

4

ECHANGES

A propos de *Approximation en musique*

(B. PARZYSZ, Bulletin 296, page 777)

par J. DAUTREVAUX, Maître-Assistant I.S.E.A. Mulhouse.

J'ai lu avec un très grand intérêt l'exposé de notre collègue B. PARZYSZ sur la constitution des gammes musicales, et ce d'autant plus que j'avais été amené, pour des raisons d'ailleurs toutes personnelles, à m'intéresser de près à cette question. Je voudrais ajouter à cette note de B. PARZYSZ un complément d'inspiration plus arithmétique.

En gros, le problème de la constitution d'une gamme musicale consiste à faire cohabiter la quinte et l'octave pythagoriciennes, donc à rechercher deux entiers x et y tels que x quintes valent exactement y octaves ; quel que soit le procédé utilisé, la réduction à la première octave de toutes les notes obtenues dans un cycle de x quintes nous fournira une octave ayant y notes distinctes, d'où l'intérêt évident que l'entier y ne soit pas trop grand afin que les instruments de musique "tempérés" (et permettant donc toutes les transpositions) que l'on pourrait construire soient effectivement jouables — ce qui est spécialement indiqué pour les instruments à clavier.

L'équation à résoudre est $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 2^y$, soit $\frac{y}{x} = \log_2\left(\frac{3}{2}\right)$, et il est bien connu que, ce nombre étant irrationnel, l'équation précédente est impossible à résoudre en naturels. On est donc contraint à se contenter d'une approximation, la meilleure possible, et avec des naturels x et y pas trop grands.

La méthode permettant d'obtenir systématiquement les meilleures approximations rationnelles d'un nombre réel donné α (rationnel ou non) est celle du développement de α en fraction continue, pour lequel nous renvoyons aux ouvrages élémentaires ; par un algorithme approprié, d'ailleurs très simple à mettre en oeuvre, on forme une suite de fractions r_n (c'est la "réduite de rang n ") qui, pour $\alpha > 0$, a les propriétés suivantes :

- chaque fraction r_n est irréductible ;
- la suite $\{r_n\}$ converge vers le nombre réel α ;
- la suite des réduites de rang impair est strictement croissante, la suite des réduites de rang pair strictement décroissante, et deux réduites consécutives encadrent toujours α ;
- si $r_n = \frac{a_n}{b_n}$ (fraction irréductible) est la réduite de rang n , alors $|\alpha - r_n| \leq \frac{1}{b_n^2}$ et r_n réalise la meilleure approximation de α parmi toutes les fractions (irréductibles ou non) dont le dénominateur est au plus égal à b_n ;
- la suite $\{a_n\}$ des numérateurs et la suite $\{b_n\}$ des dénominateurs sont deux suites strictement croissantes.

Notons que ces propriétés ne valent — stricto sensu — que si α est irrationnel ; si α est rationnel, l'une des réduites, de rang n fini, sera égale à α , de sorte qu'à partir de ce rang toutes les suites dont il aura été question ci-dessus sont constantes.

La mise en oeuvre de cette méthode pour le nombre irrationnel : $\alpha = \log_2 \left(\frac{3}{2}\right) \approx 0,584\ 962\ 6\dots$ donne alors la suite de réduites suivante :

$$\begin{array}{llll} r_1 = 0 & r_2 = 1 & r_3 = \frac{1}{2} & r_4 = \frac{3}{5} \\ r_5 = \frac{7}{12} & r_6 = \frac{24}{41} & r_7 = \frac{31}{53} & \\ r_8 = \frac{179}{306} & r_9 = \frac{389}{665} & r_{10} = \frac{4458}{7621} & r_{11} = \frac{13\ 763}{23\ 528} \dots \end{array}$$

Les quatre premières sont trop peu précises ; à partir de r_8 elles constituent des approximations presque parfaites, mais inutilisables.

r_5 est la base de la gamme tempérée classique (gamme de Werckmeister), pour laquelle 12 quintes valent un peu moins de 7 octaves, le défaut étant $\frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1,013\ 64$: c'est le comma Pythagoricien.

Les douze degrés de la gamme ont des intervalles consécutifs égaux à $\sqrt[12]{2} \approx 1,059 46$, et la quinte tempérée (7 degrés de Werckmeister) est un petit peu plus courte que la quinte juste (intervalle $\frac{3}{2}$), le défaut (en rapport de fréquences), approximativement 1,001 155, est le *comma tempéré*.

Ne pas confondre le comma Pythagorien avec le comma tempéré, ni surtout avec le comma Zarlinien ($\frac{81}{80} = 1,0125$) dont l'origine et la signification sont tout autres.

- r_6 est la base d'une gamme découverte tardivement par JANKO (seconde moitié du XIX^{ème} siècle), pour laquelle 41 quintes valent un peu plus que 24 octaves, l'excès étant $\frac{2^{66}}{3^{41}} \approx 1,004 63$; les 41 degrés de la gamme ont pour intervalle fondamental $\sqrt[41]{2} \approx 1,017 05$, et la quinte de cette gamme, soit 24 degrés, est un peu plus longue que la quinte juste ; l'excès, voisin de 1,000 28, est le comma de Janko.
- r_7 est la base de la gamme de MERCATOR, pour laquelle 53 quintes valent un peu moins que 31 octaves, le défaut valant $\frac{3^{53}}{2^{84}} \approx 1,002 93$; les 53 degrés de la gamme ont ici pour intervalle fondamental le nombre $\sqrt[53]{2} \approx 1,013 165$, et la quinte de Mercator, soit 31 de ces degrés, est très légèrement plus courte que la quinte juste ; le défaut, qui est le comma de Mercator, vaut environ 1,000 04 : la quinte de Mercator est pratiquement juste.

Aucune des gammes autres que la gamme tempérée n'a pu s'imposer en raison de la complexité de construction et d'utilisation des instruments de musique à clavier ; aucun n'a jamais été expérimenté selon le système de Mercator, mais on peut noter que JANKO fit effectivement construire quelques instruments expérimentaux utilisant sa gamme, mais qui n'eurent — et pour cause — pas de suite.