10

ECHANGES

Une manière d'intégrer des éléments de logique dans l'enseignement des mathématiques en classe de sixième

par Josette ADDA (Paris)

Il ne s'agit pas ici (1) d'une variante de présentation du chapitre "opérations ensemblistes". Trop souvent l'introduction d'éléments de logique en Sixième se limite à cela (ou, à la rigueur, à l'enseignement des tables de vérité de certains connecteurs logiques), ce qui, d'ailleurs, n'empêche pas certains (manuels par exemple) de se livrer, à partir de là, à de grands développements et de produire de nombreux exercices de ce qu'il faut bien désormais se résigner à appeler des "mathématiques-modernes" ! (2)

C'est une aberration de prétendre limiter l'introduction de la logique au calcul des propositions : en effet personne ne peut faire de mathématiques, à quelque niveau que ce soit, même en Sixième, sans quantifications (je dis bien "quantifications" ; l'introduction du symbolisme des quantificateurs, qui, par ailleurs, ne me semblerait pas aussi scandaleuse qu'on le dit, n'est pas l'essentiel, loin de là, et on peut très bien, en Sixième, tant que les énoncés ne sont pas très longs, expliciter les quantifications en toutes lettres).

(1) Ceci est le texte d'un rapport présenté aux Journées APMEP de 1974 à Dijon dans le groupe de travail "Insertion de la logique dans l'enseignement".

(2) Après avoir longtemps protesté contre la qualification de "modernes", je crois qu'il faut avoir le courage de reconnaître que, souvent, maintenant, c'est, dans cette expression, le mot "mathématiques" qui se trouve être inadéquat.

L'enseignement que je préconise en Sixième (3) consiste d'abord à classer les énoncés mathématiques en vrais et faux, en faisant de nombreux exercices où, les pages étant partagées en deux colonnes (VRAI, FAUX), les élèves doivent écrire dans la colonne adéquate des "*phrases*" mathématiques du type :

$$3 + 7 = 10$$

$$25 \times 4 = 110 \quad \text{etc...}$$

Exercices qui les habituent à ne pas donner au FAUX un "statut" différent du VRAI (sur le plan moral, de la "*faute*", ou de ce qu'on *peut* écrire : ne pas croire que tout ce qu'on *lit* est vrai, etc... : bien que ceci soit seulement noté rapidement ici entre parenthèses, c'est, pour moi, la finalité essentielle de l'enseignement des mathématiques).

On peut déjà présenter des phrases du genre :

Tous les nombres sont pairs
ou Tous les triangles sont isocèles, etc...

Puis on propose des exercices où des expressions *incomplètes* sont écrites, dans les colonnes, avec des pointillés à remplir :

Exemple :

	$3 + 7 = \ldots$	dans VRAI
ou	$3 + \ldots = 10$	dans VRAI
ou	$3 + 7 = \ldots$	dans FAUX
ou	$3 > \ldots$	dans VRAI (4)

ce qui prépare, sans aucune douleur, à la notion d'équation à une ou plusieurs solutions et, de plus, contrairement à la tradition, l'inconnue qui est le résultat d'une opération posée directement n'est pas présentée de manière différente de celle que l'on trouvera après "résolution d'équation" : il me semble malsain de laisser croire à un statut différent pour les inconnues de $3 + 7 = \ldots$ et de $3 + \ldots = 10$, en disant "résultat" dans le premier cas et "inconnue" seulement dans le deuxième cas.

(3) Cet enseignement a été expérimenté pendant l'année 1973-74 au CES Bara de Palaiseau avec des enfants de Sixième de types I, II et III, grâce à la collaboration des cinq enseignants : M. BERNASCONI et Mmes DANIEL, HAINNEVILLE, LABORDE et VALENTIN.

(4) Naturellement les calculs sont très nombreux et plus compliqués que cela de manière à entretenir chez les enfants la pratique calculatoire (cf. le refrain : "ils ne savent plus calculer") et à faire manipuler longuement sous tous ses aspects la structure $(\mathbb{N}, \leqslant, +, \times)$.

Ensuite, après un passage par le symbolisme en "moules" □ que l'on dit de "*remplir*", on introduit le symbolisme des lettres x, y, ... à "*remplacer*" par des valeurs et là, pour les raisons précédentes, on doit, me semble-t-il, le faire aussi bien pour les phrases

du type	$3 + 7 = x$	dans VRAI
que du type	$3 + x = 10$	dans VRAI
ou	$3 + 7 = x$	dans FAUX.

Cette introduction d'équations et de questions du type : "*existe-t-il* des nombres naturels par lesquels on peut remplacer x de manière que :

$$10 + x = 7 \quad \text{soit vrai ?"}$$

amène au chapitre sur Z ...

On se pose aussi des questions du type : *existe-t-il* des nombres naturels par lesquels on peut remplacer x de manière que

$$10 + x = 10$$

soit vrai et on est amené à voir que *pour tout* x , $0 + x = x$ est vrai, etc...

Ceci introduit tout doucement des quantifications. On les reprend plus tard par des séries d'exercices plus systématiques du type de ceux que propose T. VARGA (cf. "Combinatoire, statistiques et probabilités de 6 à 10 ans — guide et commentaire" T. VARGA et M. DUMONT — OCDL, pp. 7 à 10) ; par exemple : étant donné un ensemble de nombres, demander, *pour cet ensemble*, la valeur de vérité de phrases du type : "Tous les nombres pairs se terminent par 0", etc...

Notons dès maintenant que les enfants semblent beaucoup apprécier ces classements en VRAI-FAUX et jonglent souvent mieux que leurs maîtres avec des phrases commençant par "il est faux qu'il soit faux que, etc...".

Les connecteurs *et*, *ou* exclusif, *ou* inclusif, peuvent être présentés comme opérations sur l'ensemble {VRAI,FAUX} en analogie avec les opérations modulo 2. C'est pourquoi il est bon de faire aussi des exercices où, la page étant partagée en deux colonnes : colonne des PAIRS, colonne des IMPAIRS, les enfants ont à écrire dans la colonne adéquate des expressions du type :

$$24 - 5 + 3, \text{etc...}$$

La multiplication et l'addition modulo 2 s'introduisent alors naturellement comme opérations sur l'ensemble de ces deux classes et, ensuite, de même, les connecteurs logiques (sans essayer de les appuyer sur des analogies avec le langage naturel) sont présentés comme des opérations mathématiques sur l'ensemble à deux éléments {VRAI,FAUX}. On peut, alors, les appliquer en manipulant des représentants de chacune de ces classes :

Exemple : quelle est la valeur de vérité de

"$2 < 5$ ou $2 = 5$" (condensé en "$2 \leqslant 5$") ?

Ayant à notre disposition la notion de variable et celle de connecteur, il est loisible, maintenant, de considérer les prédicats à une variable sur un ensemble donné et de définir des opérations entre ces prédicats. Il n'y a rien à dire, à ce niveau, sur les ensembles de manière générale ; ce mot "ensemble" a un sens intuitif ; quant aux prédicats unaires, ils apparaissent très simplement dans des phrases à une variable qui, selon la valeur de cette variable, sont soit vraies, soit fausses ; exemple :

Dans l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, citer les éléments de l'ensemble des x tels que la phrase "x est pair" soit vraie.

Cette présentation nécessite d'insister sur le rôle de l'ensemble *référentiel*, les *opérations ensemblistes* étant les opérations sur les *parties* d'un même ensemble, parties et opérations définies par isomorphisme avec la structure définie sur l'ensemble des prédicats à une variable sur ce référentiel à partir des connecteurs.

Ayant considéré de nombreux cas de phrases à une variable, il est naturel de considérer, ensuite, des phrases à plusieurs variables, toutes dans le même ensemble, ou bien dans des ensembles différents, ce qui introduit sans heurt l'étude des *relations*. Au lieu de la définition ensembliste à l'aide d'un triplet d'ensembles, les relations binaires sont introduites alors comme applications d'un ensemble-produit dans {VRAI, FAUX} et, surtout, les relations *binaires* ne sont pas privilégiées.

Exemple de relation ternaire : Soit E l'ensemble $\{0, 2, 5, 7, 9, 10, 12, 14\}$; pour quelles valeurs du triplet (x, y, z), où x, y, z sont astreintes à E, la phrase "$x + y = z$" est-elle vraie ?

Enfin je soulignerai brièvement ici que, plutôt que de présenter des exercices disjoints (en un certain sens) où l'on définit chaque fois des relations uniques sur des ensembles différents, il me paraît important de montrer que l'on peut munir un même ensemble (ou une même suite de plusieurs ensembles) de plusieurs relations : certaines unaires, d'autres binaires, d'autres ternaires, etc..., ce qui amène progressivement à la prise de conscience du concept de *structure* qui doit être l'objectif fondamental de cette étude des relations (5).

Je sais que l'on fera à cet enseignement le "reproche" d'être *abstrait* ; mais, la propriété caractéristique des mathématiques étant l'abstraction, je pense que c'est là justement la moindre des "qualités" que l'on puisse exiger d'un enseignement de mathématiques ; par contre, il est important qu'il soit *simple* ; or, paradoxalement peut-être, c'est justement son abstraction qui le rend très simple et clarifie les principales sources d'incompréhension.