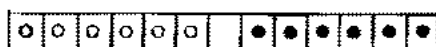


Le jeu des grenouilles

(Rubrique "Clubs Mathématiques")

par Monique GERENTE (C.R.D.P. Grenoble)

Jeu pour un joueur, se jouant avec $2n$ pions (n de chaque couleur) sur $2n + 1$ cases. Initialement la case du milieu est vide, les pions d'une couleur sont rangés à droite, ceux de l'autre couleur à gauche.



Règle du jeu.

1) Chaque grenouille (pion) peut se déplacer à droite ou à gauche d'une case pour occuper la case vide.

2) Chaque grenouille peut sauter, à droite ou à gauche, par-dessus une autre grenouille, si la case suivante est libre.

Les grenouilles doivent changer complètement de camp en un nombre de coups dont le minimum est à déterminer.

Comment aborder un tel jeu ? Combien de pions choisir au début ? Il vaut mieux en prendre le moins possible et en augmenter le nombre petit à petit. On a ainsi plus de chances de trouver la stratégie générale si elle existe.

Pour plus de facilité, codons les pions d'une couleur par 1, ceux de l'autre couleur par 0 et la case vide par un point : .

On appellera situation toute disposition possible des pions. Elle sera décrite par un assemblage de 0, 1 et . Par abus de langage on confondra par la suite la situation et son codage. Ainsi 1.00110 est une situation pour $n = 3$, .1010 et 010.1 sont des situations pour $n = 2$.

Premier cas : $n = 1$

Etudions d'abord le cas le plus simple, celui où l'on dispose de trois cases et d'un pion de chaque couleur. La situation initiale est alors : 1.0 en convenant de noter toujours les 1 à gauche au départ.

Le but du jeu est de parvenir à la situation 0.1 en suivant les règles proposées.

On voit tout de suite qu'il y a deux façons de commencer : ou bien déplacer le 1, ou bien déplacer le 0. Il en sera ainsi pour tout n et l'on voit que chaque fois que l'on aura trouvé une solution, il en existera une deuxième, symétrique de celle-là. Convenons donc de commencer toujours par déplacer les 1.

Ici, la seule possibilité est de pousser le 1 vers la droite (lui faire faire un pas à droite) : 1.0 $\rightarrow$.10

A partir de la situation .10, une seule possibilité (si l'on veut éviter de se trouver dans la situation de départ) : faire sauter le 0 par dessus le 1 : .10 $\rightarrow$ 01.

A partir de la situation 01, encore une seule possibilité : pousser le 1 à droite : 01. $\rightarrow$ 0.1, ce qui est la situation finale.

En résumé :

$$1.0 \rightarrow .10 \rightarrow 01. \rightarrow 0.1$$

Les règles du jeu n'interdisent pas les retours en arrière, mais si l'on cherche le nombre de coups minimum, il faut les éviter le plus possible.

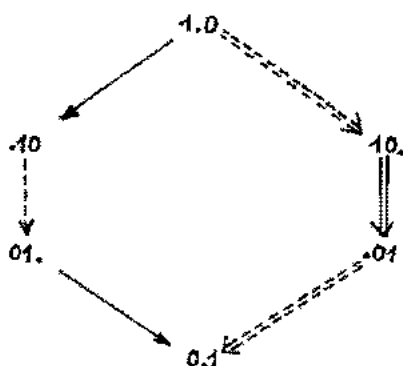
On a ainsi mis en évidence un chemin allant de 1.0 à 0.1. Appelons longueur (l) de ce chemin le nombre d'étapes, soit $l = 3$ qui se décompose en deux pas ($p = 2$) et un saut ($s = 1$). A la symétrie près, ce chemin est unique, il est donc minimum.

Combien, pour $n = 1$, a-t-on de situations possibles ? Il y a trois façons de placer le 1, puis deux façons de placer le 0, soit six situations, les quatre précédentes ainsi que 10. et 01.

Codons les déplacements possibles qui sont, dans ce cas, compte tenu du fait que l'on cherche le chemin le plus court :

- un pas de 1 à droite : $\rightarrow$
- un pas de 0 à gauche : $\leftarrow$
- un saut de 1 à droite : $\rightarrow\rightarrow$
- un saut de 0 à gauche : $\leftarrow\leftarrow$

On peut alors faire le graphe des déplacements possibles dans l'ensemble des situations.



Remarque : Si l'on voulait tenir compte de tous les déplacements permis par les règles du jeu, chaque flèche serait accompagnée d'une flèche retour.

Deuxième cas : $n = 2$.

La situation initiale est alors 11.00. Cherchons le nombre de coups minimum pour atteindre la situation finale 00.11, en conservant les mêmes conventions que précédemment.

De 11.00, deux possibilités : faire sauter un 1 par-dessus l'autre : .1100, ce qui n'est pas avantageux car ensuite le seul déplacement possible (si l'on veut éviter le retour au point de départ) sera de faire reculer un 1 ; ceci ne donnera certainement pas le nombre de coups minimum car on aurait pu arriver au même résultat en un coup de moins. On voit qu'il en sera ainsi chaque fois que l'on fera sauter un pion par-dessus un pion de même couleur. On se l'interdira donc par la suite.

La seule possibilité restante est alors : 11.00 $\rightarrow$ 1.100

De 1.100 on peut passer à .1100 mais on vient de voir que cette situation n'est pas intéressante, ou à 101.0 en faisant sauter le 0 par-dessus le 1 : 1.100 $\rightarrow$ 101.0

A partir de 101.0 il y a encore deux possibilités : soit pousser le 1 : 10.10, situation sur laquelle nous reviendrons plus tard, soit pousser le 0 : 1010.

Puis : 1010. $\rightarrow$ 10.01

De 10.01, trois possibilités :

— soit pousser un 0 vers la droite, ce qui n'est pas intéressant puisqu'on le fait reculer ;

— soit pousser l'autre 0 vers la gauche, ce qui ne sert à rien car il faudra aussi reculer ensuite ;

— soit faire sauter le 1 à droite : .0101

Puis : .0101 $\rightarrow$ 0.101

Le but à atteindre étant 00.11, le coup suivant est : 0.101 $\rightarrow$ 001.1 et enfin 001.1 $\rightarrow$ 00.11

En résumé, avec les conventions précédentes :

11.00 $\rightarrow$ 1.100 $\rightarrow$ 101.0 $\rightarrow$ 1010. $\rightarrow$ 10.01 $\rightarrow$.0101 $\rightarrow$ 0.101 $\rightarrow$ 001.1 $\rightarrow$ 00.11

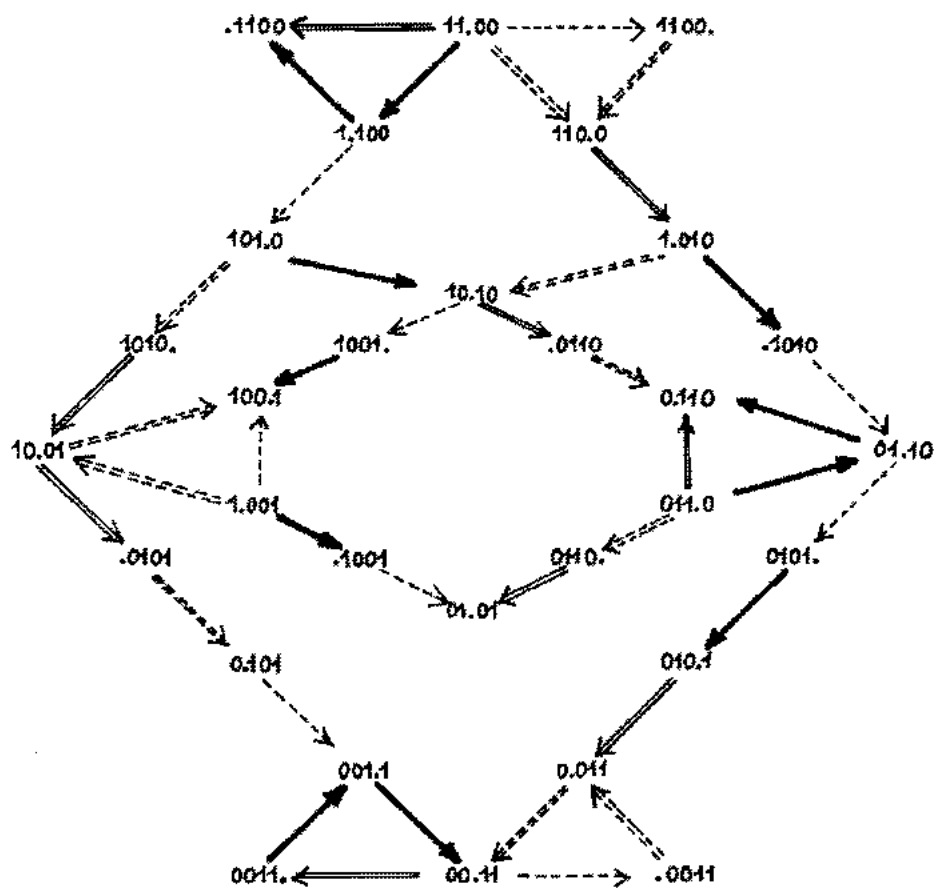
Nous avons ainsi mis en évidence un chemin (donc un autre symétrique de celui-là) allant de 11.00 à 00.11. Ce chemin est de longueur huit ($l = 8$).

Existe-t-il des chemins plus courts allant de 11.00 à 00.11 ? Ici nous n'avons jamais fait reculer de pions, et tout chemin où un pion recule sera plus long que celui-là. Nous ne conserverons donc que la possibilité de déplacer des 1 vers la droite, ou des 0 vers la gauche.

Il s'ensuit que les seuls déplacements possibles pour trouver le chemin minimum sont ceux exposés pour le cas $n = 1$.

Nous allons construire le graphe représentant l'ensemble des situations (sommets du graphe) et les déplacements possibles (arêtes du graphe).

Pour $n = 2$, combien y a-t-il de situations ? Il y a deux 1 à placer dans cinq cases, donc C_5^2 , soit 10 façons de le faire. Il reste deux 0 (ou un .) à placer dans trois cases, donc C_3^2 , soit 3 façons de le faire. Au total, il y a 30 situations.



- : pas de 1 à droite. (noir)
 ⇒ : pas de 0 à gauche. (rouge)
 ⇨ : saut de 1 à droite par-dessus un 0. (bleu)
 ⇧ : saut de 0 à gauche par-dessus un 1. (vert)

Remarque : On constate que le graphe est planaire, c'est-à-dire qu'il peut être représenté par un graphe plan tel que les arêtes ne se coupent pas en dehors des sommets ; on n'arrive pas en général à organiser d'emblée le graphe pour avoir une telle représentation.

Comme précédemment, si l'on tient compte de tous les déplacements permis, chaque flèche doit être accompagnée d'une flèche retour (le graphe n'est en fait pas orienté).

Le graphe est remarquable par toutes les symétries que l'on peut y observer.

On constate que, compte tenu des seuls déplacements "utiles", il y a des situations qui sont des puits, c'est-à-dire que l'on peut y parvenir, mais pas en repartir : 100.1, 0.110, .1100, 1100., .0011, 0011., d'autres que l'on ne peut atteindre à partir de la situation initiale : 1.001, .1001, 01.01, 0110., 011.0

Revenons à la situation 10.10 que nous avons abandonnée lors de la recherche d'un chemin allant de 11.00 à 00.11. Nous voyons sur le graphe qu'elle ne conduit qu'à des puits, donc elle ne nous permet pas de trouver d'autres cheminements.

Il n'existe pas de chemin plus court que celui trouvé. Pour $n = 2$, le chemin le plus court a pour longueur 8 (soit 4 pas et 4 sauts). Ceci se constate donc directement puisqu'on a construit le graphe de toutes les situations et de tous les déplacements possibles.

Observons ce chemin. Déjà une stratégie en trois temps s'en dégage : il ne faut jamais amener deux pions de la même couleur l'un à côté de l'autre au début. On s'efforce donc dans un premier temps d'alterner les couleurs jusqu'à parvenir à la situation où les pions sont tous alternés et où la case vide est d'un côté. Par des sauts successifs, on arrive ensuite à la situation où la case vide est de l'autre côté et où les pions sont alternés. Il ne reste plus enfin qu'à opérer en sens inverse de ce que l'on a fait au départ pour parvenir à la situation finale.

On constate également que si l'on suit cette stratégie, en utilisant les quatre types de déplacement auxquels on se limite, il n'est pas nécessaire, pour décrire une succession de coups, de donner situations et déplacements : *la seule donnée des déplacements suffit.*

D'où un nouveau codage, simplifié, pour décrire la succession de coups effectuée : (B = bleu, N = noir, R = rouge, V = vert).

$n = 1 : N | V | N$

$n = 2 : N V R | B B | R V N$

(les traits verticaux marquent la fin de chaque étape).

Troisième et quatrième cas ($n = 3$ et $n = 4$).

Appliquons l'idée précédente aux cas $n = 3$ et $n = 4$.

$n = 3$: N V R B B N | V V V | N B B R V N

$n = 4$: N V R B B N V V V R | B B B B | R V V V N B B R V N

On obtient ainsi des solutions en 15 et 24 coups, qui semblent satisfaisantes puisqu'aucune manoeuvre inutile n'a été faite (retour de pions en arrière).

Cas général.

Résumons dans un tableau les résultats déjà trouvés, que l'on sait être minimaux pour $n = 1$ et 2, et dont on a de bonnes raisons de croire qu'ils le sont aussi pour $n = 3$ et 4 ; l désigne le nombre total de coups, p le nombre de pas (déplacements noirs et rouges) et s le nombre de sauts (déplacements verts et bleus).

n	l	p	s
1	3	2	1
2	8	4	4
3	15	6	9
4	24	8	16

Il est facile de conjecturer — en suivant cette stratégie — que le nombre total de pas sera $2n$ et que le nombre total de sauts sera n^2 , ce qui donnera une solution en $n^2 + 2n$ coups.

On peut aussi le démontrer ainsi : si l'on note u_n le nombre de coups nécessaire pour la première étape et v_n le nombre de coups nécessaire pour la seconde étape (la troisième a même longueur que la première), on a

$$u_n = u_{n-1} + v_{n-1} + 1 \qquad u_1 = 1$$

$$v_n = v_{n-1} + 1 \qquad v_1 = 1$$

ce qui donne immédiatement

$$v_n = n \quad \text{et} \quad u_n = u_{n-1} + n, \text{ soit}$$

$$u_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = T_n$$

(nombre triangulaire d'ordre n).

Le nombre total de coups est égal à $2T_n + n = n^2 + 2n$.

En étudiant la marche de chacun des pions dans cette suite de coups, on peut voir que si n est pair, chaque pion effectue le même nombre de pas (1) et le même nombre de sauts ($n/2$), alors que si n est impair ($n = 2k + 1$) et si l'on numérote les pions de 1 à $2k + 1$ (pions d'une couleur, situés à gauche) et de $2k + 2$ à $4k + 2$ (pions de l'autre couleur) en allant dans les deux cas de la gauche vers la droite, les pions d'ordre impair font 2 pas et k sauts et les pions d'ordre pair ne font aucun pas et $(k + 1)$ sauts.

Il reste à voir que la suite de coups que nous venons d'analyser est minimale. Nous savons déjà que tout déplacement qui aboutit à mettre côte à côte deux pions de même couleur doit être éliminé, ce qui est le cas pour le saut d'un pion par-dessus un pion de même couleur. Pour un nombre n quelconque de pions de chaque couleur, les pions sont rangés sur $(2n + 1)$ cases et pour passer de la situation initiale à la situation finale, chaque pion doit se déplacer de $n + 1$ cases. Comme il y a $2n$ pions, cela donne $2n(n + 1)$ déplacements d'un pas.

Si les pions ne faisaient que des pas, il faudrait donc $2n(n + 1)$ coups pour passer de la situation initiale à la situation finale. Or il y a un certain nombre de sauts *obligatoires* car n pions doivent sauter par-dessus n pions de l'autre couleur, ce qui fait n^2 sauts à déduire des $2n(n + 1)$ déplacements précédents (1 saut valant 2 pas).

En résumé, pour passer de la situation initiale à la situation finale, le nombre minimum de coups est $2n(n + 1) - n^2$ soit : $n^2 + 2n$ coups, et c'est précisément ce nombre de coups qu'assure la stratégie précédemment analysée.