Pourquoi des phases ?

par Jérôme CHASTENET de GERY

La notice "angle" a beaucoup occupé la Commission du dictionnaire ces temps derniers, et les lecteurs de ce Bulletin ont pu voir que J.M. Chevallier s'était lui-même déjà préoccupé de la question depuis longtemps.

Il faut expliquer ici pourquoi nous avons jugé bon, en plus de la notice "angle", de faire une notice "phase", et pourquoi nous l'avons faite ainsi.

Nous avions à prendre en compte les notions que l'on trouve dans des expressions telles que : "angles généralisés" ou "mesure des angles", et qui visent à donner un sens mathématique à des écritures telles que "$\frac{8\pi}{3}$ radian" (ou même : "deux tours et demi"), alors que le groupe (additif) des angles n'est, au mieux, qu'un $\mathbf{Z}-$ module et que l'on ne peut y multiplier par des nombres non entiers (le radian, dans ces conditions, ne doit donc pas être considéré comme un angle).

On sait [1] [2] [3] que le problème de la "mesure" des angles par des nombres réels se résout en utilisant des homomorphismes continus du groupe additif $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{A}$, le groupe additif des angles (*). Mais sur quelle droite "naturelle" porter "des angles généralisés" tels que : $\frac{8}{3}\pi$ radian ?

J'ai alors remarqué que le groupe additif H des homomorphismes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathcal{A}, +)$ pouvait être muni, de façon simple et naturelle, d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ en posant, non seulement, comme c'est l'usage :

$$\forall\ (f, g) \in H^2, \qquad f + g = [x \mapsto f(x) + g(x)],$$

mais encore, ce qui est moins habituel :

$$\forall\ f \in H, \quad \forall\ s \in \mathbb{R}, \qquad s\,f = [x \mapsto f(s\,x)].$$

Cette façon de faire prolonge d'ailleurs la structure naturelle de $\mathbb{Z}$ — module de H, où l'on a notamment :

$$\forall\ n \in \mathbb{Z}, \ \forall\ f \in H, \ \forall\ x \in \mathbb{R}, \ n[f(x)] = f(n\,x) = [n\,f]\,(x)$$

(tandis que $s[f(x)]$ n'est pas défini pour $s \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$).

On voit alors que les homomorphismes *continus* de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathcal{A}, +)$ forment un sous-espace vectoriel Φ de H, et l'on démontre que la dimension de Φ est égale à 1. Cette démonstration est un peu délicate (on trouvera plus loin celles proposées par A. Tissier et M. Zirah), mais d'une façon ou d'une autre on a besoin d'un résultat de ce genre [1] [2] [3].

On peut alors considérer que le radian, le tour et les autres "unités d'angles" sont certains éléments non nuls de Φ, c'est-à-dire des bases de la droite vectorielle Φ.

Si $\varphi \in \Phi - \{0\}$, les déterminations (ou "mesures") de l'angle-de-couple $\alpha \in \mathcal{A}$ relativement à φ (ou "avec φ comme unité") sont les $x \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi(x) = \alpha$.

Le plan euclidien P, où l'on a construit le groupe des angles utilisé, et la droite Φ correspondante peuvent être orientés corrélativement ; alors, si δ est l'angle droit direct, on aura par exemple :

(*) Le problème de la "mesure" des vecteurs sur une droite Δ d'un espace vectoriel réel E se résout par les applications linéaires de $\mathbb{R}$ sur Δ (en l'occurrence, homomorphismes continus de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\Delta, +)$) c'est-à-dire par des contravecteurs non nuls de E, et plus spécialement de Δ. Mais la propriété des espaces vectoriels $\mathcal{L}(\mathbb{R}, E)$ et E d'être toujours isomorphes n'a plus d'équivalent ici : les éléments de Φ, qui seraient en quelque sorte des "contra-angles", ne peuvent pas être identifiés avec les angles de $\mathcal{A}$.

$$\delta = \text{rad}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{tour}\left(\frac{1}{4}\right) = \left[\frac{\pi}{2}\,\text{rad}\right](1) = \left[\frac{1}{4}\,\text{tour}\right](1).$$

Les éléments de Φ sont des fonctions périodiques (*) ; ainsi le radian est de période 2π, le tour de période 1. Aussi faut-il prendre garde que si, pour les angles, on a par exemple les égalités :

$$\left[\frac{5\pi}{2}\,\text{rad}\right](1) = \text{rad}\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \text{rad}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left[\frac{\pi}{2}\,\text{rad}\right](1),$$

on a cependant pour les éléments de Φ correspondants :

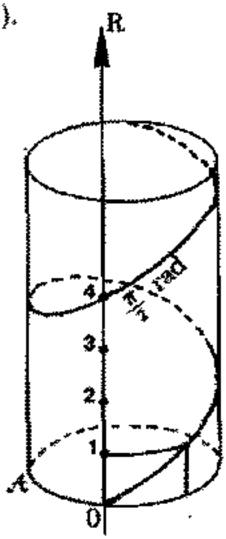
$$\frac{1}{4}\,\text{tour} = \frac{\pi}{2}\text{rad} \neq \frac{5\pi}{2}\,\text{rad} = 1{,}25 \text{ tour}.$$

En effet :

$[1{,}25 \text{ tour}]\left(\frac{4}{5}\right) = \text{tour}(1) = 0$, tandis que :

$\left[\frac{1}{4}\,\text{tour}\right]\left(\frac{4}{5}\right) = \text{tour}\left(\frac{1}{5}\right) \neq 0.$

Tout ceci s'imagine peut-être mieux si l'on observe (fig.) que les graphes des éléments non nuls de Φ sont des hélices, tracées sur le cylindre $\mathbf{R} \times \mathcal{A}$ et dont le pas est égal à la période (ou à l'opposé, suivant le sens).



(*) On peut remarquer que la "fréquence" de $\varphi \in \Phi$, c'est-à-dire ici $\nu \in \mathbf{R}^+$ telle que :

$$\forall x \in \mathbf{R}\ [\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \nu x \in \mathbf{Z}]$$

donne une norme naturelle sur Φ.

Il m'a semblé alors assez naturel de choisir la droite vectorielle Φ pour y porter les "angles généralisés". Nous appellerons d'ailleurs plutôt (et faute d'un meilleur terme) *phases* les éléments de Φ. Ceci est assez proche de l'usage courant de ce mot en physique, où une expression telle que : $t\omega + \varphi_0$ (qui dépend de t de façon *affine*, et ne peut donc désigner un angle mais plutôt un élément de Φ) est souvent appelée "phase", φ_0 étant alors appelé "phase à l'origine".

Pour éviter cependant des confusions possibles avec d'autres usages du mot *phase* en mécanique et en physique, il faudra bien employer pour ω la dénomination "vitesse angulaire" (et non "vitesse de phase", qui a un autre sens), et pour Φ l'appellation "droite des phases" (et non pas "espace des phases", qui a d'autres sens).

La vitesse angulaire peut d'ailleurs se définir à l'aide de la construction mathématique suivante.

Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathcal{A}$. On dira que f est dérivable en $t_0 \in \mathbf{R}$ si, étant donné une unité de phase $\varphi \in \Phi - \{0\}$, on peut trouver une fonction g de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, dérivable en t_0 et telle qu'il existe un voisinage de t_0 où l'on ait quel que soit t :

$$f(t) = \varphi(g(t)).$$

Alors g est définie localement à une constante additive près, et $g'(t_0)$ ne dépend pas du choix de g. De plus la phase $g'(t_0)\varphi$ ne dépend plus que de f et de t_0, et nous poserons (*) :

$$f'(t_0) = g'(t_0)\varphi,$$

qui appartient à Φ (compte tenu du choix de l'unité de temps, une vitesse angulaire sera alors en $T^{-1}\Phi$).

Il en résultera l'égalité :

$$f(t_0 + dt) - f(t_0) = f'(t_0)(dt) + \epsilon(dt),$$

où ϵ est une phase qui dépend de f, de t_0 et de dt, et qui tend vers 0 quand dt tend vers 0.

Exemple : Si E est un *intervalle* de $\mathbf{R}$, on a, quel que soit ω de Φ:

$$[\exists \alpha_0 \in \mathcal{A},\ \forall t \in E,\ f(t) = \omega(t) + \alpha_0] \Leftrightarrow [\forall t \in E,\ f'(t) = \omega]$$

(*) On prendra garde que ce n'est pas l'application notée ici $f'(t_0)$ qui est l'application linéaire tangente à f au point t_0, mais bien plutôt l'application $dt \mapsto dt\, f'(t_0)$, si l'on identifie avec Φ les espaces vectoriels tangents à $\mathcal{A}$.

Soit maintenant $\alpha \in \mathcal{A}$ un angle. Si l'on prend une unité de phase φ, il est facile de voir que l'ensemble $\{x\varphi \,;\, \varphi(x) = \alpha\}$, des phases de la forme $x\varphi$ où x parcourt l'ensemble des déterminations de α relativement à φ, est indépendant du choix de φ.

Nous appellerons cet ensemble "classe des phases de l'angle α", et nous le noterons Φ_α. On a d'ailleurs :
$[\psi \in \Phi_\alpha] \Leftrightarrow [\psi(1) = \alpha]$, et l'on voit que l'ensemble des Φ_α forme une partition de Φ. L'application $\psi \mapsto \psi(1)$ est un homomorphisme continu de $(\Phi, +)$ sur $(\mathcal{A}, +)$, qui permet notamment d'étendre aux phases de façon naturelle les fonctions trigonométriques définies sur les angles (*).

D'aucuns pourront préférer choisir pour "droite des phases" un autre ensemble que Φ, mais avec une construction évidemment équivalente en définitive (**) ; le choix que j'ai présenté ici nous a semblé, tout compte fait, le plus simple. Bien que je me sois efforcé, dans cette présentation, de ne faire appel qu'à des notions mathématiques aussi simples que possible, il resterait à voir ce qui pourrait éventuellement en passer dans l'enseignement, suivant le niveau où l'on se place (ainsi on ne pourrait sans doute pas, pour un premier contact avec le rapporteur en degrés, le présenter comme une tranche du "rapporteur hélicoïdal" que constitue la phase "degré").

Références bibliographiques

[1] G. Choquet. L'enseignement de la géométrie (Hermann, Paris, 1964)

[2] J. Dieudonné. Algèbre linéaire et géométrie élémentaire (Hermann, Paris, 1964)

[3] J. Frenkel. Géométrie pour l'élève professeur (Hermann, Paris, 1973).

(*) Si l'on utilise *en fait* bien souvent des phases ("angles généralisés") plutôt que des angles, c'est qu'il est plus facile de calculer, de dériver, d'intégrer, etc... dans un espace vectoriel que dans un groupe tel que $\mathcal{A}$, et que l'on ne veut pas choisir une "unité d'angle".

(**) Ainsi on a proposé quelque chose qui revient à prendre l'ensemble des classes des couples $(x, \varphi) \in \mathbb{R} \times [\Phi - \{0\}]$, suivant la relation d'équivalence définie, entre (x, φ) et (x', φ'), par $x\varphi = x'\varphi'$.