Revenons à nos vieilles amours : la TRINOMITE (1) (2)

par Pierre GAGNAIRE

Problème : Trouver deux réels dont la somme est 2 et dont le produit est -24.

Solution : La *moyenne* arithmétique de ces deux réels est 1.
l'un d'eux est donc $1 + x$ et l'autre est $1 - x$.
D'où l'équation :

$$\begin{aligned}(1+x)(1-x) &= -24\\ 1-x^2 &= -24\\ x^2 &= 25\end{aligned}$$

Cette équation en x admet deux solutions : 5 et -5.
D'où, pour les réels cherchés : $1 + 5$ et $1 - 5$, c'est-à-dire 6 et -4.

L'introduction de la *moyenne* arithmétique simplifie la résolution du problème. Plus généralement, cherchons deux réels dont la somme est S et dont le produit est P (S et P sont deux réels supposés connus).

Ces deux réels ont pour moyenne M (d'ailleurs égale à $\frac{S}{2}$).

L'un d'eux est $M - x$, l'autre est $M + x$ d'où l'équation :

$$\begin{aligned}(M+x)(M-x) &= P\\ M^2-x^2 &= P\\ x^2 &= M^2-P\end{aligned}$$

Cette équation a 0, 1 ou 2 solutions suivant que $M^2 - P$ est strictement négatif, nul ou strictement positif.

Dans le premier cas, on ne peut trouver les réels de somme S et de produit P.

Dans le second cas, chacun des réels est égal à M, puisque $x = 0$.

Dans le dernier cas, les réels cherchés sont :

$$M + \sqrt{M^2 - P} \quad \text{et} \quad M - \sqrt{M^2 - P}$$

---

(1) Article dépourvu de toute originalité (note de l'auteur *en quête d'un lecteur* (note du rédacteur en chef)).

(2) Note de Gouret : "le suffixe "ite" indique en général une *inflammation* ; donc, au lieu de "trinomite", je verrais plutôt "trinomanie"."
Note sur cette note de l'auteur : "la *trinomite* n'est autre, en effet, que la trinomanie inflammatoire ..."

Quelques conséquences de l'introduction de la moyenne arithmétique

1) La formule $M^2 - x^2 = P$ montre clairement que le produit de deux réels de moyenne M est inférieur (au sens large) à M^2 puisque x^2 est positif. D'où un premier résultat :

> *Le produit de deux réels est inférieur au carré de leur moyenne arithmétique.*

Application : inutile de chercher deux réels de somme 12 et de produit 40. En effet, ces réels ont pour moyenne 6, donc leur produit ne peut dépasser 36.

2) *Le produit de deux réels de somme* (donc de moyenne arithmétique) *constante est maximum si ces réels sont égaux.*

En effet, pour que P soit égal à M^2, il faut et il suffit que $x = 0$; chacun des réels est alors égal à M. Sinon, $P < M^2$.

3) *Factorisation dans* R *du polynome* $x^2 + px + q$, *de variable* x.

Si ce polynome peut être factorisé, ce ne peut être que sous la forme $(x + a)(x + b)$ et le problème sera résolu lorsque a et b seront trouvés.

Or

$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x+ab$ d'où $a + b = p \qquad ab = q$.

On est donc ramené à chercher deux réels a et b connaissant leur somme p et leur produit q. Soit m leur moyenne (d'ailleurs égale à $\frac{p}{2}$).

Comme ci-dessus :

Si $m^2 - q < 0$, on ne peut pas factoriser le polynome dans R.

Si $m^2 - q = 0$, $a = b = m$ et le polynome se factorise sous la forme $(x + m)^2$.

Si $m^2 - q > 0$, $a = m - \sqrt{m^2 - q}$ et $b = m + \sqrt{m^2 - q}$ et le polynome se factorise sous la forme
$(x + m - \sqrt{m^2 - q})(x + m + \sqrt{m^2 - q})$

Exemple : Factorisation du polynome $x^2 + 2x - 224$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab = x^2 + 2x - 224$$

On cherche deux réels de somme 2 (donc de moyenne 1) et de produit -224. Ces réels sont $1 + t$ et $1 - t$.

$$(1 + t)(1 - t) = -224 \ ; \ 1 - t^2 = -224 \ ; \ t^2 = 225$$

$t = 15$ ou $t = -15$ donc $a = -14 \quad b = 16$

$$x^2 + 2x - 224 = (x - 14)(x + 16)$$

4) *Symétrie de la représentation graphique de* $x \longmapsto x^2 + px + q$

L'étude précédente a mis en évidence l'intérêt du réel m, moitié de p. Plutôt que d'écrire $x^2 + px + q$, nous écrirons désormais $x^2 + 2mx + q$. Sous cette forme, on aperçoit le début du développement d'un carré ($x^2 + 2mx + m^2 = (x + m)^2$). Donc

$$x^2 + 2mx + q = (x + m)^2 + q - m^2$$

Le second membre de cette égalité est dit "forme canonique du trinome". Cela signifie "forme simple" parce que les étudiants de jadis n'arrivaient que très rarement à comprendre comment on l'obtenait, ni surtout pourquoi. Or c'est la première chose importante que l'on faisait à propos du fameux trinome, avec, en plus, le fait que le facteur 2 n'apparaissait que d'une façon tout à fait artificielle (souvenez-vous : "$x^2 + \frac{b}{a}x$ est le début du développement du carré de $x + \frac{b}{2a}$ etc...").

Le carré $(x + m)^2$ est minimum lorsqu'il est nul, c'est-à-dire pour $x = -m$. *Le trinome est donc minimum pour* $x = -m$. Notons que $-m$ est la *moyenne* des solutions de l'équation $x^2 + px + q = 0$ lorsque celles-ci sont réelles.

Prenons maintenant deux valeurs x_1 et x_2 de la variable qui admettent $-m$ pour moyenne : on trouve donc un réel h tel que $x_1 = -m - h$ et $x_2 = -m + h$.

Pour l'une ou l'autre de ces valeurs, le trinome s'écrit :

$$h^2 + q - m^2$$

Il en résulte que les points de la représentation graphique admettant x_1 et x_2 pour abscisses respectives ont même ordonnée.

Cette représentation graphique est donc symétrique autour de la droite d'équation $x = m$ à laquelle appartient, comme il se doit, le point pour lequel $x^2 + px + q$ est minimum.