Exemple 2 :

"Trois personnes jouent ensemble. A la première partie, la première personne perd au profit des deux autres autant d'argent que chacune d'elles en possède. A la deuxième partie, la deuxième personne perd au profit des deux autres autant d'argent qu'elles en ont à présent. Enfin, à la troisième partie, la première et la deuxième personnes gagnent chacune sur la troisième autant d'argent qu'elles en avaient avant. La partie se termine alors et les joueurs découvrent qu'ils ont tous une somme égale, soit 24 louis chacun. On demande combien chacun avait d'argent en venant jouer" (Euler).

F *La quantification*

L'expérience révèle que l'on éprouve des difficultés à comprendre des situations en $\forall \epsilon \quad \exists \alpha$.

Un bon maniement des quantificateurs repose sur une familiarité avec les nuances linguistiques traduites par des locutions telles que "Pour tout..." "Quel que soit..." "Aucun..." "Nul..." "N'importe quel..." "Toujours..." "Jamais..." "Parfois..."

La symbolisation de ces nuances à l'aide des signes $\forall$ et $\exists$ apporte une aide efficace à condition que ces signes soient vraiment "opérationnels pour l'élève".

Il s'agit donc de *s'en servir* souvent, efficacement et d'éviter d'en parler d'une façon pédante et inutile. Signalons que si les quantificateurs représentés par des signes apparaissent déjà chez le logicien Georges BOOLE en 1847 (avec d'autres signes typographiques), leur usage dans des articles de recherche en analyse ne se répand qu'à partir de 1960 comme on le constate en feuilletant des numéros du bulletin de la S.M.F.

G *La situation ludique*

La dialectique des $\forall \epsilon \quad \exists \alpha$ s'apparente à une situation de jeu. "Mon adversaire exige une précision inférieure à $\frac{1}{100}$ près ; à moi de jouer ! Je dois donc trouver un α qui relève le défi.

Si mon adversaire avait "joué" $\frac{1}{1\,000\,000}$, et j'aurais dû trouver un α plus raffiné.

Ainsi, la notion de limite introduit la découverte d'une *riposte* appropriée, *contre toute défense de l'adversaire.*

La compréhension de la situation ludique est hautement favorisée par une pratique du calcul numérique approché. Elle peut se développer dès la Quatrième à propos des encadrements de nombres réels.

H *Heuristique de la limite*

La démonstration d'un théorème sur les limites se présente, dans la pratique, sous trois formes.

a) Parfois, il est indiqué de *deviner* la valeur de la limite (ce qui s'obtient généralement par des manipulations numériques ou encore par l'observation intelligente d'une courbe représentative). Ce n'est qu'ensuite qu'il convient de prouver le résultat.

b) Dans d'autres cas, on applique des formules algébriques connues, pour déduire des limites à partir de résultats précédents.

Par exemple : si l'on sait que les suites U_n et V_n tendent respectivement vers 2 et 3, on pourra *calculer* la limite de $W_n = \frac{\sqrt{U_n} - \sqrt{V_n}}{\sqrt{U_n + V_n}}$.

c) Enfin, les élèves néophytes sont surpris lorsque l'on démontre l'existence d'une limite sans chercher à connaître au préalable la valeur de cette limite : c'est ainsi que l'on introduit des nombres réels nouveaux, grâce à des intervalles emboîtés, des coupures ou des suites de Cauchy.

La compréhension de cette approche exige une éducation mathématique adaptée.

IV La formulation

Un élève qui aurait franchi la plupart des obstacles qui viennent d'être décrits n'éprouvera pas de difficulté à décrypter la formulation de Cauchy. Celle-ci n'est hermétique que pour ceux qui ne savent pas d'avance de quoi il s'agit !

Mais, au contraire, le "parachutage" prématuré de l'énoncé définitif sera un grave handicap qui gênera la compréhension de l'élève. En plus des difficultés énumérées au paragraphe précédent, il aura à vaincre des subtilités de langage.

Lorsque l'élève aura compris la définition (à la Cauchy) de la limite d'une suite, il sera confronté à un *problème trivial* lorsqu'il passera à la description des *fastidieuses variantes* : passage de la limite à la continuité, limite vers $+\infty$, limite lorsque x tend vers x_0, par valeurs réelles, rationnelles, à gauche, à droite, par valeurs différentes de x_0, etc.

L'emploi du *langage des filtres* apporte un *soulagement certain* au professeur, qui veut s'éviter de répéter cette liste fastidieuse et reprendre essentiellement les mêmes résultats dans des contextes légèrement différents. Mais *ce langage n'est d'aucun secours pour les élèves.* Aucun des obstacles que nous avons énumérés précédemment n'est levé par l'emploi des filtres : à de *véritables difficultés* s'ajoute l'apprentissage d'une terminologie inhabituelle.

V Faut-il utiliser des filtres ?

Avant d'en parler, on pourrait peut-être s'interroger sur les motifs qui ont amené Henri Cartan et Bourbaki à introduire les filtres en 1937.

Assurément, ce n'était pas pour permettre d'exposer l'Analyse en termes savants ! En fait, l'introduction des filtres résout des problèmes précis, qui interviennent dans la topologie des espaces qui ne sont pas métrisables. La situation la plus élémentaire, où l'on peut exhiber l'insuffisance du passage à la limite par des suites dénombrables, se présente à propos de la "convergence simple" des fonctions : elle est liée à la théorie des classes de Baire.

Il est donc impossible de présenter à des étudiants des premiers cycles de l'Université des exemples qui illustrent la supériorité des filtres sur les suites. A plus forte raison, la maîtrise du langage des filtres ne permettra à aucun lycéen de résoudre un problème qu'il ne pourrait résoudre plus simplement. Faut-il lui faire acquérir un outil dont il n'aura jamais l'occasion de se servir ? Ce serait *encourager un pédantisme* de mauvais aloi.

Seuls quelques analystes professionnels ont quelquefois l'occasion d'exploiter cet outil : en ce qui me concerne, cela m'est arrivé trois fois, en vingt cinq ans de recherche mathématique.

Bien entendu, chaque professeur est libre du choix de sa pédagogie.

Soyons donc tolérants vis-à-vis de toutes les innovations qu'un enseignant expérimente de bonne foi.

Mais je ne suis pas le seul à trouver saugrenu d'introduire — toute affaire cessante — les filtres dans l'enseignement secondaire, tout comme je trouve ridicule d'utiliser les *tribus* pour présenter les rudiments de calcul des probabilités sur des ensembles finis, ainsi que d'essayer d'enseigner le *langage des catégories* à l'école élémentaire. Ce n'est pas uniquement en raffinant le langage que l'on rénovera l'enseignement de l'Analyse : c'est une meilleure connaissance des mécanismes de compréhension des élèves qui permettra de franchir le pas décisif.