Dans dix ans, la théorie des catégories remplacera-t-elle celle des ensembles ?

par Jacqueline FOURASTIÉ

Cela devient courant de donner une réponse positive à la question que pose ce titre. L'objet de cet article est à la fois de donner une initiation très rapide à la *théorie des catégories* (1) et surtout d'attirer l'attention sur les avantages et surtout sur les dangers de cette nouvelle modernisation des mathématiques. Il faut que nous sachions où nous allons.

Je commence par situer ma position. L'enseignement que j'ai reçu (je suis licenciée de 1958, agrégée de 1963) se situait entre l'ancien et le moderne. Je suis chargée d'un cours de Mathématiques appliquées à l'économie, au Conservatoire National des Arts et Métiers ; les exigences de mes élèves, adultes et praticiens, m'ont amenée à rester dans cette frange entre l'ancien et le moderne que beaucoup d'entre vous renieraient ... mais j'espère prendre, au profit de mes élèves, ce qu'il y a de formation logique de base indispensable et de généralisation dans les mathématiques modernes, et ce qu'il y a de plus directement quantifiable, et donc appliqué, dans les mathématiques traditionnelles.

I. Initiation rapide à la théorie des catégories

Un profe :ur de Paris VI m'a "joué le tour" très fructueux de me demander une critique de cette théorie comme seconde thèse d'Etat, les fameuses "propositions données par l'Université".

(1) Pour une initiation plus complète, voir le livre récemment paru (dont Maurice LOI a parlé dans le Bulletin 293, page 390) de P. Hilton, *Le Langage des catégories*, CEDIC, 1973.
Si vous voulez aller plus loin, peut-être même plus "lisible" : Jaffard et Poitou, *Introduction aux catégories et aux problèmes universels*, Ediscience, 1971. Plus difficiles à lire : Mac Lane et Birkoff, *Algèbre*, 2 vol. Gauthier-Villars ; et Ehresman, en particulier : *Catégories et Structures*, Dunod, Paris, 1965.

Je résiste à l'envie de vous faire une présentation élégante, du point de vue mathématique, à partir de l'exemple qui est à l'origine de toute la théorie (puisqu'il est placé en liminaire du premier article sur les catégories (1)). Cet exposé serait inutilement difficile car il fait appel au "dual" et au "bidual" dont nous n'avons pas besoin ici. Je me contenterai de quelques définitions et de quelques exemples.

1. *Définition des catégories*

A tout couple (A,B) d'objets de $\mathcal{U}$ on peut faire correspondre un ensemble Hom (A,B) dont les éléments sont les morphismes ou flèches de source A et de but B. Une *catégorie* est définie par :

— les objets A

— pour tout couple (A,B) d'objets de $\mathcal{U}$, un ensemble Hom (A,B) qui est donc l'ensemble des transformations (ou "morphismes") de A en B. Si deux couples (A,B), (A',B') sont distincts, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(A,B)$ est disjoint de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(A',B')$

— pour tout triplet (A,B,C) d'objets de $\mathcal{U}$, une application de l'ensemble produit Hom (A,B) $\times$ Hom (B,C) dans l'ensemble Hom (A,C) donne :

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "\beta"] & \\ A \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr, "\beta \circ \alpha"'] & & C \end{tikzcd}$$

avec $\alpha \in$ Hom (A,B)
$\beta \in$ Hom (B,C)
$\gamma \in$ Hom (A,C)

Il faut qu'il y ait associativité (c'est un axiome).

— pour tout objet A de $\mathcal{U}$, il existe un élément neutre e_A appartenant à Hom (A,A) tel que :

$e_A \circ \alpha = \alpha$ pour toute flèche α de but A

$\beta \circ e_A = \beta$ pour toute flèche β de source A

Il est facile de démontrer que cet élément neutre est unique.

Voici quelques exemples :

— le plus classique est la *catégorie des ensembles*. Les objets sont les ensembles. Pour deux ensembles E et F, l'ensemble Hom (E,F) est l'ensemble des applications de E dans F. Si l'on a :

$$E \xrightarrow{\alpha} F \qquad\qquad F \xrightarrow{\beta} G$$

(1) *General Theory of Natural Equivalences* (autrement dit "Théorie générale des Equivalences naturelles", "American Society Transactions", 1945, vol. 56, p. 321-294) par Mac Lane et Eilenberg, qui sont les "inventeurs" de la théorie ... et qui, en 1945, en avaient déjà vu bien des applications.

on peut composer α et β. L'identité e_A est l'application identique de A dans lui-même.

Cette "catégorie de tous les ensembles" a fait naître bien des espoirs. Nous connaissons le problème insoluble de "l'ensemble de tous les ensembles" qui ne peut être un ensemble puisqu'il devrait se comprendre lui-même. On peut parler de la catégorie de tous les ensembles. Ouf ! a-t-on dit ... jusqu'au moment où on a vu que le problème se reposait au niveau de "la catégorie de toutes les catégories".

— autre exemple, les *groupes*. Les objets sont les groupes, Hom (A,B) est l'ensemble des homomorphismes (1) du groupe A dans le groupe B.

— les *anneaux* aussi sont des catégories, avec les mêmes définitions.

— on a beaucoup généralisé : les *espaces topologiques* sont des catégories : les objets sont les espaces topologiques ; et les morphismes toutes les transformations continues. On a été jusqu'à dire qu'une *Economie* est une catégorie dont les objets sont les producteurs et les consommateurs, et les morphismes les échanges !

2. *Qu'est-ce qu'un foncteur ?*

Ne croyez pas qu'on s'arrête en si bon chemin. La notion de catégorie est très riche et peut nous mener très loin. On parle de *foncteurs*. Il y a des foncteurs covariants et des foncteurs contravariants. La définition de Jaffard et Poitou me semble la plus claire :

"Un foncteur (covariant) est aux catégories ce qu'une fonction est aux ensembles". En gros, un foncteur d'une catégorie $\mathfrak{U}$ dans une catégorie ϑ comporte les données suivantes :

— pour tout objet A de $\mathfrak{U}$ on donne un objet de ϑ noté F(A),

— pour toute flèche $A \to B$, α, de $\mathfrak{U}$ on donne une flèche de ϑ notée $F(\alpha)$.

---

(1) Un homomorphisme est une transformation f telle que pour tout couple (x,y) d'éléments d'un groupe G : $f(x_o y) = f(x) * f(y)$.

On suppose que la flèche $F(\alpha)$ a pour source $F(A)$ et pour but $F(B)$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "F"] \arrow[d] & B \arrow[d] & \text{dans } \mathcal{U} \\ F(A) \arrow[r, "F(\alpha)"'] & F(B) & \text{dans } \vartheta \end{tikzcd}$$

Des axiomes sont nécessaires :

$F(e_A) = e_{F(A)} \qquad \forall A \in \mathcal{U}$

$F(\alpha \circ \beta) = F(\alpha) * F(\beta)$ quel que soit le couple (u,v) de flèches composables de $\mathcal{U}$.

Le foncteur est contravariant s'il inverse le sens des flèches (à $F(B)$ correspond $F(A)$).

Le foncteur comprend donc une fonction opérant sur les objets, et une autre opérant sur les morphismes. Nous sommes bien dans la logique des catégories.

Un *exemple* intéressant est le foncteur *ensemble des parties*. Dans la catégorie des ensembles, un foncteur peut avoir pour fonction objet l'ensemble des parties d'un ensemble E : $\mathcal{P}(\alpha)$ et pour fonction-morphisme, la fonction

$$F \xrightarrow{\alpha} G$$

qui applique à chaque sous-ensemble X de F son image $\alpha(X)$ dans G. Si α est l'identité, chaque $\alpha(X)$ est égal à X.

Si $f \circ g$ est définie, alors $\alpha(f \circ g) = \alpha(f) \circ \alpha(g)$

c'est-à-dire que l'image par f de l'image par g d'un sous-ensemble X est son image par $f \circ g$.

Je vous épargne une autre notion essentielle, celle que Mac Lane et Eilenberg avaient appelée "transformations naturelles", mais que les savants qui les ont suivis ont préféré nommer de façon infiniment plus ... à la portée de tous : "les morphismes de foncteurs" !

Résumons-nous ! La théorie des catégories apporte une grande richesse à la théorie des ensembles, puisqu'elle permet de joindre aux "objets" (nous disions "éléments") des transformations. Il y a là une généralisation dont l'intérêt est évident. Je vais essayer de vous dire ce que j'en pense de bon et de moins bon, dussé-je essuyer vos "foudres" (du moins celles de ceux d'entre vous qui ont étudié cette théorie et réfléchi aux conséquences que pourrait avoir son introduction à un niveau élémentaire).

II. Avantages de la théorie des catégories

Quel est son intérêt essentiel ? C'est une théorie interne à l'algèbre, qui apporte dans cette science un *degré de généralisation important*, analogue à celui qu'a pu apporter la théorie des ensembles, ou celle des groupes.

L'exemple de la théorie des groupes peut permettre de comprendre à quoi correspond cette généralisation. Quand on découvre que deux ensembles aussi divers que celui des nombres entiers et celui des rotations planes sont des groupes, on se trouve avoir du même coup établi un grand nombre de démonstrations pour l'un comme pour l'autre de ces deux ensembles : nos démonstrations deviennent plus élégantes, et nous faisons une grande économie d'énergie. Les catégories semblent un effort réussi dans ce sens ; c'est d'ailleurs le but que s'assignaient les "inventeurs" :

"En un sens mathématique, notre théorie fournit des concepts généraux applicables à toutes les branches des mathématiques abstraites, et contribue ainsi à la tendance courante qui cherche à traiter de façon uniforme des disciplines mathématiques différentes. En particulier, elle fournit des occasions de comparer les constructions et les isomorphismes qui interviennent dans les différentes branches des mathématiques ; de cette façon, elle peut à l'occasion suggérer par analogie de nouveaux résultats" (1).

Nul doute que ce programme ne soit rempli. On trouve des applications variées ; un exemple intéressant et récent est l'article de M. Liévine sur les programmes linéaires (2) ; mais il y en a des multitudes d'autres ; vous en trouverez des quantités, ne serait-ce que dans les "manuels" que j'ai cités au début.

Pourtant la théorie des catégories semble déjà s'être heurtée à certaines impasses : il y avait un espoir positif dans la tentative de Mac Lane et Eilenberg à propos de l'*ensemble de tous les ensembles* ; nous venons de voir que cela n'a fait que repousser un peu plus loin le problème.

De même, Eilenberg et Mac Lane espéraient parvenir à une théorie reposant essentiellement sur les "morphismes", et à la limite, pouvant se passer des "objets". J'avoue me réjouir de ce que, à ma connaissance, ils n'aient pas été suivis, car ce serait un progrès vers une plus grande abstraction ... ce dont je me permets de croire que ce n'est pas un progrès en soi.

---

(1) Mac Lane et Eilenberg, op. cit. p. 236.

(2) *Bulletin de mathématiques économiques*, n° 8, avril 1972.

III. Critiques

Je ne résiste pas — pour vous mettre en garde — à vous citer un texte de M. Maurice Allais : "Une théorie, logiquement inconsistante et contredite par les faits, n'offre généralement, sur le plan scientifique tout au moins, qu'un danger limité, ou son insuffisance peut être rapidement décelée. Mais ce n'est pas le cas de certaines théories mathématiques dont la compréhension de la partie purement logique exige de tels efforts que trop souvent le lecteur épuisé n'a plus la force suffisante pour exercer son esprit critique au niveau des hypothèses comme à celui des résultats, et réaliser que du point de vue de l'analyse des faits ces théories ne reposent que sur du sable" (1). Je crains que vous et moi nous trouvions dans la position de ce lecteur épuisé ... mais il y a une chose certaine, il y a suffisamment de gens sérieux — épuisés ou non — qui se sont penchés sur la théorie des catégories pour qu'on puisse affirmer qu'elle ne repose pas que sur du sable !

Les critiques que je me permets de faire sont de plusieurs ordres :

La question du langage

Il est vrai que le langage ensembliste a l'air de rentrer assez bien dans la tête et les esprits des enfants même jeunes. Il est vrai également que toute technique doit avoir son langage propre et toute science aussi ; mais je crains fort que la particularisation de langage ne finisse par faire de nous des spécialistes incapables de communiquer entre eux.

A ce propos, laissez-moi vous raconter une anecdote, vécue. Quand le professeur dont j'ai parlé plus haut m'a donné le sujet de seconde thèse que vous connaissez, il a poussé la bonté jusqu'à ajouter à ce sujet — outre des commentaires personnels fort intéressants, et dont je m'inspire ici — une page photocopiée d'un dictionnaire de mathématiques en langue allemande. J'ai honte de le dire : j'ignore tout de cette langue ! Qu'à cela ne tienne : j'ai apporté la page en question à une collègue (économiste ... mais, croyez bien, pas ignare en mathématiques !) qui connaît très bien l'allemand. Comme elle est pleine de zèle, elle a passé beaucoup de temps sur ce papier, pour être ensuite obligée de me le rendre en me disant qu'il y avait là une suite de mots qu'elle arrivait à

(1) M. Allais "L'économique en tant que Science" *Revue d'Economie Politique*, 1968, p. 16.

comprendre à peu près individuellement, mais qu'elle n'arrivait à donner de sens à aucune phrase ... Je vous ferai même l'aveu que — la rédaction d'une seconde thèse se faisant, selon la tradition, en 30 jours — je n'ai pas trouvé de traducteur en temps utile.

Je me suis vite expliqué la chose, en lisant dans P. Hilton "nous établissons alors, par la méthode de l'approximation simpliciale, que ce groupe fondamental combinatoire est isomorphe au groupe fondamental du polyèdre soustendant le complexe simplicial" (p. 86). Ce sont bien des mots de résonnance française, mais leur assemblage ne constitue pas une phrase compréhensible "au commun des mortels". Dites-moi : combien d'heures de travail faut-il pour être apte à comprendre cette phrase ? C'est à décourager les profanes ! (j'ajoute qu'il s'agit d'un élément de programme proposé pour l'enseignement du second degré !).

L'axiome d'associativité

M. Ville (1) affirme que "la *nature a horreur de l'associativité*". Or vous avez vu que c'est un axiome des catégories qu'il y a associativité. Examinons ce que cela veut dire : pour qu'il y ait composition de deux morphismes, il faut que le but du premier soit la source du second. Il y a pour le moment des enfants qui jouent au ballon sous mes fenêtres, l'axiome d'associativité est mis en défaut chaque fois que l'enfant-but n'attrape pas le ballon, et donc ne peut être la source, c'est-à-dire celui qui lance ! Cherchons d'autres exemples. Avez-vous remarqué que la soustraction n'est pas associative, la division non plus ? On s'en tire avec des sommes et des produits algébriques, mais dès l'arithmétique élémentaire, nous voici "coincés". L'opération "complémentaire" dans les ensembles n'est pas non plus associative. Et même quand parfois l'associativité est possible, je pense par exemple au produit de deux matrices, encore faut-il que le but de la première soit la source de la seconde, autrement dit, pour le moins que la première matrice ait autant de colonnes que la

(1) A propos du quantitatif, vous rappelez-vous la préface "du" Gouyon de Mathématiques Spéciales qui me hante depuis ... 1955 où je l'ai lue, et la petite histoire du grand mathématicien de l'an 2000 qui a besoin, pour ses savantes recherches, de $\int_0^1 dx$. Il s'adresse à la machine électronique du coin ... laquelle est si engorgée que c'est seulement au bout d'un an qu'elle sort le résultat (qui d'ailleurs ne peut que la mettre en panne) : 0,9999 ... Durant ce laps de temps, notre savant, tel Vatel, s'est suicidé. Nous n'en sommes pas là, mais je dois dire que je n'observe pas, depuis 12 ans que j'enseigne dans le supérieur, que le niveau mathématique de mes élèves se soit élevé, bien au contraire ! Il y a là un problème que les machines électroniques de poche ne suffiront pas à résoudre !

seconde a de lignes (et encore, je ne m'attache pas à la signification de ces matrices !). Il est fréquent que le produit de deux morphismes

$$\alpha \frown \beta$$

soit absurde.

Pour que le produit de trois morphismes le soit,

$$\alpha \quad \beta \quad \gamma = \nu \qquad (\nu \text{ étant le morphisme absurde})$$

il suffit que

$$\alpha \quad \beta = \nu$$

ou

$$\beta \quad \gamma = \nu$$

Croyez-moi, c'est fréquent ! (Si vous ne me croyez pas, cherchez vous-même des exemples !).

Une mathématique des catégories, qui suppose l'associativité, peut-elle être adéquate au réel qui, en général, l'exclut ?

Ma *conclusion* est plutôt un point d'interrogation, adressé à ceux de mes collègues qui ont pu ou pourront trouver le temps d'approfondir de tels sujets. Je souhaite qu'ils me disent ce qu'ils auront pensé.

Pour moi, la théorie des catégories appartient à un courant qui tend à tirer les mathématiques du côté de l'abstraction, en se confinant dans une attitude strictement logique. L'intérêt est qu'à la limite, on pourra peut-être faire une importante économie de pensée et de raisonnement : le savoir mathématique tiendra peut-être dans peu de temps sous un très petit volume de démonstrations très générales s'appliquant à une multitude de cas particuliers, et ceci est un avantage certain.

Cependant, je me demande si les sciences appliquées pourront bénéficier de ce progrès : ce qu'on gagne en abstraction, on le perd en contact avec le réel. Il existe un aspect de la réalité, plus orienté vers le quantitatif (1) qui devrait intéresser les utilisateurs comme les jeunes étudiants et élèves et dont de telles théories risquent de séparer encore "la mathématique". On risque d'avoir d'un côté *une science* mathématique rationnelle, réduite à un petit volume

---

(1) M. Ville, professeur à Paris VI et membre de mon jury de thèse, m'a fait l'honneur de s'intéresser — outre aux questions sur les catégories — à ma première thèse : *Essai sur la mesure des quantités économiques* (Mouton, 1974). Il a apporté, en particulier, des remarques passionnantes à mon chapitre sur le nombre. Je cite ici ce qu'il a bien voulu me dire et qui se trouve à la page 108 de la thèse.

de concepts et de théorèmes de haute abstraction, et d'un autre côté des mathématiques concrètes très différenciées (topologie, géométrie, mathématiques appliquées à la biologie, à la psychologie, à l'économie, à la macrophysique, à la microphysique, à l'astronomie, à la chimie ...). Ces deux aspects ont-ils des points communs ?

Je pose la question autrement : nous autres, mathématiciens, qui enseignons à des praticiens, devrons-nous un jour faire schisme avec les mathématiciens "purs" qui ne s'intéressent qu'à la mathématique et pas à ses applications ? Pour le moment, j'ai l'impression, dans mon enseignement comme dans ma recherche, d'être inconfortablement installée entre les deux chaises de "la mathématique pure" que j'ai apprise et que j'estime, et de "la mathématique appliquée" dont mes élèves et les chercheurs économistes que je fréquente ont besoin.