

1

HISTOIRE ET LEGENDE**Histoire de la découverte
des logarithmes***par Gilbert ARSAC, I.R.E.M. de Lyon.*

1. Dans notre enseignement, et dans les mathématiques en général, la fonction logarithme apparaît sous deux formes :

— le logarithme décimal, que l'on trouve dans les "tables de logarithmes", est un outil pratique utilisé pour le calcul numérique ;

— le logarithme népérien, introduit en classe de terminale, est plutôt un outil théorique.

La même différence se retrouve dans les méthodes d'introduction de ces deux logarithmes : alors que le logarithme népérien s'introduit par des procédés théoriques, soit comme primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, soit comme fonction inverse de la fonction exponentielle, le logarithme décimal peut être introduit de manière élémentaire, sinon rigoureuse, en comparant la progression géométrique de raison 10 avec la suite des nombres naturels, c'est-à-dire avec la progression arithmétique de raison 1, et cette méthode débouche naturellement et rapidement sur le calcul effectif d'une table de logarithmes.

Ecrivons en effet ces deux progressions parallèlement :

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 10 & 10^2 & 10^3 & \dots & 10^m & \dots & 10^n & \dots & 10^{m+n} & \dots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & & m & & n & \dots & m+n & \dots \end{array}$$

La formule $10^{m+n} = 10^m \times 10^n$ montre que ces deux suites de nombres possèdent la propriété suivante, appelée dans la suite de cet article propriété P, et vérifiée plus généralement lorsqu'on

écrit en parallèle une progression géométrique et une progression arithmétique quelconques :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & k & k^2 & \dots & k^n & \dots & \\ 0 & b & 2b & \dots & nb & \dots & \end{array}$$

P : Le produit de deux nombres de la première suite figure dans cette suite et a pour associé, dans la deuxième suite, la somme des associés des deux nombres de départ.

(Dans cet énoncé, "l'associé" d'un nombre de la première suite désigne le nombre de la deuxième suite écrit en-dessous : l'associé de 10^n est n).

Par conséquent, si l'on appelle logarithme d'un nombre de la première suite son associé dans la deuxième, c'est-à-dire si l'on pose $\log 10^n = n$, on voit que l'on a :

$\log 10^n \times 10^m = \log 10^{n+m} = n+m = \log 10^n + \log 10^m$; cette égalité est l'amorce de la formule générale $\log xy = \log x + \log y$.

Ainsi, nous pouvons considérer le tableau de nombres que nous avons écrit comme une première table de logarithmes. Cette première table est rudimentaire car, d'une part les valeurs données à la variable (1;10;100) sont trop éloignées les unes des autres, et d'autre part les valeurs prises par la fonction (1... n) sont évidentes, autrement dit cette "table" peut être avantageusement remplacée par la simple formule : $\log 10^n = n$.

Pour améliorer le résultat, il faut pouvoir donner à la variable des valeurs plus rapprochées. On y parvient, dans une première étape, en insérant, entre deux nombres consécutifs de la première progression, leur moyenne géométrique, et, entre deux nombres consécutifs de la deuxième, leur moyenne arithmétique. On obtient ainsi deux suites :

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & \sqrt{10} & 10 & (\sqrt{10})^3 & 10^2 \dots & 10^m & (\sqrt{10})^{2m+1} & 10^{m+1} \dots & & & \\ 0 & 1/2 & 1 & 3/2 & 2 & m & m + \frac{1}{2} & m + 1 & & & \end{array}$$

Ces deux suites, qui sont simplement la progression géométrique de raison $\sqrt{10}$ et la progression arithmétique de raison $\frac{1}{2}$, possèdent encore la propriété P, ce qui exprime que la règle $10^{m+n} = 10^m \times 10^n$ est encore valable si m et n sont remplacés par des nombres de la forme $P/2$ où p est naturel. Si nous définissons encore le logarithme d'un nombre de la première suite comme étant son associé dans la deuxième, la formule $\log xy = \log x + \log y$ est toujours vérifiée grâce à la propriété P

et nous avons donc obtenu une deuxième table de logarithmes plus précise que la première.

En itérant ce procédé, on obtient évidemment des tables de logarithmes de plus en plus précises ; les valeurs prises par la variable, c'est-à-dire les nombres de la première suite, sont de plus en plus rapprochées et autorisent le calcul par interpolation du logarithme des nombres ne figurant pas dans la première suite.

Par exemple, à l'étape suivante, on obtient les suites :

$$\begin{array}{cccccc} 1 & \sqrt[4]{10} & \sqrt{10} & (\sqrt[4]{10})^3 & 10 \dots & \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 \dots & \end{array}$$

$$\text{d'où } \log \sqrt[4]{10} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \log \sqrt{10} = \frac{1}{2}.$$

Prenons pour valeurs approchées :

$$\sqrt[4]{10} \approx 1,78 \quad \text{et} \quad \sqrt{10} \approx 3,16 ; \text{ ainsi on a :}$$

$$\log 1,78 \approx 0,25 \quad \text{et} \quad \log 3,16 \approx 0,5$$

On en déduit par interpolation une valeur approchée de $\log 2$:

$$\log 2 \approx 0,25 + \frac{0,5 - 0,25}{3,16 - 1,78} \times (2 - 1,78)$$

$$\text{C'est-à-dire : } \log 2 \approx 0,29$$

(la valeur approchée à $\frac{1}{10}$ près est en réalité 0,30).

2. C'est par cette méthode que le mathématicien anglais BRIGGS put calculer sa table de logarithmes décimaux à 15 décimales publiée en 1624 : il avait répété plus de cinquante fois l'opération précédente, c'est-à-dire que la première de ses deux suites était la progression géométrique de raison $10^{1/2}$ ⁵⁴.

Les outils mathématiques nécessaires au travail de BRIGGS, à vrai dire essentiellement des techniques de calcul, étaient disponibles à la fin du XVIème siècle. La propriété P avait été signalée par CHUQUET en 1484 puis, indépendamment, par STIFEL en 1544 ; ce dernier l'avait même étendue aux exposants fractionnaires et aux exposants négatifs. Il ne faut pas croire qu'il s'agissait d'une remarque banale : la simplicité de la formule qui l'exprime actuellement ($10^{m+n} = 10^m \times 10^n$) tient à l'emploi de la notation exponentielle 10^n , et de la notation littérale qui désigne par m et n des nombres quelconques ; ces deux inventions sont postérieures à la découverte de la propriété P. On peut même noter, pour la petite histoire, que le signe = est, lui aussi,

postérieur (il date de 1557). Au lieu d'écrire la progression géométrique de raison 2 (à propos de laquelle ils énoncent la propriété P) sous la forme :

$$1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n, \dots,$$

CHUQUET et STIFEL écrivent :

$$1, 2, 4, 8, 16, 32,$$

ce qui rend plus difficile la découverte de propriétés générales. On voit par là l'importance d'une notation bien choisie.

Si les outils mathématiques étaient disponibles, l'état de la science à la fin de XVI^{ème} siècle était également propice à la découverte d'un instrument de calcul commode : le développement du commerce et de la banque était la source de nombreux problèmes de calcul numérique, auxquels les mathématiciens en renom consacraient une bonne partie de leurs efforts ; dans ce domaine, on trouve, bien entendu, les noms de mathématiciens italiens comme PACIOLI et TARTAGLIA ; d'autre part, le développement de l'astronomie avait des motivations relevant à la fois de la science pure et des applications ; il s'agissait par exemple d'améliorer la précision et la sécurité de la navigation ; dans ce dernier domaine, on trouve évidemment des Anglais ; et BRIGGS lui-même, titulaire d'une chaire d'astronomie, était un spécialiste d'astronomie nautique.

La résolution de problèmes tels que la détermination d'une longitude en mer, celle de la route la plus courte d'un point à un autre, aussi bien que celle des problèmes d'astronomie théorique, impliquaient d'importants calculs, particulièrement de trigonométrie sphérique. La difficulté de ces "calculs astronomiques" est restée légendaire, et on ne surprendrait guère nos élèves du XX^{ème} siècle en leur apprenant que les plus redoutés étaient les calculs trigonométriques et les extractions de racines carrées.

Ainsi, tout permet de pronostiquer, à posteriori il est vrai, l'apparition des premières tables de logarithmes décimaux à la fin du XVI^{ème} siècle. Si la première table connue était celle de BRIGGS, notre récit s'arrêterait ici, le seul problème étant de comprendre comment BRIGGS a pu arriver d'emblée à une telle précision alors que l'on aurait pu s'attendre à voir précéder sa table à 15 décimales par des ancêtres plus primitifs.

Notre pronostic est d'ailleurs confirmé par le fait qu'un Suisse, BURGI, horloger et mathématicien, avait, indépendamment de BRIGGS, publié une table de logarithmes en 1620, dont

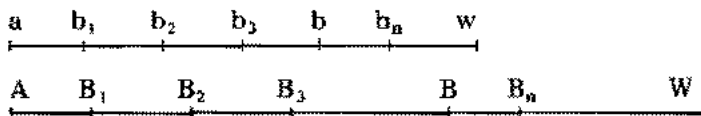
le principe de calcul semble bien avoir été celui que nous avons exposé.

L'invention des logarithmes, *sous leur aspect outil de calcul*, était bien "dans l'air" à cette époque.

3. Or, tout l'intérêt de l'histoire réside dans le fait que la première table de logarithmes, due à l'Écossais NEPER et parue à Edimbourg en 1614, est non pas une table de logarithmes décimaux mais, bel et bien, une table de logarithmes népériens à sept décimales. Pourtant, à cette époque, la notion de fonction n'était pas encore clairement dégagée (il ne s'agit pas ici de la notion contemporaine de fonction mais de la notion "classique" de fonction numérique telle qu'elle s'est précisée peu à peu à la suite de DESCARTES (1)). A fortiori, la notion de fonction dérivée était-elle inexistante puisqu'on ne savait même pas définir la notion de dérivée en un point. Or ces deux notions de fonction et de dérivée nous semblent actuellement indispensables à la définition de la fonction logarithme népérien. La question à laquelle nous allons répondre maintenant est donc celle-ci : *comment NEPER a-t-il pu parvenir à la notion de logarithme qui porte son nom ?* Ensuite, nous examinerons le procédé de calcul effectif de sa table de logarithmes.

4. *Aspect théorique du travail de NEPER : la résolution d'une équation fonctionnelle au XVIème siècle.*

L'idée de départ de NEPER est bien toujours de mettre en parallèle une progression géométrique et une progression arithmétique, et d'utiliser la propriété P ; mais, afin de mettre en évidence la correspondance entre les deux progressions, NEPER imagine la représentation géométrique suivante :



Sur un *segment* $[aw]$ de longueur unité, il marque les points b_1, b_2, \dots, b_n , tels que $b_1 w = k$, $b_2 w = k b_1 w = k^2$, \dots , $b_n w = k b_{n-1} w = k^n$, ...etc..., où k est un nombre fixé vérifiant $0 < k < 1$.

(1) Le "Discours de la méthode" est de 1637. La notation $f(x)$ a été introduite par Euler en 1734. On peut considérer que la notion de fonction s'est élaborée pendant la centaine d'années qui sépare ces deux dates.

Sur une *demi-droite* AW , il marque les points B_1, \dots, B_n, \dots tels que $AB_1 = \ell$, $AB_2 = AB_1 + \ell = 2\ell$, $AB_n = n\ell$, ...etc..., où ℓ est une longueur fixée. La progression géométrique de raison k est ainsi matérialisée par la suite des segments $[aw]$, $[b_1 w]$, ..., $[b_n w]$, et la progression arithmétique de raison ℓ par la suite des segments $[AB_1]$, $[AB_2]$, ..., $[AB_n]$,

Enfin NEPER définit son logarithme par la relation $\log_{b_n} w = AB_n$, c'est-à-dire $\log k^n = n\ell$. Jusque là, rien de très original si ce n'est que, pour une raison que l'on verra plus loin, NEPER se limite au calcul des logarithmes des nombres compris entre 0 et 1, c'est-à-dire qu'il choisit une progression géométrique de raison inférieure à 1. Par ailleurs, à ce stade, le logarithme de NEPER n'est pas entièrement défini : il manque les valeurs de k et de ℓ , ainsi que la définition des logarithmes des nombres qui ne sont pas de la forme k^n . Afin de pallier ce dernier inconvénient, afin en somme de pouvoir faire varier continûment la variable, NEPER ajoute une représentation cinématique : il imagine que deux points mobiles, B et b , décrivent respectivement AW et $[aw]$ suivant les règles suivantes :

— le point B a un mouvement uniforme : s'il part de A à l'instant t_0 et passe en $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ aux instants $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$, on a donc : $t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \dots = t_n - t_{n-1}$.

— le point b se trouve en b_n à l'instant t_n .

— à l'instant t_0 , les points B et b ont la même vitesse.

La définition du logarithme devient alors :

$$\log bw = AB \quad (1)$$

La relation fondamentale $\log xy = \log x + \log y$ est démontrée quand x et y sont de la forme k^n et k^m : elle résulte alors immédiatement pour NEPER de la propriété P. Elle est admise implicitement pour x et y quelconques : il y a là un raisonnement "par continuité" qui ne pouvait être clairement exprimé à l'époque ; dans le même ordre d'idées, on peut remarquer que le mouvement de b en dehors des instants t_n n'est pas précisé. Nous verrons dans la suite que NEPER suppose implicitement que ce mouvement est suffisamment régulier : par exemple, b ne revient pas en arrière !

5. Essayons maintenant de poser et de résoudre en termes modernes le problème étudié par NEPER. Choisissons pour cela, pour origine des temps, l'instant où B part de A , et désignons par v la vitesse de B ; ainsi $AB = vt$ où t désigne le temps.

Posons d'autre part $bw = f(t)$ et désignons provisoirement par g la fonction logarithme cherchée par NEPER, définie par la relation (1) qui s'écrit, avec ces notations :

$$g[f(t)] = vt \quad (2)$$

Notons d'autre part que la condition initiale (même vitesse à $t = t_0$) s'écrit :

$$f'(0) = -v \quad (3)$$

Pour aller plus loin, il nous faut malheureusement interpréter la pensée de NEPER en termes modernes sans être sûr de la justesse de notre interprétation. Le problème est le suivant : il est difficile de savoir si NEPER considère que les données de son problème déterminent la fonction g (première hypothèse) ou s'il considère que ces données déterminent f , d'où l'on peut déduire ensuite g (deuxième hypothèse).

Dans la première hypothèse, on admet avec NEPER que la fonction g vérifie $g(xy) = g(x) + g(y)$. Nous savons maintenant (2) qu'il en résulte l'existence d'une constante c telle que $g(x) = c \ln(x)$ (où \ln désigne, suivant la notation normalisée, le logarithme népérien) avec $c \neq 0$, car $g = 0$ n'est évidemment pas solution du problème de NEPER.

Ainsi, (2) s'écrit $c \ln[f(t)] = vt$, d'où $f(t) = e^{\frac{v}{c}t}$ et $f'(0) = \frac{v}{c}$, par conséquent l'égalité (3) impose la valeur $c = -1$, donc $g(x) = -\ln x$. La fonction g cherchée par NEPER est l'opposé du logarithme népérien actuel, restreint de plus à $]0,1[$; ces deux faits ne doivent pas nous surprendre : ils évitaient l'introduction des nombres négatifs, peu prisés à l'époque. Le calcul précédent montre en outre que les conditions imposées par NEPER déterminent g sans ambiguïté. Les constantes k et ℓ ne peuvent donc pas être choisies toutes deux arbitrairement ; elles doivent vérifier $\ell = \ln k$.

La deuxième hypothèse est plus hardie, mais un texte de NEPER, publié à titre posthume en 1619, nous permet de l'envisager : dans ce texte, NEPER énonce la proposition suivante : "La vitesse du point b est proportionnelle à la distance bw ".

(2) Supposons en effet qu'une fonction g vérifie $g(xy) = g(x) + g(y)$ et qu'elle soit dérivable (on peut montrer, en fait, que toute fonction continue vérifiant cette équation est dérivable). En dérivant par rapport à y , on obtient $x g'(xy) = g'(y)$, d'où, en faisant $y = 1$: $x g'(x) = g'(1)$. Ainsi, $g'(x) = \frac{g'(1)}{x}$ et, comme $g(1)$ est nécessairement nul (on le voit en faisant $x = y = 1$ dans l'équation qui définit g), on en déduit $g(x) = g'(1) \ln |x|$.

Bien que la notion de vitesse instantanée n'existât pas à l'époque, l'usage qu'en fait NEPER correspond à la définition approximative suivante : la vitesse de b à l'instant t est le nombre $V(t)$ par lequel il faut multiplier un petit intervalle de temps Δt pour obtenir le déplacement de b entre les instants t et $t + \Delta t$.

Ceci revient à l'usage que l'on fait en physique de manière fructueuse des infiniments petits. NEPER établit sa proposition par le raisonnement suivant (traduit en langage moderne) ; on a :

$$f(t_n) = k f(t_{n-1}), \text{ d'où } f(t_{n-1}) - f(t_n) = (1-k) f(t_{n-1})$$

et, de même, à l'instant $t_{n'}$, $f(t_{n'-1}) - f(t_{n'}) = (1-k) f(t_{n'-1})$.

$$\text{Ainsi : } \frac{f(t_{n-1}) - f(t_n)}{f(t_{n'-1}) - f(t_{n'})} = \frac{f(t_{n-1})}{f(t_{n'-1})}$$

D'après la définition de NEPER, si l'on suppose $t_n - t_{n-1}$ petit, on a $f(t_{n-1}) - f(t_n) = b_{n-1} b_n = V(t_{n-1})(t_n - t_{n-1})$ et, de même, $f(t_{n'-1}) - f(t_{n'}) = V(t_{n'-1})(t_{n'} - t_{n'-1})$, d'où, comme $t_n - t_{n-1} = t_{n'} - t_{n'-1}$:

$$\frac{V(t_{n-1})}{V(t_{n'-1})} = \frac{f(t_{n-1})}{f(t_{n'-1})} \quad \text{ou} \quad \frac{V(t_{n-1})}{f(t_{n-1})} = \frac{V(t_{n'-1})}{f(t_{n'-1})}$$

On en déduit, en fixant $t_{n'-1}$, que $\frac{V(t_{n-1})}{f(t_{n-1})}$ est constant et NEPER admet qu'il en est de même de $\frac{V(t)}{f(t)}$.

Il ne nous est pas difficile maintenant d'en déduire f . En effet, la définition de f implique que $V(t) = -f'(t)$, ce que nous avons déjà utilisé en écrivant (3) ; ainsi f vérifie l'équation différentielle $f'(t) = \alpha f(t)$ où α est une constante.

On en déduit que $f(t) = Ke^{\alpha t}$. Comme $f(0) = aw = 1$, on a $K = 1$ et, de $f'(0) = K\alpha = \alpha$, on déduit, grâce à (3), que $\alpha = -v$, donc que $f(t) = e^{-vt}$. Ainsi g est définie par $g(e^{-vt}) = vt$ où $t \in]0, +\infty[$; en posant $x = e^{-vt}$ on retrouve que $g(x) = \ln x$ avec $x \in]0, 1[$.

Naturellement, la première hypothèse faite sur la démarche de la pensée de NEPER est la plus probable vu l'état de la science mathématique à l'époque ; cependant, il est vraisemblable que la traduction en termes modernes de cette démarche la déforme inévitablement et que NEPER a eu une perception plus globale de son

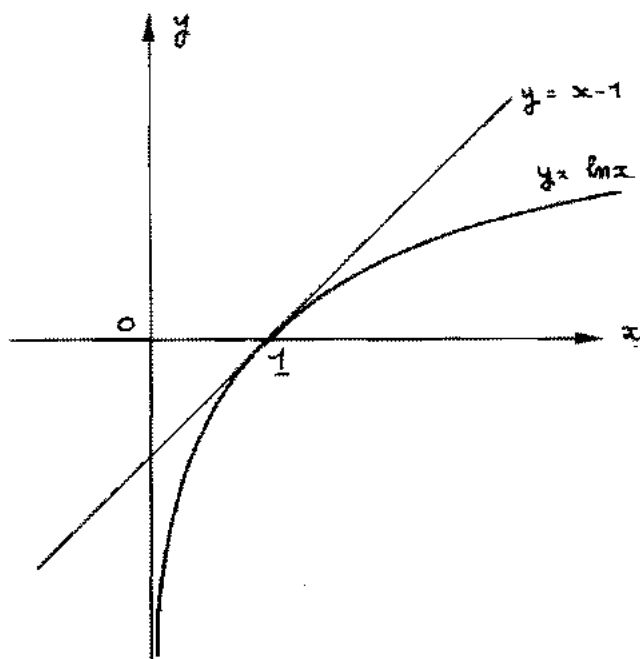
problème : il a certainement pressenti intuitivement le fait essentiel que ses données déterminaient de façon unique les fonctions g et f dont il a par ailleurs reconnu les propriétés. L'usage qu'il en fait ensuite montre en tout cas qu'il était parfaitement conscient de la possibilité de choisir k arbitrairement dans $]0,1[$ et d'en déduire ensuite la valeur de ℓ .

6. Ayant ainsi fixé, avec toute la clarté possible à son époque, le cadre théorique, NEPER va s'attaquer maintenant au calcul pratique des valeurs de sa fonction g , que nous noterons désormais Log : ce calcul va d'ailleurs être l'occasion pour lui de tirer encore de ses réflexions sur le mouvement de b et de B des conséquences aussi remarquables théoriquement que pratiquement. Le principe du calcul est simple : on choisit k , on calcule $\text{Log } k = \ell$ d'où $\text{Log } k^n = n \ell$, et on en déduit par interpolation les autres valeurs de $\text{Log } x$. C'est dans le détail que NEPER va montrer une extraordinaire ingéniosité.

Pour que les valeurs de k^n soient suffisamment rapprochées pour justifier le calcul par interpolation, nous avons déjà remarqué que k devait être choisi voisin de 1 : NEPER choisit $k = 0,999\ 999\ 9$ c'est-à-dire $k = 1 - 10^{-7}$. Pour calculer $\text{Log } k$, il utilise sa définition de la vitesse : puisque les points b et B ont la même vitesse v à l'instant t_0 , ils parcourent, pendant l'intervalle de temps $t_1 - t_0$, supposé très petit, la même distance $V(t_1 - t_0)$. Ainsi $AB_1 = ab_1$, c'est-à-dire $\text{Log } b_1 = w = 1 - k$ ou $\text{Log } k = 1 - w$, autrement dit, on a $\text{Log } (0,999\ 999\ 9) = 0,000\ 000\ 1$ ou $\text{Log } (1 - 10^{-7}) = 10^{-7}$.

Sous cette dernière forme, l'approximation de NEPER est facile à interpréter : elle consiste à remplacer $\ln x$ par $x - 1$ quand x est voisin de 1 (ici $x = 1 - 10^{-7}$) : l'égalité approchée $\ln x \approx x - 1$ s'écrit en effet, dans les notations de NEPER, $\text{Log } x \approx 1 - x$ donc $\text{Log } (1 - x) \approx x$ quand x est voisin de 0.

Cette approximation consiste à remplacer la courbe $y = \ln x$ par sa tangente au point d'abscisse 1, c'est-à-dire à approcher la fonction \ln au moyen de son application linéaire tangente au point d'abscisse 1, et la théorie nous apprend que l'on obtient ainsi la meilleure approximation possible par une fonction affine.

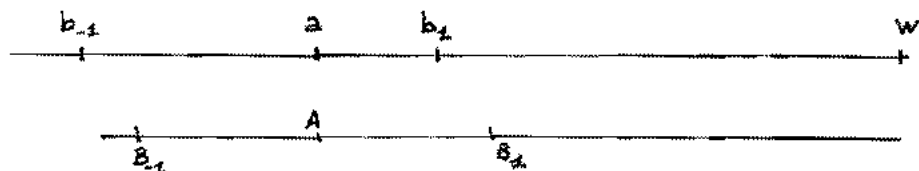


Il serait facile de majorer l'erreur ainsi commise par NEPER, mais nous ne nous y attarderons pas car, par une analyse plus fine, il va obtenir une approximation bien meilleure. Il est évidemment bien conscient du caractère approché de la valeur de $\text{Log } k$ qu'il a calculée et, s'il lui est impossible de majorer l'erreur, il lui est facile d'en connaître le sens ; l'égalité $AB_1 = ab_1$ est obtenue en supposant que la vitesse de b est constante dans l'intervalle $t_1 - t_0$ alors qu'en réalité elle décroît lorsque b se rapproche de w ; on a donc en fait l'inégalité $ab_1 < AB_1$, c'est-à-dire $\text{Log } k > 1-k$.

Pour obtenir un encadrement de $\text{Log } k$, NEPER a l'idée d'utiliser le même raisonnement, avant l'instant t_0 . Il suppose donc que le mouvement a commencé avant cet instant et considère l'instant t_1 tel que $t_0 - t_1 = t_1 - t_0$; les positions correspondantes de b et B sont b_1 et B_1 et l'on a $B_1 A = A B_1$ et $B_1 A < b_1 a$ puisque la vitesse de b en b_1 sera, cette fois-ci, supérieure à celle de B en B_1 . On en déduit $AB_1 < b_1 a$ c'est-à-dire $\text{Log } k < b_1 a$; il suffit de calculer $b_1 a$ pour obtenir

l'encadrement cherché ; or $b_{-1} a = b_{-1} w - aw = \frac{1}{k} - 1 = \frac{1-k}{k}$
 d'où :

$$1 - k < \text{Log } k < \frac{1-k}{k}. \quad (4)$$



NEPER prend alors pour valeur approchée de son logarithme la moyenne arithmétique des bornes de l'encadrement :

$$\text{Log } k \approx \frac{1}{2} \left(1 - k + \frac{1-k}{k} \right) \text{ c'est-à-dire } \text{Log } k \approx \frac{1}{2} \left(\frac{1-k}{k} \right)$$

Pratiquement, $\frac{1}{k} = \frac{1}{1-10^{-7}} = 1, 000\ 000\ 100\ 000\ 010\ 000\ 001\dots;$

NEPER choisit de s'arrêter à 18 décimales :

$$\text{Log } 0,999\ 999\ 9 = 0, 000\ 000\ 100\ 000\ 005\ 000$$

Il nous reste à étudier l'approximation ainsi obtenue. La double inégalité (4) s'obtient de la manière suivante : on remarque tout d'abord, comme NEPER, que l'égalité approchée $\ln x \approx x - 1$ peut se remplacer par l'inégalité $\ln x \leq x - 1$, valable pour tout $x > 0$. Cette inégalité, qui exprime que la courbe $y = \ln x$ est "en-dessous" de sa tangente au point d'abscisse 1, se démontre très facilement (il suffit de dresser le tableau des variations de la fonction $x \mapsto x - 1 - \ln x$).

En posant $x = \frac{1}{u}$, d'où $x-1 = \frac{1-u}{u}$, la même inégalité s'écrit $-\ln u \leq \frac{1-u}{u}$ d'où finalement la double inégalité :

$$\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x - 1 \quad (4')$$

Cette inégalité est une inégalité stricte lorsque x est différent de 1, et redonne donc (4) quand on l'écrit dans les notations de NEPER. Ce dernier en a fait un usage intensif pour le calcul par interpolation ; au lieu d'utiliser l'interpolation linéaire, autrement dit la "règle de trois", il fait le raisonnement suivant que nous

écrivons directement dans la notation actuelle : soit à calculer $\ln(a+h)$, connaissant $\ln a$ avec h voisin de 0. Posons $\frac{a+h}{a} = x$ d'où $x - 1 = \frac{h}{a}$; l'inégalité (4') s'écrit :

$$\frac{h}{a+h} \leq \ln(a+h) - \ln(a) \leq \frac{h}{a}$$

De là, NEPER déduit : $\ln(a+h) - \ln a \approx \frac{1}{2} \left(\frac{h}{a+h} + \frac{h}{a} \right)$

d'où : $\ln(a+h) \approx \ln a + \frac{h}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+h} \right)$

C'est la formule d'interpolation qu'il va employer. Elle généralise le calcul de $\log k$ (qui correspond au cas particulier $a = 1$, $h = k - 1$).

Pour majorer l'erreur commise quand on emploie cette formule approchée, il suffit de remarquer que $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{a+h}$ sont les valeurs prises par la dérivée de la fonction logarithme népérien aux points a et $a+h$, et de savoir que l'un des exercices "classiques" sur le théorème de Rolle consiste à démontrer, sous des hypothèses que nous laissons au lecteur le soin de préciser, que, étant donné une fonction F et deux nombres réels a et h , il existe un nombre réel θ vérifiant $0 < \theta < 1$ et tel que (3) :

$$F(a+h) - \left[F(a) + h \frac{F'(a) + F'(a+h)}{2} \right] = -\frac{h^3}{12} F'''(a + \theta h).$$

En appliquant cette formule à la fonction logarithme népérien on obtient :

$$\ln(a+h) - \left[\ln a + \frac{h}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+h} \right) \right] = -\frac{h^3}{6} \frac{1}{(a+\theta h)^3}$$

(3) Supposons $h \neq 0$. On définit une fonction G par :

$$G(t) = F(a+t) - F(a) - t \frac{F'(a) + F'(a+t)}{2} - K \frac{t^3}{12} \text{ où } K \text{ est déterminé par la condition}$$

$G(h) = 0$. Comme $G(0) = 0$, on peut appliquer le théorème de Rolle à G sur $[0, h]$ (si $h > 0$) ou sur $[-h, 0]$ (si $h < 0$) : il existe c_1 tel que $G'(c_1) = 0$; comme $G'(0) = 0$, une nouvelle application du théorème de Rolle sur $[0, c_1]$ ou sur $[c_1, 0]$ montre qu'il existe c_2 tel que $G''(c_2) = 0$. Cette condition s'écrit $K = -F'''(ac_2)$ et la démonstration permet d'affirmer que c_2 est de la forme θh . En remplaçant, dans l'égalité $G(h) = 0$, la constante K par sa valeur $-F'''(a+\theta h)$, on obtient la formule cherchée. Si $h = 0$, le résultat est évident.

Cette formule donne la valeur de l'erreur commise en employant l'approximation de NEPER. Cette erreur est majorée par $\frac{h^3}{6a^3}$ si h est positif, par $\frac{|h|^3}{6(a-h)^3}$ si h est négatif ; pratiquement, il suffit de retenir que l'incertitude est de l'ordre de $\frac{|h|^3}{6a^3}$. Par exemple, lorsque $a = 1$ et $|h| = 10^{-7}$, l'incertitude est de l'ordre de $10^{-21}/6$ et l'on peut donc écrire, avec 20 décimales exactes (4) :

$$\text{Log}(0,999\ 999\ 9) = 0,000\ 000\ 100\ 000\ 005\ 000\ 000$$

En gardant les 18 premières décimales, NEPER avait choisi d'instinct une bonne marge de sécurité. Cette valeur approchée de $\text{Log } k$ est aussi celle que l'on obtient en gardant les deux premiers termes du développement en série entière de $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}. \text{ Dans ce cas particulier, cette remarque fournit}$$

un autre moyen de calcul de l'incertitude. Le calcul d'erreur montre d'autre part que l'approximation de NEPER est bonne tant que a n'est pas trop voisin de 0. Nous verrons plus loin que

NEPER n'a eu à appliquer sa formule que pour $a \in]\frac{1}{2}, 1]$; l'incertitude était donc au maximum de $\frac{4}{3}|h|^3$, ce qui lui laissait, vu les valeurs de h choisies, une marge de sécurité suffisante.

7. Il nous reste à exposer maintenant le calcul effectif des valeurs de $\text{Log } x$ par NEPER. Cependant, avant de passer à cette dernière partie, il est bon de réfléchir brièvement sur le travail théorique de NEPER et plus particulièrement sur le rôle qu'y joue la cinématique.

Le rôle des deux mobiles b et B ne se réduit pas à une représentation concrète de la notion de fonction (la fonction logarithme assure le passage de b à B) permettant d'éviter en fait l'introduction de cette notion. Le système de logarithmes choisi par NEPER est fixé par une condition différentielle : l'égalité des

(4) Rappelons que ceci signifie que l'erreur est inférieure ou égale à 5×10^{-21} .

Par exemple, dire que $\pi = 3,1416$ avec 4 décimales exactes, c'est dire que l'on a : $|\pi - 3,1416| \leq 0,000\ 05$.

Il ne faut pas confondre cette notion avec celle de valeur approchée à 10^{-n} près : dans le cas de π , la valeur approchée à 0,0001 près est 3,1415 ; ce qui signifie que l'on a $3,1415 \leq \pi < 3,1416$ ou $0 \leq \pi - 3,1415 < 0,0001$. Cette valeur approchée s'obtient en gardant les 4 premiers chiffres du développement décimal de π qui est : 3,141592... alors que, pour obtenir la 4e décimale exacte, on corrige éventuellement cette 4e décimale en fonction de la 5e.

vitesse de b et B à l'instant t . Cette condition menait évidemment au logarithme népérien, le plus facile à caractériser par les propriétés de sa dérivée ; elle ne pouvait pas déboucher sur le logarithme décimal. Mais le plus remarquable est sans doute la formule d'interpolation que nous venons d'étudier. Cette formule suppose en fait, pour sa détermination, la notion de dérivée ; pour l'établir, NEPER procède en somme à une estimation de la "vitesse de variation" de la fonction Log grâce à la comparaison des vitesses de ses deux mobiles. Tout son génie consiste à tirer de réflexions sur les vitesses, qui ne pouvaient être que *qualitatives* à son époque, des conséquences *quantitatives* précises.

Il peut être intéressant de noter que cette première approche des notions de fonction et de dérivée par l'intermédiaire de la cinématique n'est pas particulière à NEPER. A partir de Galilée, contemporain de NEPER, l'étude du mouvement d'un mobile va devenir un problème central en mathématiques ; une courbe sera considérée comme la trajectoire d'un point mobile, c'est-à-dire comme définie par une représentation paramétrique et, de toutes ces considérations, se dégageront peu à peu les notions de fonction, de dérivée et d'intégrale.

8. Aspect pratique du travail de NEPER : le calcul numérique de la table.

Le programme de NEPER l'amenait théoriquement à calculer les valeurs de k^n jusqu'au voisinage de 0 (en fait, jusqu'au voisinage de $\frac{1}{2}$, comme nous le verrons plus loin) ; ce programme est pratiquement impossible à réaliser puisque k^n n'est voisin de $\frac{1}{2}$ que lorsque n est voisin de 7 000 000 ! Aussi NEPER introduit une étape intermédiaire et un raffinement dans son calcul : il va utiliser la valeur de $\text{Log } k$ uniquement pour calculer, suivant le principe prévu, les valeurs de $\text{Log } 0,99$ et de $\text{Log } 0,9995$.

Ensuite, il calculera les autres logarithmes à partir de ceux-ci. En pratique, il change donc la valeur de k et choisit la nouvelle valeur $B = 0,99$; cette nouvelle valeur convient, car $B^{69} = 0,5048$. Il introduit d'autre part le raffinement suivant : comme les valeurs de B^n sont, cette fois-ci, un peu trop espacées pour le calcul par interpolation, il pose $A = 0,9995$ et subdivise

chacun des intervalles $[B^n, B^{n+1}]$ par les nombres : $B^n, B^n A, B^n A^{2^0}, B^{n+1}$. Comme $A^{2^1} = 0,990\ 037\ 3$ est très voisin de B, chacun des intervalles $[B^n, B^{n+1}]$ se trouve subdivisé en 21 intervalles de longueur suffisamment petite ; quant à la valeur de $\text{Log } B^n A^p$, elle est égale à $n \text{ Log } B + p \text{ Log } A$, donc connue. La disposition pratique des calculs, dont l'essentiel consiste à calculer 1449 valeurs de $B^n A^p$, est la suivante (on a posé $\alpha = \text{Log } A$ et $\beta = \text{Log } B$) :

1		2		3		70	
Nb	Log	Nb	Log	Nb	Log	Nb	Log
1	0	B	β			B^{69}	69β
A	α	AB	$\alpha+\beta$				
A^2	2α	A^2B	$2\alpha+\beta$				
A^{21}	21α	$A^{21}B$	$21\alpha+\beta$			$A^{21}B^{69}$	$21\alpha+69\beta$

On retrouve, jusque dans les détails techniques de ce calcul, la marque de l'ingéniosité de NEPER : le calcul du tableau peut se faire par lignes (progressions géométriques de raison B) ou par colonnes (progressions géométriques de raison A), ce qui permet un contrôle de l'exactitude des résultats. Quant aux raisons A et B de ces progressions, elles n'ont pas été choisies au hasard : en effet, $B = 0,99 = 1 - \frac{1}{100}$, de sorte que $x B = x - \frac{x}{100}$; ainsi, la multiplication par B se ramène à une soustraction. De même $A = 1 - \frac{1}{2000}$ et la multiplication par A se ramène à une division par 2 et une soustraction.

A partir de ces résultats, NEPER aurait pu calculer les logarithmes des nombres de $\frac{1}{2}$ à 1. En fait, pensant aux applications de ses logarithmes, il va présenter son oeuvre sous forme d'une *table des logarithmes des sinus des angles de 0° à 90°* : comme les tables de valeurs des lignes trigonométriques étaient connues à l'époque

avec une grande précision, ceci ne soulève pas de difficulté théorique et apporte une simplification pratique qui explique pourquoi on a seulement besoin des logarithmes des nombres de 1 à $\frac{1}{2}$. En effet, NEPER calcule d'abord les logarithmes des sinus des angles variant de minute en minute de 30° à 90° afin que le sinus varie de $\frac{1}{2}$ à 1, et, pour les angles de 0 à 30° , il utilise la formule :

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right)$$

$$\text{d'où : } \text{Log} \sin \frac{x}{2} = \text{Log} \sin x - \text{Log} 2 - \text{Log} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right).$$

En faisant varier x de 30° à 60° cette formule permet de calculer les logarithmes des sinus de 15° à 30° , puis on recommence. Comme NEPER a fait figurer dans sa table les valeurs des sinus, elle pouvait servir à la fois de table trigonométrique, de table de logarithmes des sinus, ou de table des logarithmes des nombres.

9. Il nous reste à estimer la précision effective des calculs de NEPER. Ceci nous est facile car, ainsi que nous venons de le voir, son procédé de calcul l'amène à déterminer avec précision la valeur de $\text{Log} 0,9995$. NEPER trouve que :

$$\text{Log} 0,9995 = 0,000\ 500\ 12$$

Or, le calcul d'erreur que nous avons fait plus haut montre qu'il est possible de calculer ce logarithme, grâce à la formule approchée $\ln(a+h) \approx \ln a + \frac{h}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+h} \right)$ où l'on choisit $a = 1$, $h = -5 \times 10^{-4}$, avec une incertitude majorée par 2×10^{-11} .

On obtient ainsi, avec 9 chiffres exacts :

$$\ln 0,9995 = -0,000\ 500\ 125$$

ou, en se limitant à 8 chiffres, comme NEPER :

$$\ln 0,9995 = -0,000\ 500\ 13$$

Ainsi, la 8e décimale de l'un des logarithmes fondamentaux de NEPER est entachée d'une légère erreur ; cette erreur se répercutant tout au long du calcul, il n'est pas étonnant de constater que NEPER, qui a été amené à calculer $\text{Log} 10$, trouve :

$$\text{Log} 10 = -2,302\ 584\ 2 \text{ alors que (tables modernes)}$$

$$\ln 10 = 2,302\ 585$$

Quant à l'origine de ces erreurs, on peut faire a priori une première hypothèse en remarquant que le travail de NEPER repose

entièrement sur le calcul de $\text{Log } k$; autrement dit, à partir du moment où il fixe la valeur de $\text{Log } k$, il se place en fait dans un système de logarithmes qui n'est plus le logarithme népérien mais qui lui est proportionnel ; la valeur du rapport $\frac{\ln x}{\text{Log } x}$ est constante, donc égale en particulier à $\frac{\ln k}{\text{Log } k}$. En utilisant le développement en série

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots$$

pour $x = 10^{-7}$, on trouve :

$$\frac{\ln k}{\text{Log } k} = -\left(1 + \frac{1}{3} 10^{-14} + \frac{1}{12} 10^{-21} + \dots\right).$$

Il y a donc dans les résultats de NEPER une erreur systématique dont la valeur est connue ; par exemple, on doit trouver que :

$$\ln 0,9995 = -\text{Log } 0,9995 \left(1 + \frac{1}{3} 10^{-14} + \dots\right).$$

Mais on voit ainsi que, dans ce cas, la correction à apporter joue sur la 18^e décimale, elle n'a donc aucun rôle dans la différence des résultats obtenus. Finalement, il nous faut donc conclure que l'erreur provient du calcul lui-même ; il faudrait examiner le détail de ce calcul pour déterminer s'il s'agit d'une erreur de calcul proprement dite ou de l'incertitude apportée par l'accumulation inévitable des approximations faites à chaque étape. D'après Charles NAUX (cf. la fin de cet article), cet examen a été fait par BIOT qui a décelé une erreur de calcul ; il en résulte que le dernier chiffre des logarithmes de la table de NEPER est plus ou moins exact.

10. On peut conclure de plusieurs manières cette réflexion sur l'oeuvre de NEPER et l'invention des logarithmes en général. Certains seront frappés par la simultanéité des découvertes de NEPER et de BURGI qui montre une fois de plus que, quand une découverte est "dans l'air", elle est souvent effectuée indépendamment par plusieurs mathématiciens : la même situation se produira avec la découverte du calcul infinitésimal par NEWTON et LEIBNIZ. D'autres seront frappés par l'incidence des besoins non proprement mathématiques (calculs astronomiques ou bancaires, développement du commerce maritime) sur les thèmes de travail des mathématiciens, c'est-à-dire par l'insertion sociale des mathématiciens. D'autres seront surtout frappés par la personnalité et

l'oeuvre de NEPER et par le mélange d'intuition et de rigueur qui lui a permis d'aboutir à une grande efficacité. D'autres enfin en tireront autre chose, ou plusieurs de ces remarques à la fois. Je laisserai donc à chaque lecteur le soin de formuler sa conclusion personnelle.

Il était temps sans doute de rédiger à l'intention des membres de l'A.P.M. cet article : si la fonction logarithme népérien a encore, pour des raisons évidentes, un bel avenir devant elle, l'usage des tables de logarithmes semble menacé à très court terme par la diffusion des moyens de calcul modernes, y compris au niveau de l'école (personne ne s'en plaint...). Or, c'est par l'intermédiaire de ces tables que le mot de logarithme est connu largement, et le mode de calcul de ces tables intrigue à juste titre les utilisateurs. Il était donc temps d'en parler, avant que le progrès technique (et les lois de la nature) restreignent par trop le public intéressé.

Les lecteurs mis en appétit par ce qui précède pourront se reporter avec fruit à l'ouvrage qui a été la source principale de ce travail : ils y trouveront des détails supplémentaires sur les calculs de NEPER et des renseignements sur le reste de son oeuvre mathématique et sur sa vie. Il s'agit de l'"Histoire des logarithmes de NEPER à EULER, tome 1 : La découverte des logarithmes et le calcul des premières tables" par Charles NAUX (A. Blanchard, 1966).