# Fonctions périodiques en Première

*par Jeannine PERUCCA (E.N. Melun)*

Une fonction réelle de variable réelle, f, est dite périodique si :

$$\exists\ P \in \mathbb{R}_*^+ ,\quad \forall\ x \in \mathbb{R}\ ,\ [x \in D(f) \Leftrightarrow x + P \in D(f)] \wedge [f(x+P) = f(x)]$$

Dans nos classes de Première, la plupart du temps, nos exercices sur les fonctions périodiques ne font manipuler que des fonctions discontinues f pour lesquelles nous savons exprimer f(x) pour tout x de D(f), les exemples les plus courants étant construits à partir de la fonction $x \longmapsto x - E(x)$, où E désigne la fonction partie entière. Ceci a tendance à faire croire aux élèves que périodicité implique discontinuité (au moment où ce sujet est abordé dans nos classes, il ne peut être question d'utiliser les fonctions circulaires).

Certes, il existe un procédé général pour construire une fonction périodique de période $P$ : il consiste à se donner sur un intervalle $[a,a+P[$ une fonction $g$ et d'en tirer la fonction $f$ telle que :

$$\forall\ n \in \mathbf{Z}, \quad \forall\ x \in [a+nP, a+(n+1)P[ \quad , \quad f(x) = g(x-nP)$$

Il suffit alors que $g$ soit continue sur $[a,a+P[$ et que sa limite à gauche pour $a+P$ soit $g(a)$ — ou, ce qui revient au même, que $g$ soit définie et continue sur $[a,a+P]$ et que $g(a+P) = g(a)$ — pour que la fonction périodique $f$ obtenue soit elle-même continue.

Mais, sans vouloir flatter le goût pour les fonctions "explicitement données par une expression littérale", il n'est pas mauvais de disposer d'un procédé qui permette l'obtention systématique d'une telle écriture pour les fonctions périodiques ainsi construites, à partir d'une fonction $g$ donnée au préalable sous les conditions rappelées ci-dessus.

Nous plaçant d'abord dans un cas très général, faisons les hypothèses suivantes :

1) $\varphi$ est une fonction périodique de période $P$ $(P \in \mathbf{R}^{+}_{*})$, ayant un nombre fini de points de discontinuité $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans un intervalle semi-ouvert d'amplitude $P$ ; on pose :

$$u_i = \varphi(x_i) \qquad v_i = \lim_{x_i}{}^{+} \varphi \qquad w_i = \lim_{x_i}{}^{-} \varphi$$

2) $g$ est une fonction continue définie sur $\overline{\varphi(\mathbf{R})}$, qui prend la même valeur en tous les points $u_i$, $v_i$, $w_i$ pour tous les $i$ de $[1,n]$.

Alors, sous ces hypothèses, la fonction $g \circ \varphi$ est périodique, de période $P$, et continue.

Voici quelques exemples :

1) $\varphi : x \longmapsto x - E(x)$
$g : x \longmapsto x(x-1)$
$g \circ \varphi : x \longmapsto (x-E(x))\,(x-E(x)-1)$

2) $\varphi : x \longmapsto (-1)^{E(x)}\,(x-E(x))$
$g : x \longmapsto x(x-1)\,(x+1)$
$g \circ \varphi : x \longmapsto (-1)^{E(x)}\,[x-E(x)]\,[(x-E(x))^2-1]$

A la lumière de ces constatations nous pouvons à présent revenir au problème qui nous intéresse. On se donne une fonction $g$ définie sur $[a,b]$, avec $b > a$, continue, telle que $g(b) = g(a)$ ; comment donner une "expression littérale", valable pour tout $x$, des valeurs de la fonction périodique $f$, de période $b-a$, continue sur $\mathbb{R}$ et telle que sa restriction à $[a,b]$ coïncide avec $g$ ?

Considérons la fonction $\varphi$ définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\varphi(x) = x - (b-a)E\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$$

Cette fonction est périodique, de période $b-a$, ses points de discontinuité sont de la forme $a + p(b-a)$ avec $p \in \mathbf{Z}$ ; il y en a un, $a$, qui appartient à l'intervalle semi-ouvert $[a,b[$ et l'on a : $\varphi(a) = a$ ; $\lim\limits_{a^+} \varphi = a$ ; $\lim\limits_{a^-} \varphi = b$. De plus, sur $[a,b[$ on a $\varphi(x) = x$ ; enfin $\overline{\varphi(\mathbb{R})} = [a,b]$ et $g(a) = g(b)$ par hypothèse.

Le raisonnement fait plus haut permet alors de conclure que la fonction $f$ répondant aux conditions imposées peut s'écrire sous la forme :

$$x \longmapsto g\left[x - (b-a)E\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right].$$