Echanges à propos de l'article de Gachet

(Voir le Bulletin 290)

1. *De CRENN, Math. Sup. à Rennes*

Je suis d'accord avec l'essentiel de votre article.

Toutefois pour introduire les définitions (en Math Sup) j'ai pris l'habitude d'utiliser souvent la tournure :

Dire que . . . . , c'est dire que . . . .

Cela permet de loger des définitions un peu longues et cela indique, sans ambiguïté, qu'il s'agit d'une définition et ce que l'on définit. (Il arrive qu'on ait à définir une phrase tout entière, telle que $y \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$).

2. *De J. F. DELARUE, St-Jean-de-Maurienne*

L'article de M. GACHET paru dans le n° 290 du Bulletin me paraît soulever heureusement — même si c'est devenu chose fréquente — la question de ce qu'il convient de désigner par le mot "relation". Je partage l'inquiétude de notre collègue et crains en effet qu'on ne se soit engagé dans une impasse. La question ne me semble cependant pas close et je me permets d'y apporter la modeste contribution d'un praticien et non d'un théoricien.

1) Je reste convaincu pour ma part que des écritures telles que : $x \mathrel{R} y$ (à laquelle je préfère aussi : $R(x,y)$) et $y = f(x)$ sont *fondamentalement ambiguës* parce que le plus souvent utilisées comme *abréviations symboliques* d'énoncés trop longs à écrire et surtout à répéter in extenso. On prétend voir (mais on l'oublie souvent vite dans le feu de l'action), par exemple, dans le f de $y = f(x)$ à la fois l'"ensemble de départ", l'"ensemble d'arrivée" et le graphe. Pour constater l'irréalisme de ces notations, il suffit de voir à quelles acrobaties se livrent les manuels pour trouver à chaque fonction une application "associée" ad hoc qui permette la composition des ci-devant fonctions ! Quels élèves devinent les intentions secrètes qui sous-tendent ces tours de passe-passe ?

Quelques exemples :

$y = f(x)$ pourra *remplacer* $y = 3x^3 - 6x + 7$

(et rien d'autre en réalité, à moins qu'on ne doive ranger dans la même catégorie de symboles des symboles tels que : $\sqrt{\ }$, sin, cos, etc ...).

De même : $m \mid p$ remplacera : $\exists\ r \in \mathbf{N}$, $p = mr$, et ceci quel que soit le sous-ensemble de $\mathbf{N}$ dans lequel on prétende travailler.

Faut-il donc distinguer la relation-triplet (voir plus bas) et cet "autre chose" appelé parfois "lien verbal" par des notations différentes : je crois qu'on y est souvent contraint. Par exemple, il est évident qu'on ne peut noter la relation d'"incidence" d'un certain ensemble de points vers un certain ensemble de droites par le seul symbole d'appartenance.

Suivant cette idée, quand notre collègue, à la page 571, propose de dire : "Soit $R(x,y)$ *la relation* $x + y = 1$", je préfère dire : "abrégeons en $R(x,y)$ l'écriture : $x + y = 1$".

2) Les difficultés évoquées me paraissent dues à une fréquente et sans doute inévitable confusion entre *divers niveaux de langage.*

La "Description de la Mathématique formelle" de Bourbaki fait de "relation" un concept métamathématique (si j'ai bien compris), opposant "termes" et "relations". Il me semble d'ailleurs que M. Gachet emploie ce mot dans une acception assez voisine pour laquelle certains utilisent les termes de fonction propositionnelle ou de "moule à énoncés" (quand figure dans l'"assemblage" au moins une lettre qui n'est pas une constante de la théorie). Par contre, Bourbaki introduit dans la théorie des ensembles la notion de "correspondance" (nos relations binaires du secondaire), qui n'est autre qu'un triplet (G, E, F) où G est une partie de $E \times F$ (un graphe).

Si bien que, lorsqu'en haut de la page 572, il est dit : "Si l'on considère maintenant les nouvelles habitudes concernant la notion d'application, on voit que ce concept est, par définition, une relation, mais qu'il est traité comme un élément", il me semble que le procès est sans fondement, dans la mesure où nos "relations" du secondaire sont définies (parfois grosso modo, j'en conviens) comme les "correspondances" de Bourbaki, et sont donc bien sans aucun doute des "éléments".

Il me semble, d'ailleurs, que l'enseignement secondaire serait bien inspiré de s'abstenir d'incursions (ou plutôt d'excursions) dans la métamathématique. Et ceci m'amène à faire allusion à un autre passage de l'article (pp. 568-569) qui traite de l'utilisation du symbole d'implication $\Rightarrow$. Ne faut-il pas ici choisir : ou bien on traite vraiment $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ en connecteurs (ce qui n'oblige pas à faire une théorie des dits connecteurs) et alors il faut les bannir en tant que symboles d'inférence ; ou bien on les conserve comme symboles d'inférence, mais ils risquent de faire cruellement défaut par ailleurs, lorsque, par exemple, un théorème consiste à affirmer la véracité d'une certaine implication ou d'une certaine équivalence (c'est souvent le cas).

Ma position personnelle (après bien des dérapages dans l'un ou l'autre sens) est celle-ci :

— je réserve les symboles d'implication et d'implication réciproque aux énoncés où l'essentiel est cette implication ; par exemple :

$$\forall M\ ,\ \left(M \in D \Leftrightarrow (\exists\ h \in R\ ,\ \overrightarrow{AM} = h\,\vec{u})\right)$$

— je n'utilise surtout pas les symboles d'inférence ($\vdash$ et $\dashv\vdash$) qui commencent à abonder dans la littérature mathématique du secondaire, car leur emploi rigoureux nécessiterait à son tour au moins un embryon de théorie et certaines lectures m'ayant convaincu qu'il s'agit là d'un symbole métamathématique au sens très précis ($\vdash$ signifiant que ce qui est écrit ensuite est un théorème de la théorie considérée — en y adjoignant éventuellement comme axiome ce qui est écrit à gauche du $\vdash$), il me paraît impossible de s'aventurer si loin avec des élèves ;

— j'utilise et fais utiliser la riche palette des : si ... alors, donc, car, il s'ensuit, etc ..., qui a le mérite d'obliger à articuler correctement le raisonnement tout en apprenant à mieux maîtriser la langue courante (je dois préciser que j'enseigne depuis quelques années à peu près exclusivement dans des classes conduisant à des baccalauréats de technicien) ;

— quant aux tables de vérité, je les utilise seulement comme moyen de contrôle de la validité de certaines transformations d'énoncés, sans chercher à en faire aucune théorie, mais peut-être est-ce faisable dans des sections plus habiles.

Tout ceci est sans aucun doute bien incomplet ; peut-être même mon point de vue est-il erroné par endroits, mais j'espère que ces modestes considérations, complétant l'article de M. Gachet, enrichiront le débat.

3. *Réponse de H. GACHET à DELARUE*

Comme vous le dites, je pense qu'il y a lieu de bien préciser ce que l'on désigne par le mot *relation* : dans cette lettre je dirai comme vous "relation-triplet" d'une part, d'autre part, je dirai "relation logique" avec le sens que j'ai donné à "relation" dans mon article, sens qui comme vous le dites est à peu près celui de "fonction propositionnelle", qui est aussi le sens naïf correspondant aux relations de Bourbaki.

Sans discuter ici sur le choix des mots, je dirai seulement que la notion de relation logique est fondamentale, que celle de relation-triplet est beaucoup moins importante et qu'elle est plus artificielle. Les raisonnements portent toujours sur des relations logiques, parfois sur des relations-triplets.

Voici un exemple pris à peu près au hasard.
Exemple : Si une loi de composition interne sur un ensemble E est associative et possède un élément neutre, alors tout élément inversible est régulier.

Considérons la démonstration abrégée suivante où a, x, y désignent des éléments variables de E :

Si 1) a est inversible

2) $ax = ay \Rightarrow a^{-1}(ax) = a^{-1}(ay) \Rightarrow (a^{-1}a)\,x = (a^{-1}a)\,y \Rightarrow x = y$

3) $ax = ay \Rightarrow x = y$

4) $\forall (x,y) \in E^2 \quad ax = ay \Rightarrow x = y$

5) a est régulier

6) a est inversible implique a est régulier

7) tout élément inversible est régulier.

Remarquons que 1) 2) ... 7) sont des relations logiques ; il n'y a aucune relation-triplet dans cette démonstration.

Je ne vois aucun intérêt à fuir les relations logiques, à chercher à les remplacer par des relations-triplets.

Je suis d'accord avec "abrégeons en R(x,y) la relation $x+y = 1$" ; c'est une forme plus claire que "soit R(x,y) la relation $x+y = 1$".

Je suis d'accord avec le fait que mes critiques concernant les applications ne s'appliquent pas à ceux pour qui une relation est un triplet et qui *respectent cette position*, c'est-à-dire à ceux qui à la question "Trouver une relation sur les seules variables réelles x, y résultant de l'hypothèse

$$\left| \begin{array}{l} x = \cos\theta \\ \quad\text{et} \\ y = \sin\theta \end{array} \right.$$

répondent $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\})$ ou répondent quelque chose d'analogue.

Je pense que ceux qui opèrent ainsi sont peu nombreux, et de toute façon, je le répète, cette façon de faire me paraît très artificielle, donc pédagogiquement discutable.

Je suis tout à fait d'accord avec votre phrase :
"Il me semble d'ailleurs que l'Enseignement Secondaire serait bien inspiré de s'abstenir d'incursions (ou plutôt d'excursions) dans la métamathématique". Je dirais plutôt : je pense que l'Enseignement Secondaire devrait s'abstenir d'incursions dans les mathématiques formelles.

Ceci n'empêche pas de s'en inspirer, ce que je crois très bénéfique ; par exemple ma démonstration précédente est naïve même si sa forme peut rappeler une démonstration formelle.

Il me semble que s'il n'y a pas de mathématiques formelles à ce niveau, alors il n'y a plus de distinction entre mathématiques et métamathématiques.

Pour ce qui concerne votre emploi de $\Rightarrow$ et de $\Leftrightarrow$ je remarque simplement qu'il a l'avantage d'éviter des superpositions de ces symboles ; ces superpositions, du genre $(a \Leftrightarrow b) \Rightarrow c$, sont toujours délicates pour les élèves du secondaire.

Je regrette souvent que les élèves confondent "p donc q" (p est vraie donc q est vraie) avec "$p \Rightarrow q$". La première conclut "q est vraie", la seconde conclut seulement "p est faux ou q est vraie".

P.S. – Il va de soi que des erreurs typographiques dans la note du bas de la page 572 de mon article rendent la compréhension de cette note délicate.