

Et pan dans le mille !

par J. DHOMBRES, I.R.E.M. de Nantes

A propos de l'un de ces stands de tir où l'on gagne de grosses poupées roses entre deux effluves de frites ou de gaufres, je ne parlerai pas de mon score, pour éviter de susciter crainte ou espoir de me provoquer, mais de la remarque du bonimenteur. "Le tir était remarquablement réparti". Qu'est-ce à dire ?

Partons donc de n points, M_1, M_2, \dots, M_n , du plan euclidien, repérés par leurs affixes complexes, disons z_1, z_2, \dots, z_n . Une première idée est de considérer l'isobarycentre G , à savoir le point d'affixe z_G défini par

$$z_G = \frac{z_1 + \dots + z_n}{n} \quad (1)$$

Une deuxième idée consiste à envisager s'il existe un point M dont l'affixe z_M réalise un certain minimum, à savoir

$$\sum_{i=1}^n |z_M - z_i| = \inf_{z \in \mathbb{C}} \left(\sum_{i=1}^n |z - z_i| \right) \quad (2)$$

Une troisième idée consiste à chercher s'il existe un point C , centre d'un disque de rayon minimal et contenant les n points M_1, M_2, \dots, M_n . Analytiquement, nous pouvons encore traduire ceci par un certain minimum. Pour tout z de \mathbb{C} on définit

$$d(z) = \sup_{i=1, \dots, n} |z - z_i|$$

et $\delta = \inf_{z \in \mathbb{C}} d(z)$ où la borne inférieure est prise sur tout le plan complexe.

Le point C d'affixe z_c devrait alors satisfaire

$$d(z_c) = \delta \quad (3)$$

Par ces quelques notes, nous allons vagabonder autour de ces trois idées, les rattacher à des notions connues, imaginer des généralisations, bref baguenauder. Le fond des démonstrations restera très simple et si le jargon mathématique non redéfini paraît pédant à certains, ils pourront vérifier que ce jargon n'intervient qu'en vue d'énoncer des généralisations pour faire le pont avec les théories peut-être déjà étudiées par le lecteur au cours de sa carrière universitaire. Pour la commodité du lecteur on a d'ailleurs noté J (comme *jargon*) en marge des passages non essentiels.

Cas du barycentre

L'existence et l'unicité de z_G sont bien évidentes. Une généralisation naturelle conduit à associer des masses α_i ($i = 1, \dots, n$) aux points z_1, z_2, \dots, z_n de sorte que

$$\alpha_i > 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$$

On considère alors le barycentre défini par l'affixe :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i z_i$$

et chacun sait que l'ensemble des barycentres ainsi obtenu coïncide avec le plus petit convexe contenant les n points z_1, z_2, \dots, z_n . Un pas de plus dans la généralisation consiste à envisager, non plus une famille finie de points, mais un ensemble E plus riche, un continu par exemple. La théorie de l'intégration par rapport à une mesure permet d'envisager des expressions du type

$$z_G = \int_E z \, d\alpha(z) \quad (1 \text{ bis})$$

où α est une mesure de Radon positive telle que $\int_E d\alpha(z) = 1$. A ce niveau, E peut ne plus être un sous-ensemble du plan complexe mais un sous-ensemble universellement mesurable d'un espace C^n ou R^n . On démontre encore que z_G appartient au plus petit convexe fermé contenant tous les points de E et que réciproquement tout point de ce dernier ensemble peut être obtenu comme un z_G .

La cinématique avec les centres de gravité, ou les probabilités avec les moments, nous ont familiarisés avec des expressions du type (1 bis) (cf. par exemple [1] W. RUDIN).

Cas du point M

L'existence d'un point M n'est guère difficile à établir puisque la fonction définie sur C par

$$z \longmapsto \sum_{i=1}^n |z - z_i| = f(z)$$

est continue : on a même l'inégalité déduite de l'inégalité triangulaire

$$|f(z) - f(z')| \leq n |z - z'|$$

En outre

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} f(z) = +\infty$$

Donc la borne inférieure $\inf_{z \in C} f(z)$ est égale à la borne inférieure $\inf_{|z| \leq R} f(z)$ pour un R assez grand. Mais comme le disque fermé de centre O et de rayon R est compact, la fonction continue f atteint son minimum en au moins un point z_0 de ce disque :

$$\inf_{z \in C} f(z) = f(z_0)$$

L'unicité du point M exige une analyse un peu plus étoffée. Appelons K le sous-ensemble non vide des points de C où f atteint son minimum. C'est évidemment un sous-ensemble fermé et borné de C , donc compact. Plus intéressante est la propriété de *convexité* de K :

Si Z et Z' sont dans K , $\lambda Z + (1 - \lambda) Z'$ est encore dans K et ce pour tout λ satisfaisant $0 \leq \lambda \leq 1$ (Géométriquement, le segment joignant Z à Z' appartient tout entier à K pour Z et Z' dans K). En effet :

$$f(\lambda Z + (1 - \lambda) Z') = \sum_{i=1}^n \left| \lambda(Z - z_i) + (1 - \lambda)(Z' - z_i) \right|$$

Soit :

$$\begin{aligned} f(\lambda Z + (1 - \lambda) Z') &\leq \lambda \sum_{i=1}^n |Z - z_i| + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^n |Z' - z_i| \\ &\leq \lambda f(Z) + (1 - \lambda) f(Z') \\ &\leq (\lambda + 1 - \lambda) f(z_0) = f(z_0) \end{aligned}$$

L'inégalité stricte ne pouvant avoir lieu, toutes les inégalités précédentes deviennent des égalités. En particulier, pour tout i variant entre 1 et n , on a

$$\left| \lambda(Z - z_i) + (1 - \lambda)(Z' - z_i) \right| = |\lambda(Z - z_i)| + |(1 - \lambda)(Z' - z_i)| \quad (4)$$

Par suite $(Z - z_i)$ et $(Z' - z_i)$ sont sur une même demi-droite, c'est-à-dire qu'il existe des nombres α_i, β_i positifs ou nuls et $\alpha_i(Z - z_i) = \beta_i(Z' - z_i)$ avec $\alpha_i + \beta_i > 0$.

Soit :

$$\alpha_i Z - \beta_i Z' = (\alpha_i - \beta_i) z_i$$

S'il existe un indice i pour lequel $\alpha_i = \beta_i$, on déduit aussitôt $Z = Z'$. On peut alors supposer que $\alpha_i \neq \beta_i$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, auquel cas tous les points z_i doivent être situés sur la droite passant par Z et Z' ; on est ramené à un problème rectiligne analogue et on pourra supposer $Z = z_1$ et $Z' = z_1$ réels. On note alors que dans ce cas $Z = z_1$ et $Z' = z_1$ ont même signe, c'est-à-dire qu'il existe des ϵ_i ($\epsilon_i = \pm 1$) pour lesquels

$$|Z - z_i| = \epsilon_i(Z - z_i) \quad ; \quad |Z' - z_i| = \epsilon_i(Z' - z_i)$$

d'où :

$$\sum_{i=1}^n \epsilon_i(Z - z_i) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i(Z' - z_i)$$

Soit :

$$(Z - Z') \left(\sum_{i=1}^n \epsilon_i \right) = 0$$

Si n est impair, $\sum_{i=1}^n \epsilon_i$ est toujours différent de 0 et par

suite $Z = Z'$. Par contre, si n est pair, on ne peut rien conclure. D'ailleurs en prenant $z_1 = 0$ et $z_2 = 1$, on constate que tous les points situés entre 0 et 1 réalisent le minimum de $|x| + |1-x|$. On peut alors énoncer l'amusant *théorème* : *Soient z_1, z_2, \dots, z_n n points du plan complexe. Supposons que ces points ne soient pas alignés ou que n soit impair. Il existe alors un unique point M d'affixe z_M tel que*

$$\sum_{i=1}^n |z_M - z_i| = \inf_{z \in \mathbb{C}} \left(\sum_{i=1}^n |z - z_i| \right)$$

On peut généraliser ce dernier cas en supposant que z_1, z_2, \dots, z_n sont n points d'un espace normé X sur le corps des réels ou des complexes et en cherchant z_M tel que

$$\sum_{i=1}^n \|z_M - z_i\| = \inf_{z \in X} \left(\sum_{i=1}^n \|z - z_i\| \right) \quad (2 \text{ bis})$$

J Bien que des résultats nettement plus généraux soient accessibles, nous nous contenterons de supposer X préhilbertien, c'est-à-dire de supposer qu'il existe un produit scalaire \langle, \rangle sur X de sorte que pour tout z de X

$$\|z\|^2 = \langle z, z \rangle$$

L'unicité de z_M , sous les mêmes conditions, suit la même démonstration que précédemment grâce à la remarque :

(5) $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ si et seulement s'il existe des coefficients α, β positifs ou nuls tels que

$$(\alpha + \beta > 0) \quad \text{et} \quad \alpha x = \beta y$$

En effet, si l'égalité (5) est vraie, on doit avoir en élevant au carré (1)

$$\operatorname{Re} \langle x, y \rangle = \|x\| \|y\|$$

Dont on déduit, puisqu'en général

$$\operatorname{Re} \langle x, y \rangle \leq |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

que $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\|$

et donc facilement le résultat en étudiant la forme

$$\lambda \mapsto \lambda^2 \|y\|^2 + 2\lambda \langle x, y \rangle + \|y\|^2 = \|x + \lambda y\|^2 \geq 0$$

(dans le cas où E est pris sur le corps des réels pour fixer les idées).

L'existence de z_M requiert une astuce puisque la boule unité de X n'a plus de propriété de compacité. Cependant, soit z un point n'appartenant pas au sous-espace vectoriel E engendré par les n points z_1, z_2, \dots, z_n de X . On sait qu'il existe un point z_p , projection orthogonale de z sur E et tel que pour tout z' de E on ait grâce au théorème de Pythagore

$$\|z - z_p\|^2 + \|z_p - z'\|^2 = \|z - z'\|^2$$

Donc l'inégalité

$$\|z_p - z'\| \leq \|z - z'\| \quad \text{pour tout } z' \text{ de } E$$

D'où en particulier

$$\sum_{i=1}^n \|z_p - z_i\| \leq \sum_{i=1}^n \|z - z_i\|$$

Par suite

$$\inf_{z \in X} \left(\sum_{i=1}^n \|z - z_i\| \right) = \inf_{z \in E} \left(\sum_{i=1}^n \|z - z_i\| \right)$$

Comme E est de dimension finie, l'argument de compacité réapparaît.

(1) "Re" signifiant "Partie réelle de".

Une autre généralisation consiste à modifier la nature de la somme envisagée. On peut prendre par exemple

$$\left(\sum_{i=1}^n \|z-z_i\|^2 \right)^{1/2}$$

voire plus généralement toute expression où 2 est remplacé par un nombre réel p ($p > 1$)

$$d_p(z) = \left(\sum_{i=1}^n \|z-z_i\|^p \right)^{1/p}$$

Restons dans le plan complexe $X = \mathbb{C}$ pour simplifier. Le lecteur constatera que les démonstrations précédentes restent valables, mutatis mutandis, et fournissent un point unique $M^{(p)}$. On utilisera une inégalité dite de Minkowski :

$$\left(\sum_{i=1}^n |z_1+z'_1|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |z'_i|^p \right)^{1/p} \quad (6)$$

L'égalité ayant lieu si et seulement si $\alpha z_i = \beta z'_i$ pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\alpha + \beta > 0$ lorsque $p > 1$. Pour $p = 2$, le point $M^{(2)}$ est l'isobarycentre des n points M_1, M_2, \dots, M_n .

En faisant tendre p vers l'infini, on montre sans peine que l'expression $d_p(z)$ tend vers

$$d(z) = \sup_{i=1, \dots, n} |z-z_i|$$

ce qui nous amène au dernier cas.

Cas du point C

Appelons A l'ensemble constitué par les points z_1, z_2, \dots, z_n et notons

$$d(z) = \sup_{z' \in A} |z-z'|$$

Il est bien clair, puisque A est un ensemble borné, que $d(z)$ est un nombre fini pour tout z de \mathbb{C} . L'existence d'un point z_c tel que

$$d(z_c) = \inf_{z \in \mathbb{C}} d(z) = \delta$$

peut se démontrer comme pour l'existence du point M par un argument de continuité sur un compact. Toutefois, je préfère une analyse plus percutante qui va fournir simultanément l'existence et l'unicité de C .

D'abord, partons d'une remarque de calcul bien facile.

(7) Si z et z' sont deux nombres complexes de module inférieur ou égal à 1, on a l'inégalité

$$\left| \frac{z + z'}{2} \right|^2 \leq 1 - \left| \frac{z - z'}{2} \right|^2$$

Pour chaque entier $n \geq 1$, puisque δ est une borne inférieure, il existe un nombre complexe noté $z^{(n)}$ tel que

$$d(z^{(n)}) \leq \delta + \frac{1}{n}$$

Montrons que la suite $\{z^{(n)}\}_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy de nombres complexes ; c'est-à-dire que nous avons l'implication suivante :

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier N et pour tous entiers n, m , supérieurs ou égaux à N , on a

$$|z^{(n)} - z^{(m)}| < \epsilon$$

Raisonnons par l'absurde en supposant que la suite ne soit pas de Cauchy. Par suite, il existe un nombre $\epsilon > 0$ et pour toute valeur entière de N , on peut trouver deux entiers n et m qui dépendent de N ($n \geq N$; $m \geq N$), de sorte que $|z^{(n)} - z^{(m)}| \geq \epsilon$. Nous choisirons un N convenable un peu plus tard.

Dès lors, on remarque que pour tout z' (de A) on a la minoration

$$|(z^{(n)} - z') - (z^{(m)} - z')| \geq \epsilon$$

Donc, en posant :

$$\delta_{n,m}(z') = \text{Max} (|z^{(n)} - z'|, |z^{(m)} - z'|) \leq \delta + 1/n + 1/m$$

on minore selon

$$\left| \frac{z^{(n)} - z'}{\delta_{n,m}(z')} - \frac{z^{(m)} - z'}{\delta_{n,m}(z')} \right| \geq \frac{\epsilon}{\delta + 2}$$

Par suite, en utilisant (7)

$$\left| \frac{z^{(n)} + z^{(m)}}{2} - z' \right|^2 \leq 1 - \left(\frac{\epsilon^2}{4(\delta + 2)^2} \right) \delta_{n,m}^2(z')$$

Ce que l'on majore encore par

$$\left| \frac{z^{(n)} + z^{(m)}}{2} - z' \right|^2 \leq \left(1 - \frac{\epsilon^2}{4(\delta+2)^2} \right) \left(\delta + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right)^2 \leq \left(\delta + \frac{2}{N} \right)^2 \left(1 - \frac{\epsilon^2}{4(\delta+2)^2} \right)$$

En prenant N assez grand, l'expression du second membre est strictement inférieure à δ^2 , ce qui fournit une contradiction en passant à la borne supérieure au premier membre par rapport à z' :

$$d \left(\frac{z^{(n)} + z^{(m)}}{2} \right) < \delta$$

La suite $\{z^{(n)}\}_{n \geq 1}$ est donc de Cauchy dans C . Elle converge vers un z_c puisque C est un espace complet. On doit alors avoir

$$d(z_c) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(z^{(n)}) = \delta$$

Ce qui termine la démonstration de l'existence. L'unicité est évidente car si z_c et z'_c conviennent, la suite alternativement égale à z_c et z'_c doit être de Cauchy donc converger.

Cédons une fois encore à la tentation de généraliser. Il est clair que le même raisonnement convient pour tout sous-ensemble borné A et pour un espace normé X qui possède une propriété du type (7) et soit complet. On posera :

$$\left. \begin{aligned} d(z) &= \sup_{z' \in A} \|z - z'\| \\ \text{et } \delta &= \inf_{z \in X} d(z) \end{aligned} \right\} \quad (3 \text{ bis})$$

La bonne généralisation de la propriété (7) s'appelle *uniforme convexité* de X . Elle s'énonce :

(7 bis) *Il existe une fonction croissante $\delta :]0, 2] \rightarrow]0, 1]$ telle que pour tout couple (z, z') de points distincts de X avec $\|z\| \leq 1$ et $\|z'\| \leq 1$ on ait :*

$$\left\| \frac{z+z'}{2} \right\| \leq 1 - \delta(\|z-z'\|)$$

Les espaces préhilbertiens sont uniformément convexes comme on le constate en utilisant l'égalité du parallélogramme (d'ailleurs caractéristique de ces espaces) :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

C'est bien autour des propriétés de convexité que nous tournons depuis le début de cet article. Ainsi la propriété (4), d'ailleurs mise sous forme plus générale en (5), est cruciale pour la démonstration de l'unicité du point M. La propriété (5) peut s'énoncer sous forme équivalente

(5 bis) Si $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| \leq 1$ alors $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| = 1$ implique $x = y$.

Géométriquement, cette propriété signifie que le milieu de deux points distincts d'une boule d'un espace normé X ne peut être sur la sphère frontière de cette boule. Un espace normé possédant une telle propriété est dit *strictement convexe*.

C'est cette propriété qu'il faut évoquer pour le cas d'égalité dans (6) en établissant que, pour $p > 1$, l'espace \mathcal{R}_n^p est strictement convexe. (Rappelons que \mathcal{R}_n^p est l'espace \mathcal{C}^n muni de la norme $(|z_1|^p + \dots + |z_n|^p)^{1/p}$).

La propriété (7 bis) améliore la propriété de stricte convexité ; par suite, un espace uniformément convexe est strictement convexe.

Pour des compléments sur de telles notions et des applications au calcul d'extrémums, voir [2], [3] Dhombres.

Il est assez instructif de spécialiser plus ou moins les propriétés de l'espace géométrique euclidien pour effectuer de la géométrie en dimension infinie comme nous venons de le faire. On ne saurait toutefois terminer cet exposé sans des remarques de géométrie du triangle. (Voir [4] J. Dhombres pour un exemple de géométrie en dimension infinie).

Un exemple

Sur l'exemple de trois points M_1 , M_2 et M_3 formant un triangle non dégénéré du plan euclidien, nous allons interpréter géométriquement les points G, $M^{(p)}$ et C. Notons z_1 , z_2 et z_3 les affixes de M_1 , M_2 et M_3 .

G est le *centre de gravité* du triangle, point de rencontre des médianes du triangle.

$M^{(1)}$ est le *point de Fermat*. C'est l'unique point M, d'affixe z , réalisant le minimum de $|z-z_1| + |z-z_2| + |z-z_3|$. Il n'est pas difficile d'établir, lorsque tous les angles du triangle sont aigus, que le point $M^{(1)}$ se trouve à l'intersection des 3 droites issues de chaque sommet du triangle et joignant le sommet opposé du triangle équilatéral construit sur le côté opposé (et extérieur).

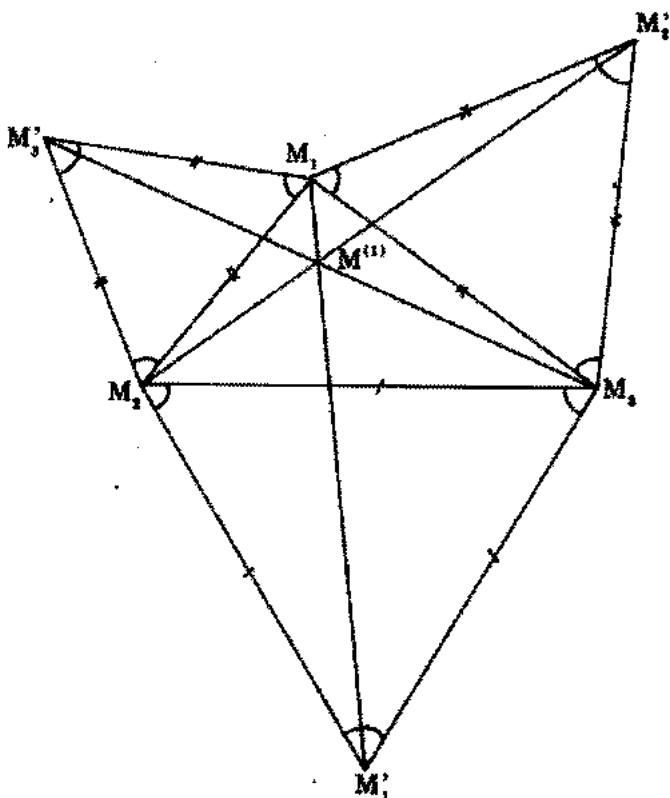


Fig. 1 : Construction du point de Fermat

$M^{(2)}$ est l'unique point M , d'affixe z , réalisant le minimum de $\sqrt{|z-z_1|^2 + |z-z_2|^2 + |z-z_3|^2}$. Il est classique de vérifier qu'il s'agit du centre de gravité G . On a en effet, pour tout M du plan :

$$|MM_1|^2 + |MM_2|^2 + |MM_3|^2 = 3 |MG|^2 + |GM_1|^2 + |GM_2|^2 + |GM_3|^2$$

Point C (ou encore $M^{(\infty)}$)

C'est le centre du disque de plus petit rayon contenant M_1 , M_2 et M_3 . On remarque que le diamètre d'un tel disque est au moins égal au plus grand côté du triangle et que la circonférence d'un tel disque passe par au moins deux des trois points M_1 , M_2 , M_3 . On doit distinguer deux cas :

Si le sommet opposé au plus grand côté est obtus (ou droit), le cercle dont un diamètre est ce plus grand côté est le cercle cherché. Le point C est au milieu du plus grand côté. On note que, dans le cas d'un angle droit, C est le centre du cercle circonscrit (cf. figure 2).

Si le sommet opposé au plus grand côté est aigu, et donc si tous les angles sont aigus, on constate sans peine que C est sur la médiatrice de chaque côté, donc coïncide avec le centre du cercle circonscrit.

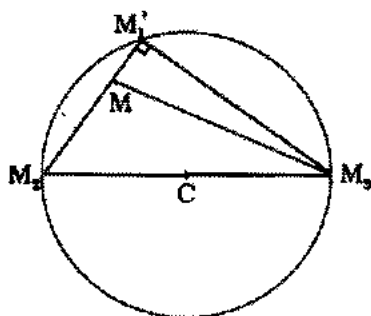


Fig. 2 : Construction de C : cas où l'angle en M_1 est obtus

Point de Lemoine

Ce point réalise une sorte de dual du point $M^{(2)}$.

On pose

$$\delta_{x_1, x_3}(z) = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} |z - (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_3)|^2$$

$$\text{et } \delta(z) = \delta_{x_1, x_2}(z) + \delta_{x_2, x_3}(z) + \delta_{x_3, x_1}(z)$$

Il existe un point qui minimise la somme $\delta_{(z)}$ des carrés des distances aux trois côtés d'un triangle. Ce point, dit point de Lemoine, est à l'intersection des trois symédianes. Nous ne donnerons pas ici de démonstration. Rappelons que la symédiane issue d'un sommet d'un triangle est la symétrique de la médiane par rapport à la bissectrice. Je ne céderai pas à la tentation de généraliser la notion de point de Lemoine en diverses directions.

Si la mode rétro continue de faire des ravages, je promets d'exposer à titre récréatif d'autres points remarquables et quelques relations géométriques.

J'apprécierai toutes références bibliographiques sur ces questions car je n'en possède aucune.

Conclusion

Revenons à la foire et au bonimenteur. Tout dépend de la notion de répartition choisie.

Celle de l'isobarycentre tient simultanément compte de la répartition en direction et en distance. On peut être piètre tireur et avoir le mille comme point central !

Celle du point $M^{(1)}$ ne tient compte que de la répartition en distance. Cela fait gagner des points.

Celle du point C me paraît celle de mon bonimenteur, car il utilisa une pièce de cent sous pour s'expliquer.

- [1] W. Rudin : Analyse complexe et réelle (397 p.), Masson, Paris, 1975.
- [2] J. Dhombres : Eléments d'analyse fonctionnelle (354 p.), ENSTA, Paris, 1973.
- [3] J. Dhombres : Méthodes mathématiques modernes utilisées en théorie de l'approximation (184 p.), ENSTA, Paris, 1974.
- [4] J. Dhombres : Propriétés géométriques et approximation des fonctions (14 p.), IREM de Nantes, 1975.

(Les volumes [2] et [3] sont aussi disponibles dans la collection *Nanta Iremica* à l'IREM de Nantes, Université de Nantes, BP 1044, 44037 Nantes Cedex).