

4

PERIODICITE

Les phénomènes vibratoires et les outils mathématiques de leur étude. Fonctions périodiques et fonctions trigonométriques

par F. COLMEZ — IREM de PARIS-SUD

Cet article est issu d'un document de travail des groupes de recherche sur la coordination des enseignements de physique et de mathématiques (INRDP-IREM). La partie "activités mathématiques" est reproduite ici, la partie "expériences physiques" est parue dans le Bulletin de l'Union des Physiciens *. C'est pourquoi on ne trouvera pas ici la mathématisation des phénomènes physiques, mais uniquement une étude du modèle mathématique. Les lecteurs sont invités à s'informer auprès de leurs collègues physiciens sur l'aspect physique de la question.

Les programmes expérimentés par la Commission Ministérielle de Rénovation de l'Enseignement des Sciences Physiques et Technologiques posent la question d'une étude des phénomènes vibratoires en Première sans le recours aux fonctions trigonométriques puisque ces dernières sont généralement étudiées en mathématiques assez tard dans l'année scolaire.

* R. MOREAU : Propagation dans un milieu à une dimension, Bulletin de l'U.D.P. n° 574 (Mai 1975), page 957.

En n'introduisant pas dès le départ les fonctions trigonométriques il est possible de tirer de cette contrainte les avantages suivants :

Pour la physique, une meilleure compréhension des phénomènes qui dans la présentation habituelle sont partiellement masqués par les propriétés particulières des fonctions trigonométriques.

Pour les mathématiques, tout un champ d'exercices sur les espaces vectoriels et les homomorphismes liés à la géométrie et aux changements de variables, et une présentation fonctionnelle intrinsèque des fonctions trigonométriques.

I - GENERALITES SUR LA PROPAGATION D'UN SIGNAL, LES INTERFERENCES ET LES ONDES STATIONNAIRES.

L'étude physique de la propagation d'un signal conduit au modèle mathématique suivant :

a) *La transmission d'un signal* dans un milieu peut être décrite ainsi :

Le mouvement de la source S étant défini par la fonction $t \mapsto f(t)$, le mouvement du point M situé à la distance d est défini par la fonction $t \mapsto f(t - \frac{d}{v})$; v est la *vitesse de propagation* et $\frac{d}{v}$ le retard du point M sur la source S (pour la justification expérimentale de ce modèle cf. l'article de MOREAU).

b) *Dans le cas de la propagation le long d'une droite, la réflexion de l'onde* peut se décrire par l'utilisation d'une *source fictive* placée symétriquement à la source réelle par rapport à l'*extrémité* et dont le mouvement est le même que celui de la source réelle ($t \mapsto f(t)$) dans le cas de l'*extrémité libre*, opposé à celui-ci ($t \mapsto -f(t)$) dans le cas de l'*extrémité fixe*.

En fait, les phénomènes physiques sont représentés par un couple de grandeurs, l'une se réfléchissant de la première façon et l'autre de la seconde.

En étudiant les calculs faits classiquement à l'occasion des *interférences* et des *ondes stationnaires*, on constate que le but principal est la prévision des *franges d'interférence* et des *noeuds*, c'est-à-dire des points dont le mouvement est nul. En fait, comme on va le montrer plus bas, il suffit, pour faire apparaître des mouvements nuls, d'utiliser des fonctions ayant la propriété :

$$\exists \Theta, \forall t \quad f(t + \Theta) = -f(t)$$

II - QUELQUES EXERCICES MATHÉMATIQUES

Les différents calculs à faire font intervenir, en même temps qu'une fonction $t \mapsto f(t)$, les différentes fonctions $t \mapsto f(t-a)$, $t \mapsto -f(t-a)$, $t \mapsto f(a-t)$, $t \mapsto -f(a-t)$.

Il est intéressant d'étudier le passage d'une de ces fonctions à une autre en utilisant et en comparant entre eux les trois langages suivants :

- Les changements de variable.
- Le langage géométrique appliqué aux courbes représentatives (symétries, translations).
- Les compositions de fonctions et les homomorphismes d'espaces vectoriels de fonctions (point de vue développé ci-après).

Notation: je propose de donner des noms aux applications suivantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$$r_a : t \mapsto t - a \quad (a \in \mathbb{R}) \quad s : t \mapsto -t$$

(initiales de retard et symétrie)

Exercice 1 (révision du programme de 4ème) :

- 1) Montrer que $\forall a \quad \forall b \quad r_a \circ r_b = r_{a+b} = r_b \circ r_a$
 $\forall a \quad r_a \circ r_{-a} = \text{Id} \quad \text{et} \quad r_a \circ s = s \circ r_{-a}$
 $s \circ s = \text{Id}$

- 2) L'ensemble $\mathcal{A}$ de toutes ces fonctions est un groupe pour l'opération $\circ$; étude des sous-groupes.

Exercice 2

- 1) On appelle $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel de toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Toute application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définit une application de $\mathcal{F}$ dans lui-même par :

$$G \quad \left| \begin{array}{l} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \\ f \mapsto f \circ g \end{array} \right.$$

On pourra dire que G opère dans $\mathcal{F}$; en fait c'est une application linéaire.

- 2) Pour tout élément de $\mathcal{A}$, l'opérateur correspondant est un isomorphisme.

Notations

$$\rho_a : f \mapsto f \circ r_a$$

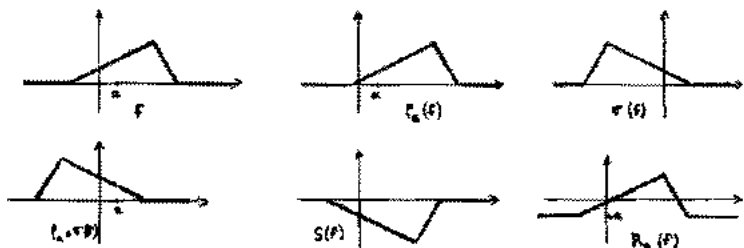
$$\sigma : f \mapsto f \circ s$$

3) Que peut-on dire de

$$R_a : f \mapsto r_a \circ f$$

$$S : f \mapsto s \circ f ?$$

Interprétation géométrique



4) Etude des opérateurs correspondant aux éléments de $\mathcal{A}$.

Exercice 3

On note $\mathcal{F}_T$ l'ensemble des fonctions vérifiant :

$$\rho_T(f) = f \quad (T \in \mathbb{R}_*)$$

1) C'est un espace vectoriel

2) De même l'ensemble $\mathcal{J}_T$ des fonctions vérifiant :

$$\rho_{T/2}(f) = S(f)$$

est un espace vectoriel, sous-espace du précédent.

3) On note : $\mathcal{F} = \bigcup_{T \in \mathbb{R}_*} \mathcal{F}_T$ et $\mathcal{J} = \bigcup_{T \in \mathbb{R}_*} \mathcal{J}_T$

$\mathcal{F}$ et $\mathcal{J}$ sont-ils des espaces vectoriels ?

4) Que peut-on dire des restrictions des ρ_a , σ , R_a et S à chacun des ensembles $\mathcal{F}$, $\mathcal{J}$, $\mathcal{F}_T$ et $\mathcal{J}_T$?

Exercice 4

Reprendre ce qui précède en utilisant, outre les fonctions r_a et s , les fonctions $h_a : t \mapsto at$ ($a \in \mathbb{R}$)

Remarquer en particulier que l'opérateur $H_a : f \mapsto f \circ h_a$ définit des isomorphismes de $\mathcal{J}_T$ sur $\mathcal{J}_{T/a}$ et de $\mathcal{F}_T$ sur $\mathcal{F}_{T/a}$.

Exercice 5

a) φ étant une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et v un élément de $\mathbb{R}_*^+$, on note Ψ l'application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$(t, x) \mapsto \Psi(t, x) = \varphi(t - \frac{x}{v})$$

On pose

$$f_x \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ t \mapsto \Psi(t, x) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g_t \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto \Psi(t, x) \end{array} \right.$$

Montrer les relations :

$$g_t = f_x \circ r_{-(t+\frac{x}{v})} \circ s \circ h_{\frac{1}{v}} \quad f_x = g_t \circ h_v \circ s \circ r_{t+\frac{x}{v}}$$

qui se traduisent par :

$$g_t(u) = f_x(t + \frac{x}{v} - \frac{u}{v}) \quad f_x(u) = g_t(x + v(t - u))$$

b) Retrouver cette situation en partant :

soit de la donnée pour tout x de $\mathbf{R}$ d'une application $f_x : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ vérifiant

$$\forall x_1 \quad \forall x_2 \quad f_{x_2}(u) = f_{x_1}(u - \frac{x_2 - x_1}{v})$$

soit de la donnée pour tout t de $\mathbf{R}$ d'une application $g_t : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ vérifiant

$$\forall t_1 \quad \forall t_2 \quad g_{t_2}(u) = g_{t_1}(u - v(t_2 - t_1)).$$

Remarque : cet exercice est très utile en physique pour l'élaboration du modèle de la propagation d'un signal.

Exercice 6

On pose $\Sigma_\alpha(f) = \rho_\alpha(f) + \rho_{-\alpha}(f) \quad (\alpha \in \mathbf{R}_+)$

Σ_α est un opérateur sur $\mathcal{F}$ ayant les propriétés suivantes :

1) $\Sigma_{-\alpha} = \Sigma_\alpha$

2) $\forall f \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_\Theta(f) = S(f) \Rightarrow \rho_\Theta(\Sigma_\alpha(f)) = S(\Sigma_\alpha(f)) \\ \rho_T(f) = f \Rightarrow \rho_T(\Sigma_\alpha(f)) = \Sigma_\alpha(f) \end{array} \right.$

3) Que peut-on dire des restrictions de Σ_α à $\mathcal{J}_T$ et $\mathcal{F}_T$?

4) Montrer que si $f \in \mathcal{J}_T$, $\Sigma_{T/4}(f) = 0$; plus généralement $\Sigma_\alpha(f) = 0$ si $\alpha \equiv T/4 \pmod{T/2}$

5) Si on pose $g : t \mapsto f(t-a) + f(t-b)$

on a $g = \rho_{\frac{a+b}{2}} \circ \Sigma_{\frac{a-b}{2}}(f)$.

Exercice 7

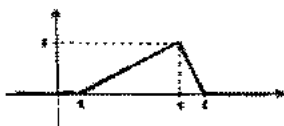
Etudier l'ensemble $\mathcal{U}$ des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définies par des expressions de la forme :

$$X \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i |x - a_i| \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i = 0$$

(où $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ et $a_i \in \mathbb{R}$),

les n , α_i et a_i changeant d'une fonction à l'autre.

Y a-t-il unicité de l'expression ? $\mathcal{U}$ est-il un espace vectoriel ?



La fonction représentée par le dessin ci-contre est-elle élément de $\mathcal{U}$?

III - UTILISATION DE CERTAINES FONCTIONS PERIODIQUES POUR L'ETUDE DES INTERFERENCES ET DES ONDES STATIONNAIRES

Le modèle mathématique classique des interférences et des ondes stationnaires conduit à l'étude des fonctions suivantes :

$$t \mapsto f\left(t - \frac{d_1}{v}\right) + f\left(t - \frac{d_2}{v}\right) = g(t)$$

$$t \mapsto f\left(t - \frac{x - \ell_1}{v}\right) + \epsilon f\left(t + \frac{x - \ell_2}{v}\right) = m(t)$$

$(\epsilon = +1 \text{ ou } \epsilon = -1)$

$$x \mapsto f\left(t - \frac{x - \ell_1}{v}\right) + \epsilon f\left(t + \frac{x - \ell_2}{v}\right) = n(x)$$

Habituellement f désigne une fonction trigonométrique ; mais en fait la seule propriété qui serve (au moins au début de l'étude) est l'appartenance de f à un espace $\mathcal{J}_T$ pour un réel T non nul donné (cf. II). Les autres propriétés, en particulier les symétries, sont plutôt des parasites didactiques, car elles entraînent que les fonctions m et n ont toutes des courbes représentatives de même forme (des sinusoides), ce qui ne se produit pas en général. Soit alors f un élément de $\mathcal{J}_T$.

1) D'après l'exercice 6, g est nulle si $\frac{a-b}{2} \equiv T/4 \pmod{T/2}$.

D'où l'existence de points immobiles, ceux qui vérifient :

$$d_1 - d_2 \equiv \frac{vT}{2} \pmod{\lambda} \quad (\lambda = vT : \text{longueur d'onde}).$$

On retrouve les hyperboles de la cuve à eau comme ensembles de points immobiles.

2) On constate que $-f\left(t + \frac{x - \ell_2}{v}\right)$ peut s'écrire,

$$f\left(t + \frac{x - \ell_2}{v} - \frac{T}{2}\right) = f\left(t + \frac{x - (\ell_2 + \frac{\lambda}{2})}{v}\right)$$

On peut donc se ramener à une expression unique :

$$m(t) = f\left(t - \frac{x - \ell_1}{v}\right) + f\left(t + \frac{x - \ell'_2}{v}\right)$$

en posant $\ell'_2 = \ell_2$ pour $\epsilon = 1$,

$$\ell'_2 = \ell_2 + \frac{\lambda}{2} \text{ pour } \epsilon = -1.$$

D'après l'exercice 6 on trouve un point immobile si

$$\frac{2x - (\ell_1 + \ell'_2)}{v} \equiv \frac{T}{2} \pmod{T} \text{ soit encore}$$

$$x \equiv \frac{\ell_1 + \ell'_2}{2} + \frac{\lambda}{4} \pmod{\frac{\lambda}{2}}$$

D'où les noeuds des ondes stationnaires.

Remarques :

1) Tout noeud est centre de symétrie des courbes représentatives des fonctions n (forme du signal à différents instants).

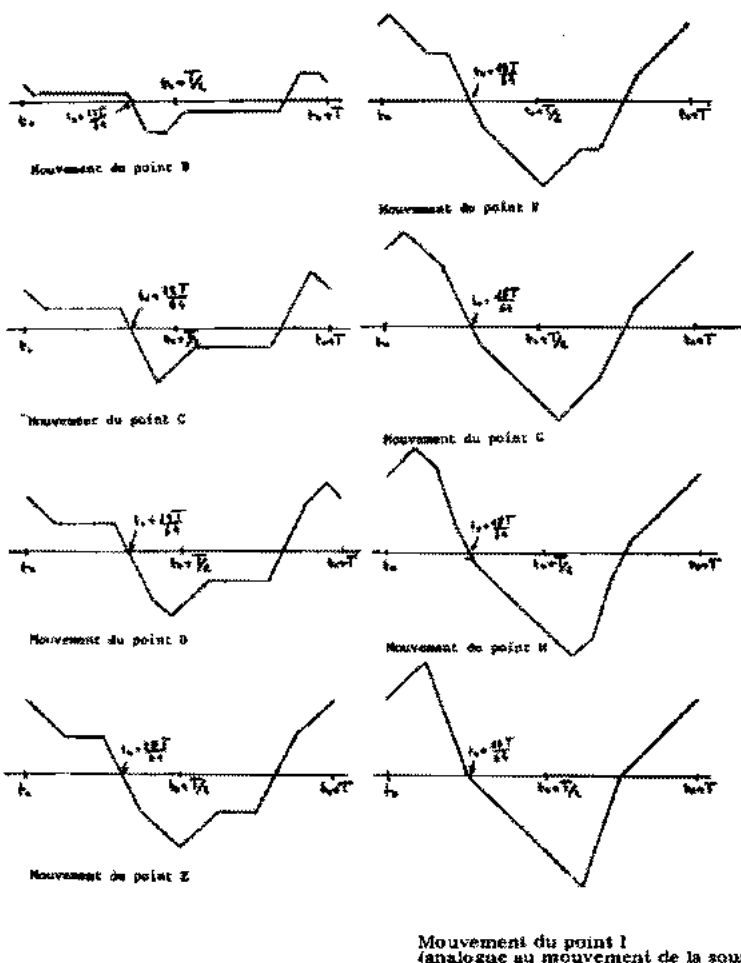
2) Si la source a un mouvement ne présentant pas de symétrie, les différentes courbes représentatives des fonctions g , m et n ont des allures différentes (c'est-à-dire qu'il n'est pas possible de passer d'une fonction à l'autre par composition avec les fonctions r_a , s ou h_a , ou d'une courbe à une autre par symétrie, affinité ou translation) (cf. plus bas les figures correspondant à un signal triangulaire non isocèle : Mouvement du point I *).

Par contre si l'on a une fonction f qui vérifie une relation de symétrie [par exemple: $\exists t_0 \quad \forall t \quad f(-(t-t_0)) = -f(t-t_0)$], les courbes représentatives des fonctions m et n ont deux à deux la même allure (c'est-à-dire qu'il est possible de passer de l'une à l'autre par affinité et translation) et elles présentent toutes des symétries.

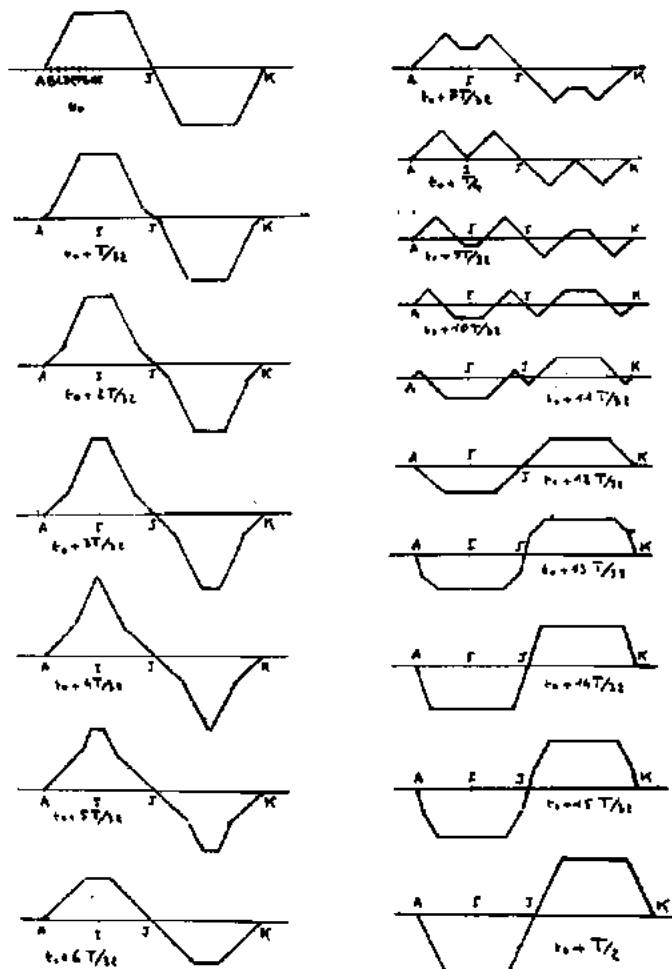
* Dans son article, MOREAU décrit le dispositif permettant d'obtenir ces courbes expérimentalement.

MOUVEMENTS DE DIFFERENTS POINTS (REPARTIS SUR UN QUART DE LONGUEUR D'ONDE) PENDANT UNE PERIODE.

Les points A, J, et K sont immobiles.



ALLURE DU SIGNAL, SUR UNE LONGUEUR D'ONDE A DIFFERENTS INSTANTS, AU COURS D'UNE DEMI-PERIODE



IV — PROPRIETES CARACTERISTIQUES DES FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

Dans ce qui précède, on a vu qu'en partant d'un signal quelconque élément de J_T l'étude des ondes stationnaires correspondantes faisait intervenir des courbes qui n'ont pas toutes la même allure, ce qui n'est pas le cas avec les fonctions trigonométriques car on obtient toujours des sinusoides. En fait, cette propriété est caractéristique des fonctions trigonométriques. La démonstration, du moins celle qui suit, n'est pas entièrement élémentaire car elle fait intervenir des arguments de continuité, de densité et de dérivabilité des fonctions convexes ; mais on obtient d'une manière élémentaire toutes sortes de propriétés et de formules qui se trouveront être, après identification, les formules trigonométriques connues, et ceci sans aucune référence à la géométrie ; ces exercices peuvent sans doute être proposés tôt dans l'année à des élèves de Première et servir d'introduction à l'étude des fonctions trigonométriques.

1) Propriété C

Une fonction a la propriété C si pour tout réel la somme de ses translatées par a et $-a$ lui est proportionnelle :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x-a) + f(x+a) = k f(x)$$

Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions vérifiant C.

2) Remarques

a) Si $f \in \mathcal{C}$, h définie par $h(x) = \alpha f(\beta x + \gamma)$ est également élément de $\mathcal{C}$; en d'autres termes $\mathcal{C}$ est stable par tous les opérateurs étudiés en II, à l'exception des R_λ . $\mathcal{C}$ n'est pas un vectoriel.

b) La phrase $\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists k \in \mathbb{R} \dots$ exhibe, sous une forme un peu cachée, une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; il sera plus clair et plus commode de récrire la condition C sous la forme :

$$\exists g (g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}) \quad \forall x \quad \forall y \quad (f(x+y) + f(x-y)) = g(y) f(x)$$

Supposons f non nulle ; il existe x_0 tel que $f(x_0) \neq 0$; on a alors $g(y) = \frac{f(x_0+y) + f(x_0-y)}{f(x_0)}$; g est entièrement définie par f ; de plus g est aussi un élément de $\mathcal{C}$.

En effet $\forall x, \forall y, \forall z$ on a

$$f(x+y+z) + f(x-y-z) = g(y+z) f(x)$$

$$f(x+y-z) + f(x-y+z) = g(y-z) f(x)$$

En additionnant et en regroupant on obtient

$$\begin{aligned}(f(x+y+z) + f(x+y-z)) + (f(x-y+z) + f(x-y-z)) &= (g(y+z) + g(y-z)) f(x) \\ g(z) f(x+y) + g(z) f(x-y) &= (g(y+z) + g(y-z)) f(x) \\ g(z) g(y) f(x) &= (g(y+z) + g(y-z)) f(x)\end{aligned}$$

En choisissant $x = x_0$ on peut simplifier par $f(x_0)$; on obtient

$$\forall y \quad \forall z \quad g(y+z) + g(y-z) = g(z) g(y)$$

c) Soit $f \in C$; s'il existe un intervalle $[x_0 - a, x_0 + a]$ sur lequel f s'annule alors f est nulle.

En effet il existe k tel que

$$\forall x \quad f(x-a) + f(x+a) = k f(x)$$

soit $x \in [x_0, x_0 + a]$; $x-a \in [x_0 - a, x_0]$; donc $f(x) = 0$ et $f(x-a) = 0$; il en résulte que $f(x+a) = 0$; or $x+a \in [x_0 + a, x_0 + 2a]$, donc f s'annule sur $[x_0, x_0 + 2a]$ et de même sur $[x_0 - 2a, x_0 + a]$ (démonstration analogue).

Par récurrence, f s'annule sur $[x_0 - 2^n a, x_0 + 2^n a]$, donc sur $\mathbb{R}$.

d) Les constantes non nulles sont des éléments de C sans zéro.

e) Les fonctions affines sont des éléments de C ayant un zéro.

f) Si $f(x_0) = 0$, $f \in C$ et $f \neq 0$, le point $(x_0, 0)$ est centre de symétrie de la courbe représentative de f .

En effet $\forall x \quad f(x_0 + h) + f(x_0 - h) = k f(x_0) = 0$, soit $f(x_0 + h) = -f(x_0 - h)$.

En particulier, si $f(0) = 0$, f est impaire.

3) Théorème

Les seules fonctions vérifiant C , continues et ayant au moins deux zéros sont les fonctions trigonométriques de la forme $x \mapsto \alpha \sin(\beta x + \gamma)$.

Ce qui suit est une démonstration progressive de ce théorème.

4) Toute fonction de C ayant au moins deux zéros est périodique

Ceci résulte de la remarque f) : soit x_1 et x_2 deux zéros de f .

Les deux points $(x_1, 0)$ et $(x_2, 0)$ du plan euclidien sont des centres de symétrie de la courbe représentative de f en axes orthonormés. Or, si une figure du plan admet deux centres de

symétrie distincts 0_1 et 0_2 , elle en admet une infinité (à savoir les points de la graduation engendrée par $0_1 - 0_2$). De plus elle est invariante par la translation τ de vecteur $2 \cdot 0_1 - 0_2$ (et par toutes les translations du groupe Z_τ).

5) Toute fonction de $\mathbb{C}$ non nulle continue ayant au moins deux zéros admet une plus petite période positive T .

En effet, si le groupe des périodes n'était pas discret, l'ensemble des zéros de la fonction serait partout dense dans $\mathbb{R}$ et, comme la fonction est continue, elle serait identiquement nulle.

Les zéros de la fonction forment donc une graduation de $\mathbb{R}$ de pas $T/2$ et entre deux zéros consécutifs la fonction garde un signe constant.

6) Compte tenu de la remarque a), nous nous ramènerons à la recherche d'une fonction ayant les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est périodique de plus petite période positive } T \\ f(0) = 0 \text{ et } f \text{ est impaire ; } f(T/2) = 0 \\ f(x) > 0 \text{ si } x \in]0, T/2[\end{array} \right.$$

Nous allons démontrer une série de petites propriétés facilement interprétées si on traduit f par $\sin$, g par $2\cos$ et T par 2π .

a)
$$g\left(\frac{T}{4}\right) = 0$$

En effet $f(x + \frac{T}{4}) + f(x - \frac{T}{4}) = g(\frac{T}{4}) \cdot f(x)$

Si $x = \frac{T}{4}$, on obtient $f(\frac{T}{2}) + f(0) = g(\frac{T}{4}) f(\frac{T}{4})$

Or $f(\frac{T}{2}) = f(0) = 0$ et $f(\frac{T}{4}) \neq 0$

b)
$$\forall x \quad f\left(\frac{T}{4} + x\right) = f\left(\frac{T}{4} - x\right)$$
 La courbe représentative

admet les droites $x = \frac{T}{4} + k \frac{T}{2}$ comme axes de symétrie ($k \in \mathbb{Z}$) ; en effet : $g(\frac{T}{4}) = 0$ et f est impaire.

c)
$$g(0) = 2 \text{ et } g \text{ est paire}$$
 On pourrait voir ceci également grâce à la remarque b).

d)
$$\forall y \quad g(y) = \frac{2}{f(\frac{T}{4})} f\left(y + \frac{T}{4}\right)$$

En effet, avec $x = \frac{T}{4}$, on obtient $f\left(\frac{T}{4} + y\right) + f\left(\frac{T}{4} - y\right) = g(y)f\left(\frac{T}{4}\right)$
 et $f\left(\frac{T}{4} + y\right) = f\left(\frac{T}{4} - y\right)$.

e) $\forall x \forall y \quad g(x+y) + g(x-y) = g(y)g(x)$ C'est la

remarque b) $g(x) > 0$ si $x \in]-\frac{T}{4}, \frac{T}{4}[$.

f) $\begin{cases} g(2x) = g^2(x) - 2 \\ f(2x) = g(x)f(x) \end{cases}$ formules de *duplication* (on fait $x = y$)

g) $f^2(x) + f^2\left(x + \frac{T}{4}\right) = f^2\left(\frac{T}{4}\right)$ relation de *Pythagore*

En effet : $f(x) = \frac{f(T/4)}{2} g\left(x - \frac{T}{4}\right)$ et $g^2(x) = 2 + g(2x)$

d'où $f^2(x) = \frac{f^2(T/4)}{4} \left[2 + g\left(2x - \frac{T}{2}\right) \right] = \frac{f^2(T/4)}{4} [2 - g(2x)]$

et $f^2\left(x + \frac{T}{4}\right) = \frac{f^2(T/4)}{4} [2 + g(2x)]$.

Remarque : BECKER (IREM de Bordeaux) m'a signalé qu'il est également possible d'étudier directement la fonction $h = \frac{1}{2}g$ qui, d'après la remarque b), vérifie la relation fonctionnelle

$$\forall x \forall y \quad h(x+y) + h(x-y) = 2h(x)h(y)$$

$h(0) = 1$ et h est une fonction paire (si $h \neq 0$) ; si on cherche de plus une fonction continue, il y a deux cas à envisager :

- h ne s'annule pas ; alors h est de la forme $x \mapsto \cosh ax$
- h s'annule ; alors h est de la forme $x \mapsto \cos ax$

7) Il existe une fonction et une seule vérifiant C, continue, s'annulant pour 0 et $T/2$ et prenant la valeur a pour $T/4$, c'est la fonction $x \mapsto a \sin \frac{2\pi x}{T}$.

Les formules de duplication permettent de calculer de proche en proche $g\left(\frac{T}{4 \cdot 2^n}\right)$ et $f\left(\frac{T}{4 \cdot 2^n}\right)$ ($n \in \mathbb{N}$), puis plus généralement les formules d'addition permettent de calculer $f\left(\alpha \frac{T}{4}\right)$ et de $g\left(\alpha \frac{T}{4}\right)$ pour toutes les valeurs de α de la forme $\frac{p}{2^n}$ ($p \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$).

Soit D l'ensemble de ces nombres dyadiques. D est dense dans $\mathbb{R}$.

Il y a maintenant deux manières de poursuivre :

a) Si on connaît les fonctions trigonométriques et leurs propriétés, on constate que f coïncide avec la fonction $x \mapsto a \cdot \sin \frac{2\pi x}{T}$ sur l'ensemble D . Comme D est dense dans $\mathbb{R}$ et que les deux fonctions sont continues, il y a coïncidence sur $\mathbb{R}$ tout entier.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a \sin \frac{2\pi x}{T}$$

b) On peut également montrer directement l'existence et l'unicité de la fonction f en remarquant que les formules d'addition nous ont permis de construire une application f' de D dans $\mathbb{R}$ et que cette application est uniformément continue ; comme D est dense dans $\mathbb{R}$, f' se prolonge d'une manière unique en une application uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; c'est l'application f cherchée.

On peut également démontrer, toujours sans utiliser les fonctions trigonométriques, que f est *dérivable*. En effet, la propriété C implique que f est convexe sur $]0, \frac{T}{4}[$ et par suite dérivable sauf au plus sur un ensemble de mesure nulle, ce qui est beaucoup plus qu'il n'en faut ; pour continuer, il suffit de savoir que f est dérivable en un point.

8) f est dérivable

Soit x_0 un point de $]0, T/4[$ où f est dérivable ; posons $b = f'(x_0)$.

$$\text{On a } f(x_0 + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}) + f(\frac{h}{2} - x_0 - \frac{h}{2}) = g(x_0 + \frac{h}{2}) f(\frac{h}{2})$$

$$\text{Soit encore } f(x_0 + h) - f(x_0) = g(x_0 + \frac{h}{2}) f(\frac{h}{2})$$

$$\text{Or } b = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} g(x_0 + \frac{h}{2}) \frac{f(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\text{Il en résulte que } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} = \frac{2b}{g(x_0)} \quad \left(g(x_0) \neq 0 \text{ puisque } x_0 \in]0, \frac{T}{4}[\right)$$

Remarque: on vient de montrer que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h}$ existe ; c'est ce qu'on admet pour la fonction $\sin$ en Première ; la fin de la démonstration est celle qu'on fait en Première.

On obtient $f'(x) = kf(x + \frac{T}{4})$ (k une constante)

Il en résulte que f est indéfiniment dérivable ; en particulier :

$$f''(x) = kf'(x + \frac{T}{4}) = k^2 f(x + \frac{T}{2}) = -k^2 f(x)$$

d'où l'équation différentielle :

$$f'' + k^2 f = 0.$$

C'est cette équation différentielle, si fréquente en physique, qui fait toute l'importance, finalement, des fonctions trigonométriques.

9) Conclusion

Une présentation des fonctions trigonométriques, en Première, pourrait se faire en s'inspirant de ce qui précède.

La recherche de fonctions vérifiant C peut être motivée par les exercices proposés plus haut et les expériences de physique.

Une fois les formules d'addition trouvées, on peut s'en servir pour constater la coïncidence de certaines valeurs prises par la fonction cherchée avec des valeurs tirées des tables trigonométriques et admettre alors l'existence et l'unicité.