La droite vectorielle des phases

par A. TISSIER et M. ZIRAH

A/ — Définition des phases ; espace vectoriel des phases

Les phases sont les homomorphismes continus du groupe $(\mathbf{R}, +)$ dans le groupe $(\mathcal{A}, +)$.

Précisons cette notion de continuité : l'application $\alpha \longmapsto (\mathrm{Cos}\,\alpha, \mathrm{Sin}\,\alpha)$ est une bijection de $\mathcal{A}$ sur le cercle trigonométrique qui permet de définir :

1) la distance de 2 angles : c'est la distance de leurs images respectives sur le cercle trigonométrique par cette bijection ;

2) la limite d'une suite d'angles : la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathcal{A}$ a pour limite l'angle β si et seulement si les suites $(\mathrm{Cos}\,\alpha_n)$ et $(\mathrm{Sin}\,\alpha_n)$ ont pour limites respectives $\mathrm{Cos}\,\beta$ et $\mathrm{Sin}\,\beta$;

3) la continuité des fonctions définies dans $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathcal{A}$: f est continue si et seulement si $\mathrm{Cos} \circ f$ et $\mathrm{Sin} \circ f$ sont continues.

Montrons qu'en fait un homomorphisme φ de $(\mathbf{R}, +)$ dans $(\mathcal{A}, +)$ est continu si $\mathrm{Cos} \circ \varphi$ est continu en 0.

En effet :

1) en raison de la continuité de la fonction : $u \longmapsto \sqrt{1-u^2}$ de $[-1, 1]$ dans $\mathbf{R}$, et comme $\mathrm{Cos}\,(\varphi(0)) = 1$:
$\lim_0 |\mathrm{Sin} \circ \varphi| = \lim_0 \sqrt{1 - \mathrm{Cos}^2 \circ \varphi} = 0$, donc $\lim_0 \mathrm{Sin} \circ \varphi = 0$

2) les formules d'addition de Cos et Sin permettent de montrer la continuité de $\mathrm{Cos} \circ \varphi$ et de $\mathrm{Sin} \circ \varphi$ en un réel x :

$$\lim_x \mathrm{Cos}\circ\varphi = \mathrm{Cos}(\varphi(x)) \lim_0 (\mathrm{Cos}\circ\varphi) - \mathrm{Sin}(\varphi(x)) \lim_0 (\mathrm{Sin}\circ\varphi) = \mathrm{Cos}(\varphi(x))$$
$$\lim_x \mathrm{Sin}\circ\varphi = \mathrm{Cos}(\varphi(x)) \lim_0 (\mathrm{Sin}\circ\varphi) + \mathrm{Sin}(\varphi(x)) \lim_0 (\mathrm{Cos}\circ\varphi) = \mathrm{Sin}(\varphi(x))$$

Soit φ et ψ deux phases ; on définit $\varphi + \psi$ par :

$$\forall\ x \in \mathbf{R} \qquad (\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x).$$

$\varphi + \psi$ est une phase car :

1) $\varphi + \psi$ est un homomorphisme de $(\mathbf{R}, +)$ sur $(\mathcal{A}, +)$:

$$\forall\ x \in \mathbf{R} \quad \forall\ y \in \mathbf{R} \quad (\varphi+\psi)(x+y) = \varphi(x+y) \ + \ \psi(x+y)$$
$$= \varphi(x) + \varphi(y) + \psi(x) + \psi(y) = (\varphi+\psi)(x) + (\varphi+\psi)(y)$$

2) $\mathrm{Cos} \circ (\varphi + \psi) = (\mathrm{Cos} \circ \varphi)(\mathrm{Cos} \circ \psi) - (\mathrm{Sin} \circ \varphi)(\mathrm{Sin} \circ \psi)$, est une application continue.

Soit Φ l'ensemble des phases. On vérifie aisément que $(\Phi, +)$ est un groupe abélien.

Soit φ une phase et λ un réel ; on définit $\lambda\varphi$ par :

$$\forall\, x \in \mathbf{R} \qquad (\lambda\varphi)(x) = \varphi(\lambda x).$$

$\lambda\varphi$ est une phase car :

1) $\lambda\varphi$ est un homomorphisme de $(\mathbf{R}, +)$ sur $(\mathcal{A}, +)$:

$\forall\, x \in \mathbf{R}\ \forall\, y \in \mathbf{R}\ (\lambda\varphi)(x+y) = \varphi(\lambda x + \lambda y) = \varphi(\lambda x) + \varphi(\lambda y)$
$= (\lambda\varphi)(x) + (\lambda\varphi)(y)$.

2) $\mathrm{Cos} \circ (\lambda\varphi)$ est continue en raison de la continuité de : $x \longmapsto \lambda x$ et de $\mathrm{Cos} \circ \varphi$.

Muni de ces deux lois, Φ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

B/ — Construction d'une phase non nulle

Dans la suite, l'angle nul, l'angle plat et l'angle droit positif sont respectivement notés $\mathcal{O}$, ϖ, δ.

Dans cette étude, on introduira un sous-groupe $(\mathbf{K}, +)$ de $(\mathbf{Q}, +)$, dense dans $\mathbf{R}$, et on montrera l'existence d'un homomorphisme f de $(\mathbf{K}, +)$ dans $(\mathcal{A}, +)$, non nul. On montrera ensuite l'existence d'une phase φ dont la restriction à $\mathbf{K}$ est f.

1°) *Etude d'une suite de $\mathcal{A}$*

Pour tout élément α de $\mathcal{A}$, l'ensemble des solutions dans $\mathcal{A}$ de l'équation $2x = \alpha$ est une paire $\{\beta, \beta + \varpi\}$. En outre, si α n'est pas nul, aucun de ces deux angles n'est $\mathcal{O}$ ni ϖ. Il en résulte que l'un de ces angles, et un seul, a son Sinus strictement positif. On construit alors la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ainsi :

$\alpha_0 = \varpi$;

$(\forall\, n \in \mathbf{N})\ ((2\alpha_{n+1} = \alpha_n)$ et $(\mathrm{Sin}\, \alpha_{n+1} > 0))$.

Il résulte immédiatement de cette définition que :

1) $\alpha_1 = \delta$

2) $\forall\, n \in \mathbf{N}_*\ 2^n\alpha_n = \varpi$ et $2^{n-1}\alpha_n = \delta$

3) $\forall\, n \in \mathbf{N}\ \ \forall\, p \in \mathbf{N}\ \ 2^p\alpha_{n+p} = \alpha_n$

2°) *Définition de K et de f*

Soit Γ la partie de $\mathcal{A}$ définie par :

$$\Gamma = \{\alpha \in \mathcal{A}^* \mid \exists\, n \in \mathbf{N} \quad \exists\, k \in \mathbf{Z} \quad \alpha = k\,\alpha_n\}$$

Soit n, n' dans **N**, et k, k' dans **Z** tels que : $\dfrac{k}{2^n} = \dfrac{k'}{2^{n'}}$

Si, par exemple, $n \leqslant n'$, alors $k' = k\,2^{n'-n}$ et $\alpha_n = 2^{n'-n}\alpha_{n'}$, donc $k\,\alpha_n = k'\alpha_{n'}$.

Soit $K = \{x \in \mathbf{R} \mid \exists\, n \in \mathbf{N} \quad 2^n x \in \mathbf{Z}\}$. $(K, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbf{Q}, +)$, celui des nombres dyadiques ; c'est même d'ailleurs un sous-anneau.

La remarque initiale de ce paragraphe montre que l'on définit bien une application f de K dans $\mathcal{A}$ en posant :

$$\forall\, k \in \mathbf{Z} \quad \forall\, n \in \mathbf{N} \qquad f\left(\frac{k}{2^n}\right) = k\,\alpha_n\ .$$

f est bien un homomorphisme de $(K, +)$ dans $(\mathcal{A}, +)$: soit en effet deux éléments x et x' de K ; on peut trouver n entier tel que $2^n x$ et $2^n x'$ soient dans **Z**, soit $x = \dfrac{k}{2^n}$ et $x' = \dfrac{k'}{2^n}$.

$$f(x + x') = f\left(\frac{k+k'}{2^n}\right) = (k+k')\alpha_n = k\alpha_n + k'\alpha_n = f\left(\frac{k}{2^n}\right) + f\left(\frac{k'}{2^n}\right) = f(x) + f(x')$$

De plus :

1) l'image de f est Γ ; $(\Gamma, +)$ est donc un sous-groupe de $(\mathcal{A}, +)$.

2) $\mathrm{Cos} \circ f$ et $\mathrm{Sin} \circ f$ sont des applications de K dans **R** respectivement paire et impaire.

3°) *Etude du Cos et du Sin des éléments de* Γ

a) *Cos* α_n, *Sin* α_n, *lim*$_\infty$ (α_n)

Par définition de la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $\alpha_0 = \varpi$ et $\forall\, n \in \mathbf{N}_*$ $\mathrm{Sin}\,\alpha_n > 0$. Donc 0 n'appartient pas à la suite et $\forall\, n \in \mathbf{N}$ $\mathrm{Cos}\,\alpha_n < 1$.

$\mathrm{Cos}\,\alpha_0 = -1$, $\mathrm{Cos}\,\alpha_1 = \mathrm{Cos}\,\delta = 0$ et si $n \geqslant 2$:

$$\mathrm{Sin}\,\alpha_{n-1} = 2\,\mathrm{Sin}\,\alpha_n\ \mathrm{Cos}\,\alpha_n\ .$$

Comme $\mathrm{Sin}\,\alpha_{n-1} > 0$, $\mathrm{Sin}\,\alpha_n > 0$:

$$\forall\, n \geqslant 2 \quad \mathrm{Cos}\,\alpha_n > 0\ .$$

$\operatorname{Cos}\ \alpha_n = \operatorname{Cos} 2\alpha_{n+1} = 2\operatorname{Cos}^2\alpha_{n+1} - 1$ et comme $\operatorname{Cos}\alpha_{n+1} \geqslant 0$:

$$\forall\ n \in N \quad \operatorname{Cos}\alpha_{n+1} = \sqrt{\frac{1+\operatorname{Cos}\alpha_n}{2}}.$$

Montrons que la suite $(\operatorname{Cos}\alpha_n)_{n\in N}$ est croissante :

$$\operatorname{Cos}\alpha_{n+1} - \operatorname{Cos}\alpha_n = \sqrt{\frac{1+\operatorname{Cos}\alpha_n}{2}} - \operatorname{Cos}\alpha_n = \frac{(1-\operatorname{Cos}\alpha_n)(1+2\operatorname{Cos}\alpha_n)}{2\left(\operatorname{Cos}\alpha_n + \sqrt{\frac{1+\operatorname{Cos}\alpha_n}{2}}\right)} > 0.$$

La suite $(\operatorname{Cos}\alpha_n)_{n\in N_*}$ est positive, croissante, majorée par 1. Elle a donc une limite L telle que $0 \leqslant L \leqslant 1$, obtenue en résolvant :

$L = \sqrt{\frac{1+L}{2}}$ soit $2L^2 - L - 1 = 0$

$(2L+1)(L-1) = 0$ donc $L = 1$.

$\lim_\infty (n \longmapsto \operatorname{Cos}\alpha_n) = 1$; comme $\operatorname{Sin}\alpha_n = \sqrt{1-\operatorname{Cos}^2\alpha_n}$:

$$\lim_\infty (n \longmapsto \operatorname{Sin}\alpha_n) = 0.$$

On a donc : $\lim_\infty (n \longmapsto \alpha_n) = 0.$

b) *Signe du Cosinus et du Sinus des éléments de* Γ

On a : $\operatorname{Cos} f(0) = 1$ et $\operatorname{Cos} f\left(\frac{1}{2}\right) = \operatorname{Cos}\delta = 0$.

Etudions le signe de $\operatorname{Cos} f\left(\frac{k}{2^n}\right)$ pour $\frac{k}{2^n}$ appartenant à $]0, \frac{1}{2}[$.

Nous allons montrer par récurrence la propriété suivante :

$(\forall n \geqslant 2 \quad \forall k \in Z\ \frac{k}{2^n} \in]0, \frac{1}{2}[\Rightarrow \operatorname{Cos}(k\alpha_n) > 0$ et $\operatorname{Sin}(k\alpha_n) > 0)$.

Cette propriété est vraie pour $n = 2$.

Supposons-la vraie pour n.

Soit k tel que $0 < k < 2^n$:

1) si k est pair, $k' = \frac{k}{2}$ est tel que $0 < k' < 2^{n-1}$.

$\operatorname{Cos} k\alpha_{n+1} = \operatorname{Cos} k'\alpha_n > 0$

$\operatorname{Sin} k\alpha_{n+1} = \operatorname{Sin} k'\alpha_n > 0$

2) si k est impair : soit $k' = \dfrac{k-1}{2}$ et $k'' = \dfrac{k+1}{2}$.

On a : $0 \leqslant k' < 2^{n-1}$, $0 < k'' \leqslant 2^{n-1}$.

$\cos k\alpha_{n+1} = \cos(2k''-1)\alpha_{n+1} = \cos k''\alpha_n \cos\alpha_{n+1} + \sin(k''\alpha_n)\sin\alpha_{n+1}$

si $k'' = 2^{n-1}$ $\cos k''\alpha_n = \cos\alpha_1 = 0$ $\sin k''\alpha_n = \sin\alpha_1 = 1$.

Par suite, d'après l'hypothèse de récurrence, $\cos k\alpha_{n+1} > 0$.

$\sin k\alpha_{n+1} = \sin(2k'+1)\alpha_{n+1} = \sin k'\alpha_n \cos\alpha_{n+1} + \cos k'\alpha_n \sin\alpha_{n+1} > 0$.

On a donc démontré :

$$\forall x \in]0, \frac{1}{2}[\cap K \quad \cos f(x) > 0 \quad \text{et} \quad \sin f(x) > 0.$$

Soit maintenant $x \in]\frac{1}{2}, 1[\cap K$. Alors :

$\varpi - f(x) = f(1) - f(x) = f(1-x)$ avec $1 - x \in]0, \frac{1}{2}[\cap K$.

Donc $\cos(\varpi - f(x))$ et $\sin(\varpi - f(x))$ sont strictement positifs.

Il s'ensuit : $\forall x \in]\frac{1}{2}, 1[\cap K$ $\cos f(x) < 0$ et $\sin f(x) > 0$.

Si $x \in]1, 2[\cap K$ $f(x) - \varpi = f(x-1)$ avec $x - 1 \in]0, 1[\cap K$ et on est ramené aux cas précédents. Finalement, on a le tableau :

x	0		1/2		1		3/2		2
f(x)	$\mathcal{O}$		δ		ϖ		$-\delta$		0
Cos f(x)	1	+	0	−	−1	−	0	+	1
Sin f(x)	0	+	1	+	0	−	−1	−	0

4°) *Périodicité de f*

Le noyau de l'homomorphisme f de $(K, +)$ dans $(\mathcal{A}, +)$ est un sous-groupe de $(K, +)$ dont le plus petit élément strictement positif est 2 : montrons que c'est $2\mathbb{Z}$.

Si en effet x est tel que $f(x) = \mathcal{O}$, si $k = E(\frac{x}{2})$ est la partie entière de $\frac{x}{2}$, alors $x = 2k + y$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $0 \leqslant y < 2$; $f(x) = k\,f(2) + f(y)$.

Comme $f(2) = \mathcal{O}$ et $f(x) = \mathcal{O}$, $f(y) = \mathcal{O}$ donc $y = 0$. Par suite $x \in 2\mathbf{Z}$.

D'autre part, $\forall x \in 2\mathbf{Z}\ f(x) = \mathcal{O}$. Donc $\overset{<}{f}]\mathcal{O}[= 2\mathbf{Z}$.

f a donc pour période 2, ainsi que $\mathrm{Cos} \circ f$ et $\mathrm{Sin} \circ f$.

Les signes de $(\mathrm{Cos} \circ f)(x)$ et $(\mathrm{Sin} \circ f)(x)$ sont donc connus par périodicité sur tout K. En particulier :

si n est pair $\qquad \forall x \in]n, n+1[\cap K \ \ \mathrm{Sin}(f(x)) > 0$

si n est impair $\qquad \forall x \in]n, n+1[\cap K \ \ \mathrm{Sin}(f(x)) < 0$

5°) *Monotonie de* $\mathrm{Cos} \circ f$ *sur* $[n, n+1] \cap K$ $(n \in \mathbf{Z})$

Soit x et x' dans $[0, 1] \cap K$ tels que $x < x'$; alors $\frac{x'+x}{2}$ et $\frac{x'-x}{2}$ sont dans $]0, 1[\cap K$ et on a :

$$\mathrm{Cos}\, f(x') - \mathrm{Cos}\, f(x) = -2\, \mathrm{Sin}\, f\left(\frac{x'+x}{2}\right) \mathrm{Sin}\, f\left(\frac{x'-x}{2}\right) < 0$$

$\mathrm{Cos} \circ f$ est donc strictement décroissante sur $[0, 1] \cap K$.

D'après la parité et la périodicité de $\mathrm{Cos} \circ f$:

$\mathrm{Cos} \circ f$ est strictement décroissante (resp. croissante) sur $K \cap [n, n+1]$ si n est pair (resp. impair).

6°) *Prolongement de* f *à* $\mathbf{R}$

On souhaite trouver un prolongement φ de f à $\mathbf{R}$ de telle sorte que $\mathrm{Cos} \circ \varphi$ et $\mathrm{Sin} \circ \varphi$ soient continues, et que φ soit un homomorphisme de $(\mathbf{R}, +)$ dans $(\mathcal{A}, +)$.

a) *Suites de* K *convergeant vers le réel* x *donné*

Soit $x \in \mathbf{R}$. Si $n \in \mathbf{N}$, on pose $k_n(x) = E(2^n x)$.

On a : $$\frac{k_n(x)}{2^n} \leqslant x < \frac{k_n(x)+1}{2^n}$$

$\frac{k_n(x)}{2^n}$ et $\frac{k_n(x)+1}{2^n}$ sont des éléments de K qui sont des valeurs approchées de x à 2^{-n} près par défaut et par excès.

On a $k_{n+1}(x) \geqslant 2\,E(2^n x) = 2\,k_n(x)$ et $k_{n+1}(x) \leqslant 2\,E(2^n x) + 1 = 2\,k_n(x) + 1$ donc

$$\frac{k_{n+1}(x)}{2^{n+1}} \geqslant \frac{k_n(x)}{2^n} \quad \text{et} \quad \frac{k_n(x)+1}{2^n} \geqslant \frac{k_{n+1}(x)+1}{2^{n+1}}.$$

Les 2 suites $\left(\frac{k_n(x)}{2^n}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ et $\left(\frac{k_n(x)+1}{2^n}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ sont adjacentes et ont x pour limite.

Si x appartient à K, la première est constante à partir d'un certain rang, et cette constante est x .

b) *Construction de φ*

Si $x \in \mathbf{Z}$, on pose $\varphi(x) = f(x)$.

Si $x \notin \mathbf{Z}$, x appartient à un intervalle de la forme $]a, a+1[$ avec $a \in \mathbf{Z}$.

On supposera par exemple a pair (le raisonnement se conduisant de la même manière si a est impair).

$$\forall n \in N \quad a \leqslant \frac{k_n(x)}{2^n} \leqslant x < \frac{k_n(x)+1}{2^n} \leqslant a+1$$

Puisque $\mathrm{Cos} \circ f$ est décroissante sur $[a, a+1]$ et que la suite $\left(\frac{k_n(x)}{2^n}\right)_{n \in N}$ est croissante au sens large, la suite $\left(\mathrm{Cos}\, f\left(\frac{k_n(x)}{2^n}\right)\right)_{n \in N}$ est décroissante au sens large et minorée par -1 ; elle a donc une limite que l'on notera $\gamma(x)$.

La suite $\left(\mathrm{Sin}\, f\left(\frac{k_n(x)}{2^n}\right)\right)_{n \in N}$ est positive ; elle vérifie :

$$\forall n \in N \qquad \mathrm{Sin}\, f\left(\frac{k_n(x)}{2^n}\right) = \sqrt{1 - \mathrm{Cos}^2\, f\left(\frac{k_n(x)}{2^n}\right)} \ ;$$

elle a donc pour limite $\sigma(x) = \sqrt{1 - \gamma^2(x)}$. Puisque $\sigma^2(x) + \gamma^2(x) = 1$, il existe un et un seul angle, noté $\varphi(x)$, tel que $\mathrm{Cos}\,(\varphi(x)) = \gamma(x)$, $\mathrm{Sin}\,(\varphi(x)) = \sigma(x)$.

Par construction : $\qquad \lim_\infty\left(n \longmapsto f\left(\frac{k_n(x)}{2^n}\right)\right) = \varphi(x)$.

c) *φ est un prolongement de f*

En effet, si $x \in$ K, les suites $\left(\mathrm{Cos}\, f\left(\frac{k_n(x)}{2^n}\right)\right)$ et $\left(\mathrm{Sin}\, f\left(\frac{k_n(x)}{2^n}\right)\right)$ sont constantes à partir d'un certain rang et leur limite est cette constante.

On obtient :

$\forall x \in$ K $\mathrm{Cos}\, f(x) = \mathrm{Cos}\, \varphi(x)$ et $\mathrm{Sin}\, f(x) = \mathrm{Sin}\, \varphi(x)$

donc : $\qquad \varphi(x) = f(x)$.

7°) *φ est un homomorphisme de $(\mathbf{R}, +)$ dans $(\mathcal{A}, +)$*

Soit x et y deux réels.

$$\varphi(x+y) = \lim_\infty \left(n \longmapsto \left(f\,\frac{k_n(x+y)}{2^n}\right)\right)$$

D'autre part :

$$k_n(x) \leqslant 2^n x < k_n(x) + 1 \;\; ; \;\; k_n(y) \leqslant 2^n y < k_n(y) + 1 \;;$$

donc

$$k_n(x) + k_n(y) \leqslant 2^n(x+y) < k_n(x) + k_n(y) + 2 \;;$$

donc :

$$k_n(x) + k_n(y) \leqslant k_n(x+y) < k_n(x) + k_n(y) + 2 \;,$$

car $\quad k_n(x+y) = \text{Sup} \; \{ p \in \mathbb{Z} \mid p \leqslant 2^n(x+y) \}$.

Donc :

$$k_n(x) + k_n(y) \leqslant k_n(x+y) \leqslant k_n(x) + k_n(y) + 1 \,.$$

Or :

$$\text{Cos}\, f\left(\frac{k_n(x)+k_n(y)}{2^n}\right) = \text{Cos}\, f\left(\frac{k_n(x)}{2^n}\right) \text{Cos}\, f\left(\frac{k_n(y)}{2^n}\right) - \text{Sin}\, f\left(\frac{k_n(x)}{2^n}\right) \text{Sin}\left(\frac{k_n(y)}{2^n}\right)$$

a pour limite

$$\text{Cos}\,\varphi(x)\,\text{Cos}\,\varphi(y) - \text{Sin}\,\varphi(x)\,\text{Sin}\,\varphi(y) = \text{Cos}\,[\varphi(x) + \varphi(y)]$$

$$\text{Cos}\, f\left(\frac{k_n(x)+k_n(y)+1}{2^n}\right) = \text{Cos}\, f\left(\frac{k_n(x)+k_n(y)}{2n}\right) \text{Cos}\,\alpha_n - \text{Sin}\, f\left(\frac{k_n(x)+k_n(y)}{2^n}\right) \text{Sin}\,\alpha_n$$

a pour limite $\quad \text{Cos}\,\varphi(x + y)$.

Comme $k_n(x+y) \in \; \{ k_n(x) + k_n(y),\; k_n(x) + k_n(y) + 1 \}$,

$$\lim_{\infty} \left[n \longmapsto \text{Cos}\, f\left(\frac{k_n(x+y)}{2^n}\right)\right] = \text{Cos}\,[\varphi(x) + \varphi(y)]$$

On a donc : $\quad \text{Cos}\,(\varphi(x) + \varphi(y)) = \text{Cos}\,(\varphi(x + y))$.

On démontre de même : $\quad \text{Sin}\,(\varphi(x) + \varphi(y)) = \text{Sin}\,(\varphi(x + y))$.

Par conséquent :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \forall\, y \in \mathbb{R} \quad \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \,.$$

8°) *Signes de Cos $(\varphi(x))$ et de Sin $(\varphi(x))$*

Soit x un réel de $]0, \frac{1}{2}[$.

Si x_1 et x_2 sont 2 éléments de K vérifiant $0 < x_1 < x < x_2 < \frac{1}{2}$ (il en existe bien), il existe n_0 entier tel que :

$$\forall\, n \geqslant n_0 \quad 0 < x_1 < \frac{k_n(x)}{2^n} < x_2 < \frac{1}{2} \,,$$

et puisque $\text{Cos} \circ f$ décroît sur $[0, \frac{1}{2}] \cap K$:

$$1 > \text{Cos}\, f(x_1) > \text{Cos}\, f\left(\frac{k_n(x)}{2^n}\right) > \text{Cos}\, f(x_2) > 0$$

On en déduit pour la limite :

$$1 > \mathrm{Cos}\, f(x_1) \geqslant \mathrm{Cos}\, \varphi(x) \geqslant \mathrm{Cos}\, f(x_2) > 0$$

Donc $\mathrm{Cos}\,\varphi(x) \in]0,1[$ et comme $\mathrm{Sin}\,\varphi(x) = \sqrt{1 - \mathrm{Cos}^2\,\varphi(x)}$, $\mathrm{Sin}\,\varphi(x) \in]0, 1[$.

On en déduit que les résultats de 3°) b) sont les mêmes pour φ que pour f. En particulier : $\mathrm{Cos} \circ \varphi$ est strictement décroissante sur $[0, 1]$ et $\mathrm{Cos} \circ \varphi$ et $\mathrm{Sin} \circ \varphi$ sont respectivement paire et impaire.

9°) *φ est une phase non nulle*

Il reste à montrer la continuité de $\mathrm{Cos}\circ\varphi$ en 0. Comme $\mathrm{Cos} \circ \varphi$ est paire il suffit de montrer sa continuité à droite en 0. Celle-ci résulte du fait que pour tout x de $[0, \frac{1}{2^n}[$, on a, du fait de la décroissance de $\mathrm{Cos} \circ \varphi$: $1 > \mathrm{Cos}\,(\varphi(x)) > \mathrm{Cos}\,\alpha_n$. Or $\lim_\infty(n \longmapsto \alpha_n) = 0$ et $\lim_\infty(n \longmapsto \mathrm{Cos}\,\alpha_n) = 1$. φ est donc une phase. Elle est non nulle bien sûr car $\varphi(1) = \varpi$ par exemple.

Cette méthode de construction s'apparente à la méthode du "rapporteur binaire". On verra en Annexe II une méthode plus rapide et un peu moins élémentaire basée sur l'exponentielle complexe.

C/ — Propriétés des phases non nulles

Dans cette partie, φ désigne une phase non nulle quelconque, $\gamma = \mathrm{Cos} \circ \varphi$, $\sigma = \mathrm{Sin} \circ \varphi$.

1) *φ est surjective*

γ est continue. L'image de l'intervalle $\mathbf{R}$ par γ est donc un intervalle J inclus dans $[-1, 1]$.
$1 \in J$ car $1 = \gamma(0)$.
$J \neq \{1\}$ car $\gamma(x) = 1$ équivaut à $\varphi(x) = 0$ et φ est non nulle.

Soit $a = \mathrm{Inf}\, J : -1 \leqslant a < 1$. $]a, 1] \subset J \subset [a, 1]$.

On a : $\gamma(2x) = 2\,\gamma^2(x) - 1$; donc : $\forall\ y \in J\ \ 2y^2 - 1 \in J$.

Par suite : $\forall\ y \in]a, 1]\ 2y^2 - 1 \in [a, 1]$. Ce n'est possible que si $2a^2 - 1 \geqslant a$ et comme $a < 1$, $a \leqslant -\frac{1}{2}$.

Donc $0 \in J$ et $-1 = 2\,.\,0^2 - 1 \in J$. Donc $J = [-1, 1]$ et γ est une surjection de $\mathbf{R}$ sur $[-1, 1]$.

Soit $\alpha \in \mathcal{A}$; $\exists\ x \in \mathbf{R}\ \ \gamma(x) = \mathrm{Cos}\,\alpha$. Par suite $\varphi(x) \in \{\alpha, -\alpha\}$ et $\varphi(x) = \alpha$ ou $\varphi(-x) = \alpha$. φ est donc surjective.

2) *φ est périodique*

Posons $\overset{<}{\varphi}\ \{0\} = \overset{<}{\gamma}\ \{1\} = P\ ;\ \overset{<}{\varphi}\ \{\varpi\} = \overset{<}{\gamma}\ \{-1\} = D.$

$$\forall x \in D \quad 2x \in P \quad \text{et} \quad 2x \neq 0\ .$$

Comme $D \neq \phi$, P a au moins un élément non nul. On en déduit que φ n'est pas injective.

Si $x \in D$, $-x \in D$ donc $D \cap R_+ \neq \phi$. Soit $p = \operatorname{Inf} D \cap R_+$.
Comme γ est continue :

— ou bien $p \in D$, alors $\gamma(p) = -1$.

— ou bien $p \notin D$, alors $\forall n \in N_*\ ]p, p+\frac{1}{n}[\cap D$ est non vide et si $x_n \in]p, p+\frac{1}{n}[\cap D$

$$\lim_\infty (n \longmapsto \gamma(x_n)) = \gamma(p) = \lim_\infty (n \longmapsto -1) = -1$$

donc $\gamma(p) = -1$ et $p \in D$ (ce qui prouve que l'hypothèse précédente est fausse). $p \geqslant 0$ d'après sa définition et $p \neq 0$ car $\gamma(p) = -1$ donc $p > 0$.

On a donc établi l'existence d'un plus petit réel > 0 dont l'image par φ est ϖ.

Cherchons $\overset{<}{\varphi}\ \{0, \varpi\} = P \cup D$. Soit $x \in P \cup D$: posons $n = E(\frac{x}{p})$; alors $x = np + y$ avec $n \in Z$ et $y \in [0, p[$. Comme $(P \cup D, +)$ est un sous-groupe de $(R, +)$ (image réciproque d'un sous-groupe de $(\mathcal{A}, +)$), et comme $x \in P \cup D$, $p \in P \cup D$, alors $y \in P \cup D$. $y \notin D$ car $0 \leqslant y < p$, donc $y \in P$. $\varphi(p - y) = \varpi - 0 = \varpi$ donc $p - y \in D$ avec $0 < p - y \leqslant p$, donc $p - y = p$ et $y = 0$. Par suite $P \cup D \subset pZ$. Mais comme $p \in P \cup D$, et $(P \cup D, +)$ est un groupe : $p\,Z \subset P \cup D$.

Par suite $P \cup D = pZ$.

Si $\frac{x}{p}$ est un entier pair (resp. impair), $x \in P$ (resp. D).

Donc $\quad P = 2pZ$.
2p est donc la période de φ ; p est sa demi-période.

3) *Signe de φ*

Soit p la demi-période de φ. Sur $]0, p[$ φ ne prend pour valeur ni 0 ni ϖ. Donc σ ne s'annule pas sur $]0, p[$. Comme σ est continue, elle a un signe constant sur $]0, p[$.

Appelons positive (resp. négative) une phase φ telle que $\operatorname{Sin}(\varphi(x)) > 0$ (resp. < 0) pour tout x de $]0, p[$, où p est la demi-période de φ.

En particulier $\varphi\left(\frac{p}{2}\right) = \delta$ (resp. $-\delta$) si et seulement si φ est positive (resp. négative). Toute phase est positive, négative ou nulle.

4) *La droite des phases*

Montrons qu'il existe au plus une phase positive ayant une demi-période p donnée.

Soit en effet, φ et ψ 2 telles phases et soit $\chi = \varphi - \psi$. χ est une phase. Si χ n'est pas nulle, elle a une demi-période : q. Comme $\chi(q) = \varpi$, $\varphi(q) = \psi(q) + \varpi$; et comme $\chi(p) = \varpi - \varpi = 0$, $q < p$.
Donc $\text{Sin}\,\varphi(q) > 0$ et $\text{Sin}\,\psi(q) > 0$ ce qui contredit $\varphi(q) = \psi(q) + \varpi$.
Donc χ est nulle et $\varphi = \psi$.

Dans B) on a établi l'existence d'une phase positive de demi-période 1.

Soit φ cette phase.

Montrons que $\forall \psi \in \Phi \ \exists \lambda \in \mathbf{R} \quad \psi = \lambda\varphi$.

En effet : soit ψ une phase. Si $\psi = 0$, on prend $\lambda = 0$. Si ψ est positive, soit p la demi-période de ψ. Alors $p\psi$ est une phase telle que $(p\psi)(x) = 0$ équivaut à $\psi(px) = 0$, soit à $px \in 2p\,\mathbf{Z}$, soit à $x \in 2\mathbf{Z}$. D'autre part, $(p\psi)\left(\frac{1}{2}\right) = \psi\left(\frac{p}{2}\right) = \delta$. Donc $p\psi$ est positive et de demi-période 1 ; donc $p\psi = \varphi$, $\psi = \frac{1}{p}\varphi$.
Si ψ est négative, $-\psi$ est positive et si p est la demi-période de ψ : $\psi = -\frac{1}{p}\varphi$.

Φ est donc une droite vectorielle.

ANNEXE N° 1 : Dérivabilité de $\text{Cos} \circ \varphi$ et $\text{Sin} \circ \varphi$ où φ est une phase

Soit $\varphi \in \Phi$; posons $\varphi^* = \text{Cos} \circ \varphi + i\,\text{Sin} \circ \varphi$.

φ^* est un homomorphisme de $(\mathbf{R}, +)$ dans $(U, \times)$ où U est le groupe des complexes de module 1.

φ^* est continue car $\text{Re} \circ \varphi^* = \text{Cos} \circ \varphi$ et $\text{Im} \circ \varphi^* = \text{Sin} \circ \varphi$ le sont.

Soit $\psi(x) = \displaystyle\int_0^x \varphi^*(u)\,du$ pour tout x réel.

$$\psi(x+a)-\psi(x)=\int_x^{x+a}\varphi^*(u)du=\int_0^a\varphi^*(x+t)dt=\varphi^*(x)\int_0^a\varphi^*(t)dt=\varphi^*(x)\,\psi(a).$$

$\exists a\ \psi(a)\neq 0$: sinon $\psi = 0$ et $\varphi^* = \psi' = 0$.

Si a est tel que $\psi(a)\neq 0$: $\varphi^*(x)=\dfrac{1}{\psi(a)}[\psi(x+a)-\psi(x)]$;
φ^* est dérivable et
$(\varphi^*)'(x)=\dfrac{1}{\psi(a)}[\varphi^*(x+a)-\varphi^*(x)]=\dfrac{\varphi(a)-1}{\psi(a)}\ \varphi^*(x)$.

Il existe $c\in \mathbf{C}$ tel que $(\varphi^*)'=c\,\varphi^*$.
On a : $\left(\overline{\varphi^*}\right)'=\left(\overline{(\varphi^*)'}\right)=(\overline{c\,\varphi^*})=\overline{c}\,\overline{\varphi^*}$. Mais $\overline{\varphi^*}=\dfrac{1}{\varphi^*}$ car φ^* est à valeurs dans U ; et $\overline{\varphi^*}(x)=\dfrac{1}{\varphi^*(x)}=\varphi^*(-x)$. Donc

$$\left(\overline{\varphi^*}\right)'(x)=-(\varphi^*)'(-x)=-c\,\varphi^*(-x)=-c\,\overline{\varphi^*}(x).$$

Donc $\overline{c}=-c$. On en déduit :

$$\exists\lambda\in\mathbf{R}\quad(\varphi^*)'=i\lambda\varphi^*$$

Par suite $(\mathrm{Cos}\circ\varphi)'=-\lambda\,\mathrm{Sin}\circ\varphi$; $(\mathrm{Sin}\circ\varphi)'=\lambda\,\mathrm{Cos}\circ\varphi$.
En particulier $\lambda=(\mathrm{Sin}\circ\varphi)'(0)$.

Soit φ_1 et φ_2 deux phases non nulles de demi-périodes p_1 et p_2 et telles que $(\mathrm{Sin}\circ\varphi_1)'(0)=\lambda_1$, $(\mathrm{Sin}\circ\varphi_2)'(0)=\lambda_2$.

Alors $\varphi_2 = a\,\varphi_1$, avec $|a|=\dfrac{p_1}{p_2}$.

$(\mathrm{Sin}\circ\varphi_2)(x)=(\mathrm{Sin}\circ\varphi_1)(ax)$. Donc $\lambda_2 = a\lambda_1$ et par suite :

$$\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}=\frac{p_1}{p_2}$$

On montre ainsi que le produit de la demi-période de φ par la valeur absolue de la dérivée de $\mathrm{Sin}\circ\varphi$ est indépendant de la phase non nulle φ : c'est donc une constante mathématique notée π. π est la demi-période de la phase positive rd telle que $(\mathrm{Sin}\circ \mathrm{rd})'(0)=1$.

ANNEXE N° 2 : Définition de e^z

A tout z de C, associons la série de terme général $u_n=\dfrac{z^n}{n!}$.
On a : $\lim_\infty\left(n\longmapsto\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}\right)=0$, ce qui prouve que cette série converge absolument pour tout z.

On définit : $$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}.$$

On sait que si les séries (u_n) et (v_n) sont absolument convergentes, il en est de même de la série (w_n) définie par :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \, v_{n-k}$$

$$\text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} w_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \sum_{n=0}^{\infty} v_n .$$

Appliquons ceci à $u_n = \dfrac{z^n}{n!}$ et à $v_n = \dfrac{z'^n}{n!}$.

On obtient :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k \, z'^{n-k}}{k! \, (n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, z^k \, z'^{n-k} = \frac{(z+z')^n}{n!}$$

Par suite $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

$e^0 = 1$; $e^z \, e^{-z} = e^0 = 1$. Donc $\forall \; z \in \mathbf{C} \;\; e^z \in \mathbf{C}_*$.

$z \longmapsto e^z$ est un homomorphisme de $(\mathbf{C}, +)$ dans $(\mathbf{C}_*, \times)$.

On a : $e^{\bar z} = \overline{(e^z)}$, car $\sum_{n=0}^{\infty} \overline{u_n} = \overline{\sum_{n=0} u_n}$ pour une série convergente (u_n).

Donc si $x \in \mathbf{R}$, $\overline{(e^{ix})} = e^{-ix} = \dfrac{1}{e^{ix}}$. $\quad \forall \; x \in \mathbf{R} \quad e^{ix} \in \mathbf{U}$.

$x \longmapsto e^{ix}$ est un homomorphisme de $(\mathbf{R}, +)$ dans $(\mathbf{U}, \times)$.

Si $|z| \leqslant 1$, $|e^z - 1| \leqslant |z| \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{(n+1)!} \leqslant k \, |z|$ avec $k = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}$

Si $|x| \leqslant 1$, $x \in \mathbf{R}$ $\;|e^{ix} - 1| \leqslant k \, |x|$. Donc $|\mathrm{Re}(e^{ix}) - 1| \leqslant k \, |x|$.

Soit φ l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathcal{A}$ telle que :

$$\forall \; x \in \mathbf{R} \;\; \varphi^*(x) = e^{ix} \text{ (voir Annexe I).}$$

Alors φ est un homomorphisme de $(\mathbf{R}, +)$ dans $(\mathcal{A}, +)$ et $\mathrm{Cos} \circ \varphi$ est continue en 0 (car : $|\mathrm{Cos} \circ \varphi(x) - 1| \leqslant k \, |x|$ pour $|x| \leqslant 1$). φ est une phase.

Si $|z| \leqslant 1$, $|e^z - 1 - z| \leqslant |z|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{(n+2)!} \leqslant k' |z|^2$ avec

$$k' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} .$$

En particulier : si $|x| \leqslant 1$, $x \in \mathbb{R}$: $|e^{ix} - 1 - ix| \leqslant k'x^2$.

$$\left| \frac{\varphi^*(x) - \varphi^*(0)}{x} - i \right| \leqslant k' |x|.$$

Par suite $(\varphi^*)'(0) = i$ et $(\text{Sin} \circ \varphi)'(0) = 1$.

On en déduit que φ est la phase radian.