De l'affine, de l'euclidien... à quelques questions plus générales

par Roger CUCULIERE (Lycée de Noisy-le-Sec)

Chacun se souvient des avatars des droites affines, euclidiennes, et autres axes, définis chacun comme un ensemble muni d'une famille de bijections avec l'ensemble des nombres réels, famille telle que etc... etc... Bien sûr, cette définition nous était réservée, à nous professeurs. Pas question de la révéler aux élèves ! Mais alors, que dire aux élèves ?

Des discussions avec plusieurs collègues m'ont appris que je ne suis pas le seul à me poser cette question : la distinction entre affine et euclidien au niveau du premier cycle, cela reste une notion très floue qui ne "passe" pas.

— I —

D'ailleurs, du point de vue mathématique, cette distinction est-elle importante ? Sans doute. Mais ce qui est important aussi, c'est la *liaison* entre ces deux notions. Ce qui fait la richesse du plan usuel, c'est qu'il a des propriétés affines, euclidiennes, projectives, topologiques, etc... Autrefois, me dira-t-on, on mélangeait ces diverses catégories de propriétés. On démontrait que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu en faisant intervenir des triangles "égaux".

Mais au fond, ce procédé est-il si scandaleux ? Dans le tome 2 du manuel d'algèbre de Mac Lane et Birkhoff (qui ne passe pas, je crois, pour une Bible du conservatisme en mathématiques), à la page 98, on donne l'idée d'une méthode de démonstration : pour démontrer une propriété affine d'une figure F, on la transforme par une application affine en une figure F', puis on démontre la propriété voulue dans F' et ce, par n'importe quel procédé, affine ou euclidien. La propriété voulue sera donc vraie aussi de F.

Exemple : pour tout parallélogramme P, il existe une affinité qui le transforme en un carré. Toute propriété *affine* du carré sera donc vraie de tout parallélogramme.

Autre exemple : le problème de Sylvester. Soit E un ensemble fini de points du plan vérifiant la propriété suivante :

quels que soient les deux points A et B distincts appartenant à E, il existe un troisième point C distinct de A et de B et aligné avec eux, qui appartient aussi à E. Montrer que tous les points de E sont alignés.

Ce problème a une solution en géométrie euclidienne. Une fois cette solution trouvée, pas besoin de recommencer le travail en géométrie affine.

Une anecdote pour finir. J'ai lu quelque part l'énoncé suivant :
Soit un quadrilatère ABCD, M le milieu de AD et N le milieu de BC. Soit P un point situé sur le prolongement de CD au-delà de D. On appelle Q l'intersection des droites PM et AC. Démontrer que les angles $\widehat{QNM}$ et $\widehat{MNP}$ sont égaux.

Il y a certainement une erreur d'énoncé, puisque l'on prétend déduire une propriété euclidienne de propriétés affines.

Mais pour pouvoir raisonner ainsi, il faut voir "affine" et "euclidien" comme aspects d'un même objet, deux aspects distincts mais liés.

— II —

Rien ne justifie donc que l'on enseigne cette maigre "géométrie affine", si pauvre en exercices. Mieux vaudrait partir du *plan*, sans épiloguer 107 ans pour savoir s'il est "physique" ou "mathématique", étudier des "situations", comme on dit, les "mathématiser", si possible, constituer ainsi des "îlots déductifs" dont l'intérêt devient plus évident lorsque l'on a des propriétés intéressantes à découvrir.

Voici par exemple un petit problème : un observateur placé au sol regarde une statue de 5 m de haut située au sommet d'une colonne de 45 m de haut. A quelle distance doit-il aller pour voir la statue sous un angle maximum ?

Là, il faut *trouver* quelque chose, il faut agir, travailler, raisonner. En ce sens, cet énoncé me semble très "moderne". Eh bien, on ne peut pas actuellement le traiter avant la classe de Première, en étudiant une fonction rationnelle. Alors que l'ancien programme de Géométrie de Troisième permet de le résoudre.

Faut-il pour autant se borner à regretter le passé ? Certes non ! Dans le passé non plus, d'ailleurs, on ne posait pas de pareils exercices. Il fallait donc, bien sûr, une rénovation pédagogique, en ce qui concerne le contenu et les méthodes. Pour le contenu, il était correct d'initier plus tôt nos élèves aux méthodes vectorielles, ou de présenter les structures fondamentales (groupes, anneaux, corps) — et notamment les groupes de transformations géométriques. Pour les méthodes, il était correct de vouloir une pédagogie qui fît plus appel à l'initiative de l'élève — avec pour objectif de lui permettre d'arriver à une attitude active et offensive en face des situations à mathématiser.

Force est de constater que la réforme n'a pas répondu à ce souci. Les nouveaux programmes, c'est une progression linéaire qui prétend à l'absolue rigueur, partant d'axiomes et de définitions abstraits pour retrouver les propriétés les plus usuelles au terme de laborieuses acrobaties. Un exemple : le scandale des angles.

Un collègue m'expliquait qu'il s'excusait devant ses élèves de Troisième de leur imposer une notion "si peu logique". Il le faisait à son corps défendant parce que c'est au programme, et parce que les Physiciens, ces empêcheurs d'axiomatiser en rond, en avaient besoin ...

Par la suite, en Première, vient la "rigueur" : On part d'un espace vectoriel (liste d'axiomes) euclidien (axiomes encore) dans lequel on définit des isométries vectorielles (par leur matrice) qui se subdivisent en symétries et rotations. On identifie le groupe des rotations au groupe des angles. Il ne reste plus qu'à tirer les conséquences de tout cela dans le plan affine euclidien qui n'est alors qu'un personnage de second ordre, un faire-valoir du Plan Vectoriel.

Après cela, il faut arriver en Terminale C pour savoir que la somme des angles d'un triangle est 180° ou que l'angle inscrit est la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc. Un collègue devant qui je critiquais cette progression me dit que, vue de Terminale C, elle était parfaitement satisfaisante : *et les autres élèves* ?

— III —

Si l'on veut aller au fond des choses, il faudrait comparer les points de vue sur *ce que sont les mathématiques*. Sont-elles un édifice abstrait et purement logique qu'il nous faut faire visiter depuis les fondations jusqu'aux plus ambitieuses superstructures ? Ou bien sont-elles, comme dit la SMF, "la description d'un aspect de la réalité" ? Le débat est important, et ce n'est pas un faux problème, ni un problème que nous découvrons aujourd'hui.

Emile Borel a écrit : "La tendance générale de mes recherches et de mes ouvrages d'enseignement est la suivante : je tâche d'y montrer que les Mathématiques ne sont pas un jeu purement abstrait de l'esprit, mais sont, au contraire, en étroite connexion avec la réalité concrète".

Et Maurice Fréchet : "Ainsi, les notions fondamentales de toutes les branches des Mathématiques sont issues de l'expérience. Elles constituent une représentation approchée de certaines observations, représentation que de longues méditations ont fait choisir assez habilement pour qu'au moyen de la méthode déductive, on arrive à une représentation également approchée, mais concernant un nombre infiniment plus vaste d'observations" (1).

Ainsi, il semble que la distinction entre "abstrait" et "concret" et les rapports entre ces deux notions dans les mathématiques et leur enseignement ne soient pas sujets aussi futiles que pourrait le laisser croire le texte du Bureau National de l'A.P.M. du 9 mars 1975 (Bulletin n° 298).

Que l'on critique les "propositions" ministérielles, il n'y a là rien à redire, au contraire. Mais de grâce, pas au nom de la mathématique qui "porte partout témoignage du fonctionnement même de notre esprit" (Bulletin 298, p. 125) ! Avec de telles déclarations, le Bureau National* risque de se voir taxé de cette même démagogie dont M. Kister accuse le Ministère (2).

(1) J'ajouterai à ces références une citation d'un homme dont beaucoup s'accordent à penser qu'il fut — entre autres — un philosophe éminent, Friedrich Engels : "La mathématique pure a pour objet les formes spatiales et les rapports quantitatifs du monde réel, donc une matière très concrète. Que cette matière apparaisse sous une forme extrêmement abstraite, ce fait ne peut masquer que d'un voile superficiel son origine située dans le monde extérieur".

(2) Si j'ai bien compris M. Kister (Bulletin n° 298, p. 198), rien à redire sur la "mathématique actuelle" qui convient à tous "du commerçant au cosmonaute" (sic. Comme si ces deux catégories sociales, au demeurant fort estimables, étaient des représentants typiques de notre société). Donc, les questions que j'ai voulu esquisser ici n'existent pas. Rien à redire non plus sur le fonctionnement actuel des IREM : que les maîtres-auxiliaires et les instituteurs ne puissent bénéficier de décharges, peu lui chaut. Un seul problème : des sous ! Eh bien non, décidément, je ne ferai pas signer sa pétition.

* Note du Président :
Il convient donc de préciser que le Bureau National n'entend nullement négliger les rapports entre "abstrait" et "concret". La démarche scientifique les associe dans un aller et retour permanent, comme l'ont dit les directeurs d'IREM, lors d'une conférence de presse. Ce que le texte dénonce, au contraire, ce sont les *cloisonnements de la pensée* et le *classement des élèves* auxquels ils conduisent, dans le texte ministériel.

— IV —

J'arrive au terme de ces quelques notes. J'ai voulu partir de quelques questions qui s'étaient posées à moi dans mon activité professionnelle pour montrer qu'un débat de fond sur ce que sont les mathématiques et leur enseignement dans la société actuelle est nécessaire. L'A.P.M. a eu raison d'impulser la réforme, et les pionniers de cette réforme étaient certainement courageux et bien intentionnés.

Mais les faits ont montré que leurs exigences étaient contradictoires. La mathématique considérée comme discours linéaire, logiquement irréprochable, c'est d'abord une vue de l'esprit qui ne correspond pas à la réalité. C'est un idéal qui n'est pas atteint par les programmes actuels, que bien des mathématiciens critiquent, et dont les logiciens dénoncent les prétentions ridicules. C'est une conception qui ne rend pas la pédagogie plus active : on remplace l'apprentissage passif des cas d'égalité (qui avaient au moins le mérite d'être utiles) par l'apprentissage non moins passif d'axiomes dont le sens est bien plus obscur. Le caractère sélectif de notre enseignement s'en est-il trouvé diminué ?

Il ne faudrait pas que notre Association restât sur un Credo infirmé par l'expérience. D'autant que des idées comme celle des "noyaux-thèmes" sont très positives, pourvu qu'on leur donne un contenu conforme à ce que sont réellement les mathématiques : une science expérimentale parmi d'autres.